2020 网络空间数学竞赛试题解答与评析

李金珉　肖佳劼

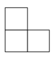
(重庆巴蜀中学, 400013)

首届网络空间数学竞赛于 2020 年 7 月 13 日至 14 日通过网络竞赛的方式举行. 竞赛共分两天考试, 每天 5 小时考 4 道题目, 参赛者多为今年参加 IMO 的各国国家队. 中国六名国家队员参加了本次比赛, 并取得了不错的成绩.

这次竞赛虽然声称难度接近 IMO, 可作为 IMO 的赛前模拟, 但笔者认为难度并不够. 总共 8 个题中, 1, 2, 3, 5, 6 是比较容易的题, 属于高中联赛中偏简单的难度. 7, 8 是中档题, 与 CMO 中档题难度相当. 只有第 4 题属于比较困难的问题.

下面提供对这次比赛题目的解答与评注. 欢迎读者批评指正.

I. 试　题

1. 在一个 $n \times n$ 的方格板上, 主对角线是指沿左上角至右下角的对角线上的 n 个单位方格. 现希望将若干个  形状的骨牌放置在这方格板上, 使得每个骨牌恰好覆盖三个单位方格, 骨牌可以旋转. 要求每个主对角线上的方格均未被覆盖, 每个非主对角线上的方格恰好被覆盖一次. 问对怎样的整数 $n \geq 2$ 可以做到上述覆盖?

2. 设 $f(x) = 3x^2 + 1$. 证明: 对任意正整数 n, 乘积

$$f(1) \cdot f(2) \cdot \cdots \cdot f(n)$$

至多有 n 个不同素因子.

3. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB > BC$. D 是线段 BC 上的动点, 点 E 在 $\triangle ABC$ 外接圆上, 满足 E 与 A 在 BC 的异侧, 且 $\angle BAE = \angle DAC$. 设 I 为 $\triangle ABD$ 的内心, J 为 $\triangle ACE$ 的内心. 证明: 直线 IJ 经过一个不依赖于 D 的定点.

修订日期: 2020-08-08.

4. 设 n 为正奇数, $n\times n$ 的方格棋盘上的某些方格被染成绿色, 国王只能在绿格中行走. 它每步可从一个绿格走到与这个绿格有公共点的另一个绿格. 若国王可以从任一绿格经有限步走到另一绿格. 证明: 国王可用不超过 $\frac{n^2-1}{2}$ 步从任一绿格走到另一绿格.

5. 黑板上写了 2020 个正整数. 每过一分钟, 祖鸣擦去黑板上的两个数, 并写上这两个数的和、差、积、商之一. 例如: 若祖鸣擦去数 6 和 3, 则他可以写下集合

$$\{6+3,\ 6-3,\ 3-6,\ 6\times 3,\ 6\div 3,\ 3\div 6\}=\{9,\ 3,\ -3,\ 18,\ 2,\ \frac{1}{2}\}$$

中的任意一个数. 经过 2019 分钟后, 祖鸣在黑板上写下单独一个数 -2020.

证明: 祖鸣也可以用同样的初始 2020 个数, 在同样的规则下最后写下单独一个数 2020.

6. 求所有的整数 $n\geq 3$, 使得下述命题成立: 若 $\mathcal{P}$ 是一个凸 n 边形, 满足有 $n-1$ 条边长度相同, $n-1$ 个内角大小相同, 则 $\mathcal{P}$ 是一个正 n 边形.

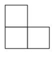
7. 将一个 $n\times n$ 方格纸的 n^2 个小方格每一个染成黑色或白色. 记 a_i 是第 i 行中白色方格个数, b_i 是第 i 列中黑色方格个数. 在所有染色方式下, 求 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i$ 的最大取值.

8. 已知正实数无穷序列 $a_1,\ a_2,\ \cdots$, 满足对任意正整数 n, 都有

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geq\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n+1}^2}{n+1}}.$$

证明: 序列 $a_1,\ a_2,\ \cdots$ 是常数序列.

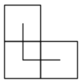
II. 解答与评注

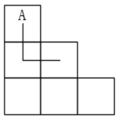
1. 在一个 $n\times n$ 的方格板上, 主对角线是指沿左上角至右下角的对角线上的 n 个单位方格. 现希望将若干个  形状的骨牌放置在这方格板上, 使得每个骨牌恰好覆盖三个单位方格, 骨牌可以旋转. 要求每个主对角线上的方格均未被覆盖, 每个非主对角线上的方格恰好被覆盖一次. 问对怎样的整数 $n\geq 2$ 可以做到上述覆盖?

