2020首届百年老校数学竞赛试题解答

王彬

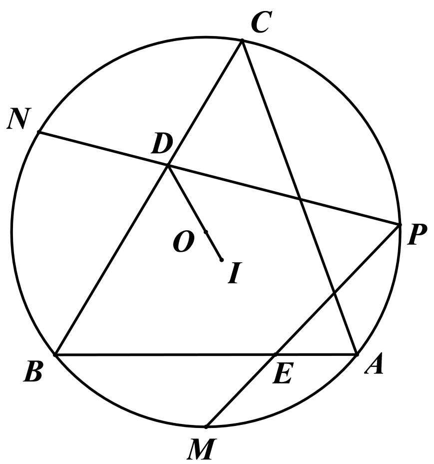
(中国科学院数学与系统科学研究院, 100190)

首届百年老校数学竞赛于 2020 年 8 月 1 日至 5 日在浙江省宁波中学举行. 下面介绍本次考试试题及解答.

I. 试题

1. 已知 $\triangle ABC$ 满足 $AB+BC=2AC$ 且 $AB\neq BC$. 设点 O,I 分别是 $\triangle ABC$ 的外心与内心, 直线 OI 交边 BC 于点 D, 点 E 在边 AB 上使得 $BE=BD$. 设点 M,N 分别为 $\odot O$ 的弧 $\overset{\frown}{AB}$(不含 C) 与弧 $\overset{\frown}{BC}$(不含 A) 的中点, 直线 ME 和 ND 交于点 P. 证明：点 P 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上.

(北京四中 贯祥雪 供题)



2. 对实数 α, 若 $\cos\alpha$ 和 $\sin\alpha$ 均为有理数, 则称 α 为“好角”. 求同时满足下列两个条件的整数 m 的个数：

(i) 存在好角 α 使得 $\cos\alpha=\dfrac{m}{100^{2020}}$;

(ii) 对整数 $n\geq 2$, 不存在好角 β 使得 $\cos(n\beta)=\dfrac{m}{100^{2020}}$.

(福州一中 鄢继鑫、孙谌劼 供题)

3. 将 $100\times100\times100$ 的正方体分割成 100^3 个单位正方体. 我们称这些单位正方体的棱为“E棱”, 称这些单位正方体的面为“F面”. 设 Ω 是由 2020 条两两不同的“E棱” $e_1,e_2,\ldots,e_{2020}$ 构成的集合, 满足对其中任意两条“E棱” e_i 与 e_j ($1\le i<j\le 2020$), 它们有公共端点当且仅当 $j-i=1$ 或 2019.

求证：可以将若干个“F面”染为蓝色, 使得属于 Ω 的每条“E棱”都恰好在奇数个蓝色的“F面”上, 同时不属于 Ω 的每条“E棱”都恰好在偶数个蓝色的“F面”上.

(上海中学 周天佑 供题)

4. 求最大的实数 C, 使得不等式

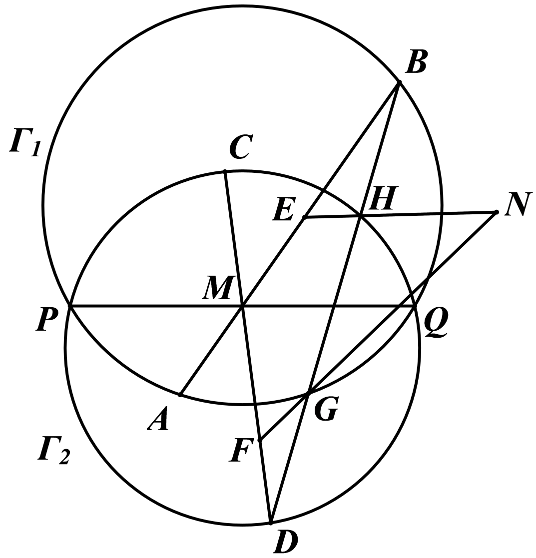
$$\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{x_k}\cdot\sum_{k=1}^{100}\left(x_k^3+2x_k\right)\ -\ \left(\sum_{k=1}^{100}\sqrt{x_k^2+1}\right)^2\ge C$$

对任意 100 个两两不同的正整数 $x_1,x_2,\ldots,x_{100}$ 成立.

