⁎ **数学新星 OPEN 问题征解**⁎

第一期 一个数论问题

邓煜

(南加州大学, University of Southern California)

问题 给定 $d \geq 2$, 以 $\mathbb{R}^d$ 上除原点 O 外的各整点为中心作半径为 $\varepsilon \in (0,1)$ 的球. 称整点 $X \neq O$ 为可连的, 如果线段 OX 只与以 X 自身为中心的球相交. 定义 $R = R_d(\varepsilon)$ 为可连整点到原点的最大距离, 及 $N = N_d(\varepsilon)$ 为可连整点的个数. 则极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{d-1} R_d(\varepsilon) \quad \text{和} \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{d(d-1)} N_d(\varepsilon)$$

是否存在? 其值为何?

注 (1). 在 $d = 2$ 时问题可看作经典的果园视线问题 (Orchard visibility problem) 的一个变种 (涉及看向整点而非任意点的视线), 此时结论是熟知的, 即

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon R_2(\varepsilon) = 1, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 N_2(\varepsilon) = \frac{6}{\pi}.$$

前者可参见 T.T. Allen, Polya's orchard problem, *Amer. Math. Monthly*, 93(1986) 98–104, 后者只需利用坐标互素整点的比例是 $6/\pi^2$ 这一事实即可.

(2). 在 $d = 3$ 时也可证明极限存在, 且

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 R_3(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{3}}, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^6 N_3(\varepsilon) = \frac{4 + 3\ln 3}{6\zeta(3)}.$$

(3). 以上证明中关键性地用到了二维向量的外积是数量, 而三维向量的外积仍是三维向量的事实. 在四维以上这一性质不再成立, 便使问题更加困难. 对 $d \geq 4$ 我们只知道存在常数 $0 < c_1 < c_2 < \infty$, 使得

$$c_1 < \varepsilon^{d-1} R_d(\varepsilon) < c_2, \qquad c_1 < \varepsilon^{d(d-1)} N_d(\varepsilon) < c_2.$$

因此若所论极限存在, 其必为有限正值.