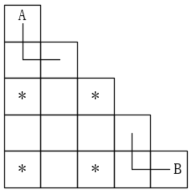
解 首先, 非主对角线上的方格共有 n^2-n 个. 若能恰好覆盖, 必须 $3\mid n^2-n$, 即 $n\equiv 0,\ 1\pmod 3$.

下面考虑 n 较小的情形. 由于主对角线上下的方格不可能被骨牌同时覆盖,

故只考虑主对角线下方的 $\frac{n^2-n}{2}$ 个方格能否被骨牌覆盖.





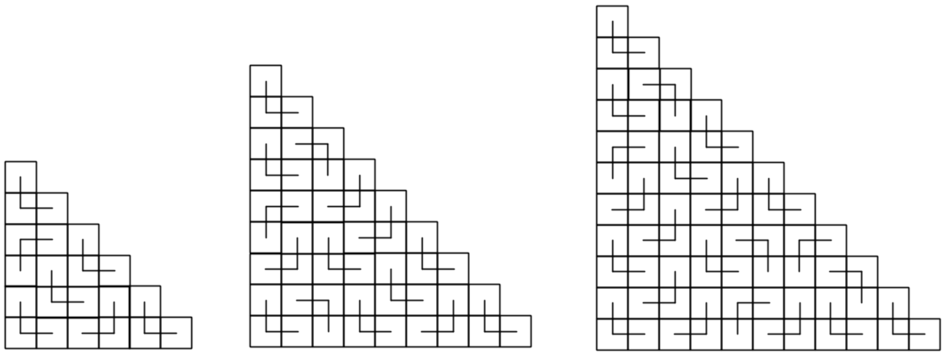


$n=3$ 时, 可以.

$n=4$ 时, 要覆盖格 A, 只有一种放法, 这样下面三个方格无法覆盖, 故不可以.

$n=6$ 时, 同样要覆盖格 A, B 放法必唯一. 剩下 3×3 的方格要被 3 块骨牌覆盖, 但每个角只能被一块骨牌覆盖, 故也不可以.

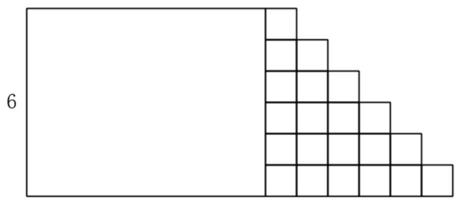
$n=7,\ 10,\ 12$ 时, 都可以. 构造如下:



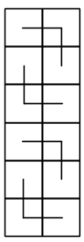
n=7　　n=10　　n=12

下证: 若命题对 n 成立, 则对 $n+6$ 也成立, $n\geq 3$.

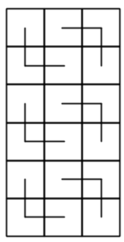
只需考虑主对角线下的最后六行, 形如



右边的阶梯图形即为 $n=7$ 的结论, 能被骨牌覆盖. 而对左边 $6\times(n-1)$ 的长方形方格表, 由于 $n-1\geq 2$, 必存在非负整数 a, b, 使得 $n-1=2a+3b$. 只需将 a 个 6×2 与 b 个 6×3 如下图顺次相接即可.



6*2



6*3

综上, 所求的 n 为满足 $n\equiv 0,\ 1 \pmod 3$ 且 $n\neq 4,\ 6,\ n\geq 3$ 的所有数. □

评注 归纳构造不难想到, 一些相对较大的奠基如 $n=10,\ 12$ 需要花一些时间.

2. 设 $f(x)=3x^2+1$. 证明: 对任意正整数 n, 乘积

$$f(1)\cdot f(2)\cdot\cdots\cdot f(n)$$

至多有 n 个不同素因子.

证明 对 n 用归纳法.

当 $n=1$ 时, $f(n)=4$, 只有一个素因子 2, 故命题成立.

下设命题对 $n-1\ (n\geq 2)$ 成立. 考虑满足 $p\mid f(n)$, 且 $p\nmid f(1)f(2)\cdots f(n-1)$ 的素数 p. 显然 $p\neq n$.

若 $p<n$, 则 $1\leq n-p<n$, 且 $f(n-p)\equiv f(n)\equiv 0 \pmod p$. 故 $p\mid f(1)f(2)\cdots f(n-1)$, 矛盾!