(温州中学 邵达 供题)

5. 圆 Γ_1 和圆 Γ_2 相交于 P,Q 两点, 圆 Γ_1 的弦 AB (异于 PQ) 与圆 Γ_2 的弦 CD (异于 PQ) 均经过 PQ 的中点 M . 线段 BD 与圆 Γ_1 交于点 G (异于B), 与圆 Γ_2 交于点 H (异于 D). 点 E,F 分别在线段 BM 与 DM 上, 满足 $EM=AM$, $FM=CM$. 直线 EH与 FG 相交于点 N. 求证：M,E,N,F 四点共圆.

(南方科技大学 付云皓 供题)



6. 是否存在正整数集的 100 个两两不交的子集 $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$ 满足：对任意无穷多个质数组成的集合 S, 存在正整数 m 以及

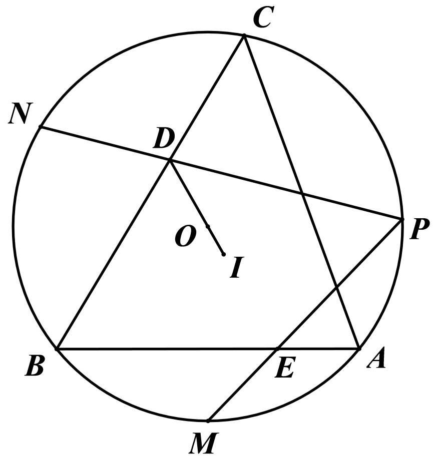
$$a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_2, \ldots,\ a_{100} \in A_{100}$$

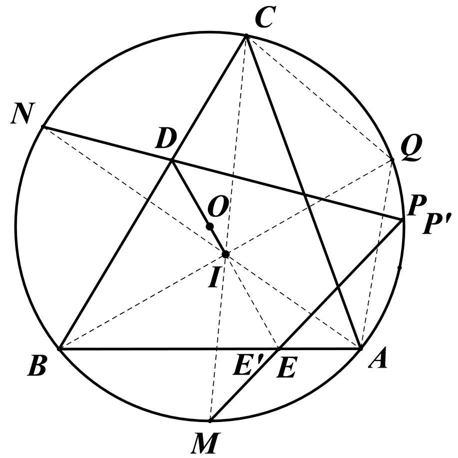
使得 $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ 都可以表示为 S 中的 m 个不同质数的乘积.

(镇海中学 沈虎跃 供题)

II. 解答

1. 已知 $\triangle ABC$ 满足 $AB + BC = 2AC$ 且 $AB \neq BC$. 设点 O, I 分别是 $\triangle ABC$ 的外心与内心, 直线 OI 交边 BC 于点 D, 点 E 在边 AB 上使得 $BE = BD$. 设点 M, N 分别为 $\odot O$ 的弧 $\overset{\frown}{AB}$(不含 C) 与弧 $\overset{\frown}{BC}$(不含 A) 的中点, 直线 ME 和 ND 交于点 P. 证明：点 P 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上.





证明. 延长 BI 交外接圆 $\odot O$ 于点 Q, 由鸡爪定理可知 $AQ = QI = QC$. 在圆内接四边形 $ABCQ$ 中由托勒密定理可得：

$$AQ \times BC + QC \times AB = AC \times QB = AC \times (QI + IB)$$

由 $AB + BC = 2AC$ 可知 $2AQ = QI + IB$ 进而 $QI = IB$, 由垂径定理可得 $IO \perp IB$. 连接 IE, 由 I 是 $\triangle ABC$ 的内心可知 $\triangle BID \cong \triangle BIE$, 进而 $IE \perp IB$. 即 D, I, E 三点共线.

设 ND 交 $\odot O$ 于点 P' ,MP' 交 AB 于点 E'. 对六边形 $ABCMP'N$ 使用帕斯卡定理, 因为 CM 交 AN 于点 I, 故 D, I, E' 三点共线.