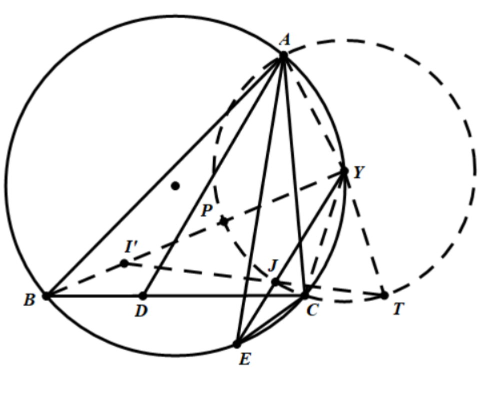
若 $n<p<2n$, 则 $1\leq p-n<n$, 且 $f(p-n)\equiv f(n)\equiv 0 \pmod p$, 也矛盾!

于是必有 $p\geq 2n>\sqrt{f(n)}$, 故这样的 p 至多只有一个, 再由归纳假设, 即知命题对 n 也成立. □

评注 本题是个简单题, 归纳法不难想到. $\bmod p$ 平移也是常用技巧.

3. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB>BC$. D 是线段 BC 上的动点, 点 E 在 $\triangle ABC$ 外接圆上, 满足 E 与 A 在 BC 的异侧, 且 $\angle BAE=\angle DAC$. 设 I 为 $\triangle ABD$ 的内心, J 为 $\triangle ACE$ 的内心. 证明: 直线 IJ 经过一个不依赖于 D 的定点.

证明 设 $\triangle ABC$ 的内心为 P. 延长 BP 交 $\triangle ABC$ 外接圆于 Y, 则 Y 为 $\triangle APC$ 外接圆圆心(这个外接圆记为 $\odot Y$).



由于 $AB>BC$, $\odot Y$ 必与 BC 延长线交于点 T, 且 $BA=BT$. 即 T 为定点.

又 Y 在 $\triangle AEC$ 外接圆上, 且为弧 $\overset{\frown}{AC}$ 中点. 故 $\triangle AEC$ 内心 J 在线段 YE 上. 又 $AB > BC$, 故 J, A 在 BC 同侧, 于是射线 TJ 必与线段 BY 相交. 设交点为 I', 则 $\triangle BI'A \cong \triangle BI'T$, 故

$$\angle BAI' = \angle BTI' = \angle CTJ = \angle CAJ.$$

又

$$\angle BAE = \angle DAC \Rightarrow \angle BAD = \angle EAC \Rightarrow \angle BAI = \angle CAJ.$$

而 I, I' 均在线段 BY 上, 故 I, I' 为同一个点. 于是 IJ 必过不依赖于 D 的定点 T. T 在 BC 延长线上, $BT = BA$. □

评注 首先需猜出这个定点. 当 D 离 B 很近时, I 也离 B 很近. 此时 E 离 C 很近, J 离 C 也很近. 故 IJ 能无限接近于 BC. 这个定点应在 BC 上. 然后精细作图观察不难发现 A, P, J, C, T 均共圆, 之后的推导是简单的.

4. 设 n 为正奇数, $n \times n$ 的方格棋盘上的某些方格被染成绿色, 国王只能在绿格中行走. 它每步可从一个绿格走到与这个绿格有公共点的另一个绿格. 若国王可以从任一绿格经有限步走到另一绿格. 证明: 国王可用不超过 $\frac{n^2-1}{2}$ 步从任一绿格走到另一绿格.

证明 若两个格子有公共点, 则称它们相邻. 如果格子序列 A_0, A_1, $\cdots$, A_m 满足 A_i 只与 A_{i-1} 和 A_{i+1} 相邻 $(1 \le i \le m-1)$, A_0 只与 A_1 相邻, A_m 只与 A_{m-1} 相邻, 称此格子序列为一条链. 它的长度为 m, 包含格子数为 $m+1$. 题目即要证明 $n \times n$ 棋盘上的每条链长度均 $\le \frac{n^2-1}{2}$. 这是因为每两个绿格之间的最短路径必然是一条链.

下面证明加强命题: 对 $n \times n$ 棋盘上任意若干条链. 如果不同链上的格子都互不相邻. 那么这些链的总长度不超过 $\frac{n^2-1}{2}$.

这里可设每条链长度均 ≥ 1, 这样可排除单个格子构成的链.

若记所有链的集合为 $L = \{l_1, l_2, \cdots, l_n\}$, 则链的条数为 $|L|$. 再记所有链包含的格子集合为 $\overline{L}$, 则需要证明:

$$|\overline{L}| \le \frac{n^2-1}{2} + |L|. \tag{$*$}$$

用归纳法. 当 $n=1$ 时, $|\overline{L}| \le 1 \le |L|$. 显然成立.

当 $n=3$ 时:

① 若 3×3 棋盘有一行或一列全在 $\overline{L}$ 中, 则它们必在同一条链上, 由对称性只需考虑两种情况:

(1) 中间一行在 $\overline{L}$ 中, 那么其他格子都不能在 $\overline{L}$ 中, 故 $|\overline{L}|=3\leq\frac{3^2-1}{2}$.

(2) 第一行在 $\overline{L}$ 中, 那么第二行格子都不能在 $\overline{L}$ 中.

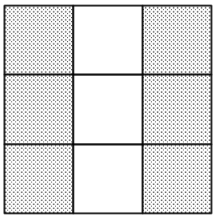
若 $|L|=1$, 则第一行为唯一一条链, $|L|=3\leq\frac{3^2-1}{2}$.

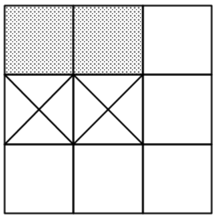
若 $|L|\geq 2$, 则 $|\overline{L}|\leq 6\leq\frac{3^2-1}{2}+|L|$, 均成立.

② 若每行每列均不全在 $\overline{L}$ 中, 则 $|\overline{L}|\leq 6$. 若 $|L|\geq 2$, 由①中讨论知 $(*)$ 成立, 于是只需考虑 $|L|=1$, 即只有一条链的情况.

若 $|\overline{L}|\leq 5$, 则 $|\overline{L}|\leq\frac{3^2-1}{2}+|L|$.

若 $|\overline{L}|=6$, 则每行每列恰有两个格子. 若每行两个格子都不相邻, 则这六个格子不构成一条链. 若某行两个格子相邻, 则与这行相邻的一行中与那两个格子相邻的两个格子都不在链中, 不然会与链的定义矛盾. 于是 $|L|=1$ 时, $|\overline{L}|<6$, 故 $(*)$ 对 $n=3$ 成立.



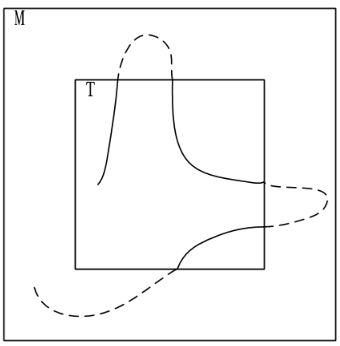


下证若 $(*)$ 对 n 成立, 则对 $n+4$ 也成立.

把 $(n+4)\times(n+4)$ 的棋盘分为两部分, 中心的 $n\times n$ 个格子记为 T. 最外面两层格子记为 M, 则

$$|M|=(n+4)^2-n^2=8n+16.$$

于是 L 中每条链都在 M, T 中交替出现(也可能完整包含在 M 或 T 中). 在 M 或 T 中连续出现的每段均为 M 或 T 中的链.

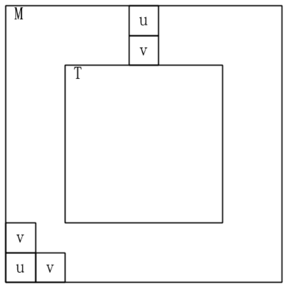


把 M 中所有这些段的集合记为 L_M, T 中所有这些段集合记为 L_T, 则 L_T, L_M 中各自不同链上任意两个格子都不相邻. 于是由归纳假设,

$$|\overline{L_T}|\leq\frac{n^2-1}{2}+|L_T|.$$

由 $|\overline{L}| = |\overline{L_T}| + |\overline{L_M}|$, 还需估计 $|\overline{L_M}|$.

对棋盘最外面一层的格子 u. 若 u 在 $\overline{L_M}$ 中, u 不在角上, 且与 u 有公共边的棋盘最外面第二层的格子 v 也在 $\overline{L_M}$ 中, 则称 u 为坏格. 由链的最短性可知每个坏格必为 L_M 中某条链的端点, 且也为 L 中某条链的端点.



将 L_M 中的链拆分为三部分.

$$L_M = A \cup B \cup C,$$

其中 A 中链无坏格, B 中链恰含一个坏格, C 中链恰含两个坏格, 则 C 中每条链均为 L 中的链, 即 $C \subset L$.