又 D, I, E 共线. 点 E和点 E' 都在 AB 上, 故点 E和 E' 重合.

故 ND 和 ME 交于点 P', 从而点 P 与点 P' 重合, 即点 P 在外接圆 $\odot O$ 上. □

注. 解答的后半部分也可以采用帕斯卡定理的逆定理, 即六边形 $ABCMPN$ 满足相应的三组交点共线后,可知其六个顶点一定在同一个圆锥曲线(二次曲线)上, 而其中五个点顶点 A, B, C, M, N 共圆, 可知第六个顶点P 也在该圆上(因为两个不同的非退化二次曲线至多只有四个交点).

2. 对实数 α, 若 $\cos\alpha$ 和 $\sin\alpha$ 均为有理数, 则称 α 为"好角". 求同时满足下列两个条件的整数 m 的个数:

(i) 存在好角 α 使得 $\cos\alpha = \dfrac{m}{100^{2020}}$;

(ii) 对整数 $n \geq 2$, 不存在好角 β 使得 $\cos(n\beta) = \dfrac{m}{100^{2020}}$.

解. 设所有好角构成集合 M, 容易验证集合 M 对加减法封闭. 记$\theta = \arccos\frac{4}{5}$, 我们有 $\theta \in M, \frac{\pi}{2} \in M$, 对正整数 n , 集合

$$A_n = \{n\theta + r \times \frac{\pi}{2} : r = 0, 1, 2, 3\}$$

中四个数都是好角.

对正整数 n , 称 $\cos n\alpha$ (α 是好角) 形式的数为"可被 n 阶表示". 题目考虑所有 $\frac{m}{100^{2020}}$ 形式的有理数, 它可被 1 阶表示但不可被高阶($n \geq 2$ 阶)表示.

对好角 α, 设有理数 $\cos\alpha, \sin\alpha$ 约分后分别为 $\frac{x}{z}, \frac{y}{z'}$ (整数 x, z 互质, y, z' 互质, 且 z, z' 是正整数),

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z'^2} = 1 \ \Rightarrow\ \frac{y^2}{z'^2} = \frac{z^2 - x^2}{z^2},$$

两个最简分数相等可知其分子分母分别相等, 即: $z = z', x^2 + y^2 = z^2$, 这时只能 x, y 一奇一偶, 分母 z 是奇数. 因此题目中的 $\dfrac{m}{100^{2020}}$ 约分后一定是 $\dfrac{x}{5^t}$ 的形式(分子 x 与 5 互质), 其中 $t \in \{0, 1, \ldots, 4040\}$, 称这样的数为 t 型好数, 设所有 t 型好数构成集合 B_t. 例如 $B_1 = \{\pm\frac{3}{5}, \pm\frac{4}{5}\}$, 它们是

$$A_1 = \{\theta + r \times \frac{\pi}{2} : r = 0, 1, 2, 3\}$$

中四个好角的 cos 值.

我们关注 $\cos n\alpha$ 与 $\cos\alpha$ 的关系, 考虑切比雪夫多项式 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$T_1(X) = X,$$

$$T_2(X) = 2X^2 - 1,$$

$$T_3(X) = 4X^3 - 3X,$$

$$T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X),\ n = 1, 2, \ldots$$

由归纳法易知: $T_n(X)$ 是首项系数为 2^{n-1} 的 n 次整系数多项式, 且满足

$T_n(\cos\alpha)=\cos n\alpha$. 如果有理数 $\cos\alpha=\frac{x}{z}$, 则

$$\begin{aligned}\cos n\alpha=T_n\left(\frac{x}{z}\right)&=\frac{2^{n-1}x^n}{z^n}+\square\frac{x^{n-1}}{z^{n-1}}+\square\frac{x^{n-2}}{z^{n-2}}+\cdots\\&=\frac{2^{n-1}x^n+\square x^{n-1}z+\square x^{n-2}z^2+\cdots}{z^n}.\end{aligned}$$

其中分子与 z 互质, 因此 $\cos n\alpha$ 的分母等于 z^n, 即恰好是 $\cos\alpha$ 分母的 n 次方.