对 L 中除 C 外的链, 它要么含在 T 中, 要么在 T 和 M 中交替出现, 即为

$$(l_A \text{ 或 } l_B \text{ 或 } \emptyset) - l_T - l_A - l_T - l_A - \cdots - l_A - l_T - (l_A \text{ 或 } l_B \text{ 或 } \emptyset)$$

的形式. 其中 l_A, l_B, l_T 分别表示 A, B, T 中某条链. l_A, l_B, l_T 均可作为 L 中两链的开头或结尾, 但中间连接两段 l_T 的 L_M 中的链只能在 A 中, 不能在 B 或 C 中. 这样把中间的每段 l_A 与它之后的一段 l_T 抵消. 不改变 L 中链的条数. 即 $|L_T| - |A|$ 不超过 L 中除 C 外链的条数. 于是

$$\begin{aligned} |L_T| - |A| \le |L| - |C| &\Rightarrow |L_T| \le |L| - |C| + |A| \\ &\Rightarrow |\overline{L_T}| \le \frac{n^2-1}{2} + |L| - |C| + |A|. \end{aligned}$$

要证 $(*)$, 只需证明

$$|\overline{L_M}| \le 4n + 8 + |C| - |A| = \frac{|M|}{2} + |C| - |A|.$$

将 L_M 中所有链上的坏格均删去. 由于坏格只能作为链的端点, 且不存在只由坏格构成的链. 故剩下的格子仍构成一些链, 且条数不变. 把这些链的集合记为 $L_{M'}$, 则

$$|L_{M'}| = |L_M| = |A| + |B| + |C|$$

且

$$|\overline{L_{M'}}| = |\overline{L_M}| - |B| - 2|C|.$$

于是只需证明

$$|\overline{L_{M'}}|+|B|+2|C| \leq \frac{|M|}{2}+|C|-|A|,$$

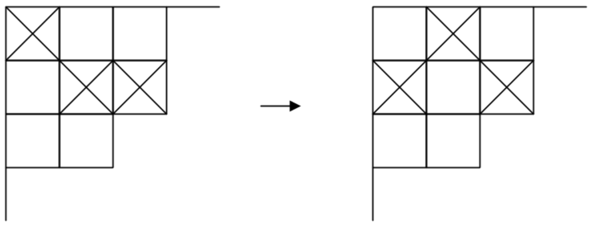
即

$$|\overline{L_{M'}}|+|L_{M'}| \leq \frac{|M|}{2}.$$

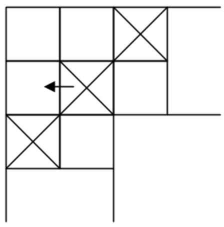
此时 $L_{M'}$ 中的链均没有坏格.

先考虑四个角上 2×2 的情况, 它们至多只能包含 $|\overline{L_{M'}}|$ 中两个格子.

(1) 若恰包含两个格子, 则只能为这个 2×2 的两条对角线之一. 若它为包含顶角的对角线, 则把它换为另一条对角线上的两个格子, 不影响 $|\overline{L_{M'}}|$ 和 $|L_{M'}|$ 的值.

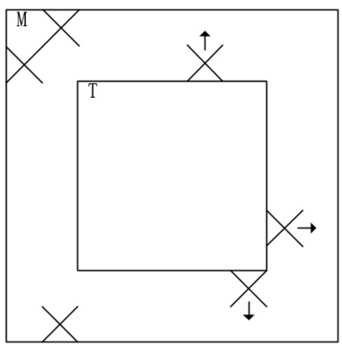


(2) 若恰包含一个格子, 若这个格子在顶角格子所在的对角线上, 那么可把这个格子平移到另一条对角线上, 这样 $|\overline{L_{M'}}|$ 不变, $|L_{M'}|$ 不会减小.



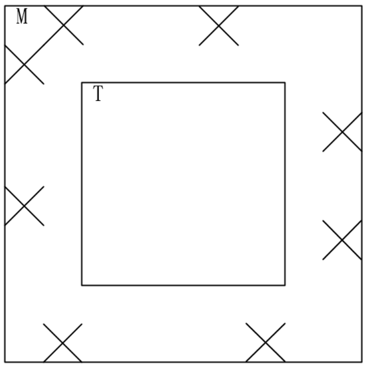
于是, 总可假设四个角上 2×2 中 $\overline{L_{M'}}$ 的格子都在不包含顶角的那条对角线上.

然后, 对于边上的格子, 如果它在里面一层, 则把它移到外面一层, $|\overline{L_{M'}}|$ 不变, $|L_{M'}|$ 也不会减小.



这样, 又可进一步假设 $\overline{L_{M'}}$ 中格子全在棋盘的最外层.

最后如果棋盘最外层除了四个顶角外还有至少两个空的格子, 任取一个把它加入 $\overline{L_{M'}}$ 后, $|\overline{L_{M'}}|$ 增加 1, $|L_{M'}|$ 不变或减少 1. $|\overline{L_{M'}}|+|L_{M'}|$ 仍不会减少.



这样操作下去, 直到最外层除四个角外的格子只有一个空格. 此时

$$|L_{M'}|=1,\ |\overline{L_{M'}}|=\frac{|M|}{2}-1.$$

由于在操作过程中 $|\overline{L_{M'}}|+|L_{M'}|$ 不会减少, 故一定有 $|\overline{L_{M'}}|+|L_{M'}|\leq\frac{|M|}{2}$.

至此, 加强命题证毕, 原命题也成立. □

评注 本题是本次比赛的最难一题. 参赛选手仅一人得 5 分, 一人得 4 分(满分 7 分).

图论中的一个研究分支即为研究图的一些特殊子图或导出子图, 本题即为在图中找出导出子图为尽可能长的路.

求图的最长导出路径往往属于 NP-hard 问题. 即使对简单的 n 维超立方体, 也只在 $n\leq 8$ 时有精确的最大值. 另外还可进一步考虑图的多条导出路径的总长度. 这个想法正是本题证明过程中的加强命题.

本题证明的核心是注意到了路径在边界的"拐弯"情况. 它不能直角拐弯. 这样在边界附近的格子就不会太多. 这样就想到了对最外两层用归纳法, 之后就是一些技术性的处理细节.

有兴趣的读者可以考虑 n 为偶数的情况(不难). 以及 $n\times n\times n$ 的三维立方体的情况. 另外若国王只允许直走, 不允许斜走, 也可考虑相应的二维及三维情况.

5. 黑板上写了 2020 个正整数. 每过一分钟, 祖鸣擦去黑板上的两个数, 并写上这两个数的和、差、积、商之一. 例如: 若祖鸣擦去数 6 和 3, 则他可以写下集合

$$\{6+3,\ 6-3,\ 3-6,\ 6\times 3,\ 6\div 3,\ 3\div 6\}=\{9,\ 3,\ -3,\ 18,\ 2,\ \frac{1}{2}\}$$

中的任意一个数. 经过 2019 分钟后, 祖鸣在黑板上写下单独一个数 -2020.

证明: 祖鸣也可以用同样的初始 2020 个数, 在同样的规则下最后写下单独一个数 2020.

证明 对正整数 $n \geq 2$, 我们归纳证明如下命题:

若开始黑板上有 n 个正整数, 祖鸣经过 $n-1$ 分钟后, 在黑板上写下单独一个数 $-m$, 其中 m 为任意正整数, 那么他也可以用同样的初始 n 个数, 在同样的规则下最后写下单独一个数 m.

当 $n=2$ 时, 设初始正整数为 A 和 B. 要得到负整数 $-m$, 必进行减法操作. 不妨设 $-m=A-B$, 则 m 可由 $B-A$ 得到.

设 $2 \leq n \leq k$ 时, 上述命题成立, 则对 $n=k+1$, 分几种情况讨论

(1) 若最后一次操作为减法. 设 $-m=A-B$, 则 m 可由 $B-A$ 得到.

(2) 若最后一次操作为乘法或除法. 设 $-m=A*B$. ($*$ 为乘或除), 则 A, B 中必有一个为负数, 设为 $C(C=A$ 或 $C=B)$. 那么 C 必为开始的 $r(2 \leq r \leq k)$ 个数经历 $r-1$ 次操作得到. 由归纳假设知 $-C$ 也可由这 r 个数经 $r-1$ 次操作得到. 这样, 将 $A*B$ 中的 C 替换为 $-C$ 即可得到 m.

(3) 若最后一次操作为加法. 设 $-m=A+B$, 可不妨设 A 为负数, 由 (2) 中同样分析可知能得到 $-A$, 则 m 可由 $(-A)-B$ 得到.

综上可知加强命题成立, 于是原命题也成立 $\square$

评注 本题是个简单题. 通过考虑较小的 n 即可看出所有情况.

6. 求所有的整数 $n \geq 3$, 使得下述命题成立: 若 $\mathcal{P}$ 是一个凸 n 边形, 满足有 $n-1$ 条边长度相同, $n-1$ 个内角大小相同, 则 $\mathcal{P}$ 是一个正 n 边形.

解 设 $\mathcal{P}$ 为凸多边形 $P_1P_2\cdots P_n$,

$$\angle P_1P_2P_3=\angle P_2P_3P_4=\cdots=\angle P_{n-2}P_{n-1}P_n=\angle P_{n-1}P_nP_1=\pi-\theta,$$

则 $\theta \in \left(\frac{\pi}{n-1},\ \frac{2\pi}{n-1}\right)$.

将 $\mathcal{P}$ 放在复平面上, 使得 P_1 为原点, P_2 在实轴正方向上. 用 z_j 表示 P_j 所处位置 $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$, 则对 $1 \leq j \leq n$, 有

$$z_{j+1}-z_j=|P_jP_{j+1}| \cdot e^{i(j-1)\theta},$$

其中 $P_{n+1}=P_1$, $z_{n+1}=z_1=0$. 由 $\mathcal{P}$ 的 $n-1$ 条边长相同. 设对 $1 \leq j \leq n$, $j \neq m$, 有

$$|p_jp_{j+1}|=x>0$$

为定值, 另设

$$|p_m p_{m+1}| = h,$$

则

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{j=1}^{n}(z_{j+1}-z_j) = \sum_{j=1}^{n} x\cdot e^{i(j-1)\theta} + (h-x)e^{i(m-1)\theta} \\
&= x\cdot \frac{e^{in\theta}-1}{e^{i\theta}-1} + (h-x)e^{i(m-1)\theta} \\
&= x\cdot e^{\frac{i(n-1)\theta}{2}}\cdot \frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} + (h-x)e^{i(m-1)\theta}.
\end{aligned}$$

若 $\sin\frac{n\theta}{2}=0$, 由 $\theta\in\left(\frac{\pi}{n-1},\ \frac{2\pi}{n-1}\right)$, 必有 $\theta=\frac{2\pi}{n}$. 此时 $h=x$, 故 $\mathcal{P}$ 的所有内角相等. 所有边长相同, 即 $\mathcal{P}$ 必为正 n 边形.

若 $\sin\frac{n\theta}{2}\neq 0$, 此时 $h\neq x$, 于是

$$e^{i\theta\left(\frac{n-1}{2}-(m-1)\right)} = \frac{x-h}{x}\cdot\frac{\sin\theta}{\sin\frac{n\theta}{2}}\in\mathbb{R},$$

故

$$\left(\frac{n+1}{2}-m\right)\theta = k\pi,\ (k\in\mathbb{Z}).$$

当 n 为偶数时, $\frac{n+1}{2}-m\neq 0$, 故 $k\neq 0$, 于是

$$\pi\le|k\pi| = \left|\frac{n+1}{2}-m\right|\cdot|\theta| < \frac{n-1}{2}\cdot\frac{2\pi}{n-1} = \pi$$

矛盾.

这说明当 n 为偶数时, $\mathcal{P}$ 必为正多边形.

当 n 为奇数时, 由偶数时的情况. 若 $k\neq 0$, $\mathcal{P}$ 仍必为正多边形, 故应检验 $k=0$ 的情况. 此时必有 $m=\frac{n+1}{2}$, 于是

$$x\cdot\frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} + (h-x) = 0$$

得

$$h = x\cdot\left(1-\frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right),$$

可令 $\theta=\frac{2\pi}{n}+\epsilon$, ϵ 为充分小的正数, 则 $\theta\in\left(\frac{\pi}{n-1},\ \frac{2\pi}{n-1}\right)$. 又

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{n}+\frac{\epsilon}{2}\right) > 0,\ \sin\frac{n\theta}{2} = \sin\left(\pi+\frac{n\epsilon}{2}\right) < 0.$$

当 ϵ 充分小时, 有

$$h = x\cdot\left(1-\frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right) > x.$$

此时 $\mathcal{P}$ 的 $n-1$ 个内角相等, 但与另一个内角不相等, $n-1$ 条边长相同, 但与另一条边长不相同. $\mathcal{P}$ 不是正多边形.

综上所述, 满足条件的 n 为所有大于 3 的偶数. $\square$

评注 本题方法实质上是把所有边的向量求和, 这是一个经典的方法. 可参考 IMO 1990 年的最后一题, 以及 2007 年集训队测验的第一题.

7. 将一个 $n\times n$ 方格纸的 n^2 个小方格每一个染成黑色或白色. 记 a_i 是第 i 行中白色方格个数, b_i 是第 i 列中黑色方格个数. 在所有染色方式下, 求 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_ib_i$ 的最大取值.

解 记 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n} a_ib_i$. 若同时交换第 i 行和第 j 行, 以及第 i 列和第 j 列. 显然 S_n 的值不变. 故不妨设 $a_1\ge a_2\ge\cdots\ge a_n$.

考虑这样的染法: 第 i 行最右边的 a_i 个方格染成白色, 其余染成黑色.

设第 i 列有 b_i' 个黑格, 并记 $S_n'=\sum\limits_{i=1}^{n} a_ib_i'$.

由于白色方格被尽量靠右, 故前 k 列的黑格个数

$$b_1'+b_2'+\cdots+b_k'\ge b_1+b_2+\cdots+b_k(1\le k\le n).$$

由 Abel 变换可知 $S_n'\ge S_n$. 于是要求 S_n 的最大值, 只需考虑每行白格均在最右侧, 且个数递减的染法即可.

下面用归纳法证明

$$\max S_n=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}.$$

$n=1$ 时, $S_n=1\cdot 0=0$, 显然成立.

设 n 时成立, 当 $n+1$ 时, 由行列对称性可设第一行第一列的格子 $(1,\ 1)$ 染成白色, 且第 1 列有 t 个白格, 则它们为 $(1,\ 1)$, $(2,\ 1)$, $\cdots$, $(t,\ 1)$, $1\le t\le n+1$. 考虑去掉第一行第一列得到的 $n\times n$ 方格表, 设它第 i 行有 a_i' 个白格, 第 i 列有 b_i' 个黑格, 则

$$b_i'=b_{i+1},\quad 1\le i\le n,$$

$$a_i'=\begin{cases} a_{i+1}-1, & 1\le i\le t-1\\ a_{i+1}, & t\le i\le n\end{cases}.$$

由归纳假设

$$S_n'=\sum_{i=1}^{n} a_i'b_i'\le\frac{(n-1)n(n+1)}{3}.$$

又 $a_1=n+1,\ b_1=n+1-t$, 于是

$$S_{n+1}=a_1b_1+\sum_{i=2}^{n+1}a_ib_i=a_1b_1+\sum_{i=2}^{t}(a_{i-1}'+1)b_{i-1}'+\sum_{i=t+1}^{n+1}a_{i-1}'b_{i-1}'$$

$$
\begin{aligned}
&= a_1b_1 + \sum_{i=2}^{t} b_i + \sum_{i=1}^{n} a_i' b_i' \\
&\leq (n+1)(n+1-t) + (t-1)(n+1) + \frac{(n-1)n(n+1)}{3} \\
&= (n+1)n + \frac{(n-1)n(n+1)}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.
\end{aligned}
$$

且若将第 i 行的最右边 $n-i+1$ 个格子染成白色, 其余染成黑色, 则第 i 列有 $n-i$ 个黑格. 此时,

$$
S_n = \sum_{i=1}^{n}(n-i+1)(n-i) = \sum_{j=1}^{n} j(j-1) = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}
$$

故最大值可以取到.

综上所述, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_ib_i$ 的最大值为 $\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$. □

评注 通过交换行列简化图形是处理方格表极值问题的常用方法. 将行排序后想到列也应排序, 这样又可进一步简化问题, 之后的归纳法是容易处理的.

8. 已知正实数无穷序列 $a_1, a_2, \cdots$, 满足对任意正整数 n, 都有

$$
\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n+1}^2}{n+1}}.
$$

证明: 序列 $a_1, a_2, \cdots$ 是常数序列.

证明 令

$$
A_n = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},\ Q_n = \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}},
$$

则 $Q_n \geq A_n \geq Q_{n+1}$.

固定整数 $k \geq 2$, 对任意整数 $n \geq k$, 有

$$
\begin{aligned}
Q_n^2 - Q_{n+1}^2 \geq Q_n^2 - A_n^2 &= \frac{1}{n^2}\sum_{1\leq i<j\leq n}(a_i-a_j)^2 \qquad (*) \\
&\geq \frac{1}{n^2}\sum_{j=k}^{n}\left[(a_k-a_j)^2+(a_j-a_1)^2\right] \\
&\geq \frac{1}{n^2}\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{2}\left[(a_k-a_j)+(a_j-a_1)\right]^2 \\
&= \frac{n-k+1}{2n^2}(a_k-a_1)^2.
\end{aligned}
$$

于是对任意整数 $N \geq k$,

$$
Q_k^2 \geq \sum_{n=k}^{N}(Q_n^2-Q_{n+1}^2) \geq (a_k-a_1)^2\sum_{n=k}^{N}\frac{n-k+1}{2n^2}.
$$

当 $N \to +\infty$ 时,

$$\sum_{n=k}^{N} \frac{n-k+1}{2n^2} \to +\infty.$$

而 a_k 为定值, 故必有 $(a_k - a_1)^2 = 0$. 由 k 的任意性即知所有 a_k 都相等. $\square$

评注 (*) 式是关于算术平均和平方平均关系的常用等式, 然后若 a_k 不全相等, 可从中挑出足够多"主项", 使得这些项积累起来能任意大.

本文由第二作者执笔, 主要根据第一作者在考场上的解答, 对部分较长的过程作了简化, 并重写了一部分的证明.

最后感谢冷岗松教授的大力支持和胡珏伟博士的辛勤编辑.