对 $\cos\theta=\frac{4}{5}$, 由上述推理可知: $\cos n\alpha=\frac{x_n}{5^n},\sin n\theta=\frac{y_n}{5^n}$ 且分子 x_n,y_n 均为与 5 互质的整数, 这样可得到$\{\pm\frac{x_n}{5^n},\pm\frac{y_n}{5^n}\}$ 这四个 n 型好数. 我们断言除此之外没有别的 n 型好数, 这是因为不定方程 $x^2+y^2=5^{2n}$ 只有一组正整数解 (x,y) 满足 $x>y>0$ 且 $(x,5)=1$. 若不然, 设

$$5^{2n}=x^2+y^2=u^2+v^2(x>y>0,u>v>0),$$

则

$$5^{2n}\mid(5^{2n}-y^2)(5^{2n}-v^2)-y^2v^2=x^2u^2-y^2v^2=(xu+yv)(xu-yv).$$

由于 x,y,u,v 均与 5 互质, 这样 $(xu+yv)$ 与 $(xu-yv)$ 不能都被 5 整除, 因此有 $5^{2n}|xu+yv$ 或 $5^{2n}|xu-yv$, 由于

$$0<xu-yv<\max\{x^2,u^2\}<5^{2n},$$

所以只能 $5^{2n}|xu+yv$ 即 $xu+yv\geq 5^{2n}$, 这样可推得：$x=u,y=v$, 矛盾. 因此恰有四个 n 型好数, 即：

$$B_n=\left\{\pm\frac{x_n}{5^n},\pm\frac{y_n}{5^n}\right\}=\{\cos\alpha:\alpha\in A_n\}=\left\{\cos(n\theta+r\times\frac{\pi}{2}):r=0,1,2,3\right\}.$$

注意一个细节是 $A_n=\{n\theta+r\times\frac{\pi}{2}:r=0,1,2,3\}$ 中的四个好角的 cos 值是互不相同的, (否则会出现 $2n\theta$ 是 $\frac{\pi}{2}$ 的整数倍的情况, 导致 $\cos(2n\theta)=0,\pm1$ 矛盾.)

由切比雪夫多项式的分析可知：若某个 t 型好数可被 n 阶表示,即 $\frac{x}{5^t}=\cos n\beta$, 则此时 $\cos\beta$ 一定是分母为 $5^{\frac{t}{n}}$ 的有理数, 即 $\cos\beta\in B_{\frac{t}{n}}$. 接下来我们考虑原问题, 即考虑每个 B_t 中分别有几个数满足"不能被高阶表示"的条件：

若 $t=0$, 则 $B_0=\{-1,0,1\}$ 中的数均可被高阶表示, 都不满足条件;

若 $t=1$, 则 $B_1=\{\pm\frac{3}{5},\pm\frac{4}{5}\}$ 中的 4 个好数均不能被高阶表示, 即都满足条件;

若 $t>1$ 不是 2 的方幂, 即存在奇数 $L\geq 3$ 整除 t, 设 $t=Lk$. 此时 $A_k=\{k\theta+r\times\frac{\pi}{2},r=0,1,2,3\}$ 中的四个好角的 L 倍变成

$$\{kL\theta+Lr\times\frac{\pi}{2}:r=0,1,2,3\}\equiv\{kL\theta+r\times\frac{\pi}{2}:r=0,1,2,3\}=A_{kL}\pmod{2\pi},$$

即 $B_t=B_{kL}$ 中的数均可被 L 阶表示, 即都不满足条件;

若 $t=2^k,(k\geq 1)$ 是 2 的方幂, 如果 $B_t=B_{2^k}=\{\cos\alpha:\alpha\in A_{2^k}\}$ 中某个数可被 $n\geq 2$ 阶表示, 则 $n|2^k$ 可知 n 也是 2 的方幂, 因此该数 $\cos n\beta=\cos 2\beta^*$ 可被 2 阶表示(其中 $\beta^*=\frac{n}{2}\beta$ 也是好角), 这时

$$\beta^*\in A_{2^{k-1}}=\{2^{k-1}\theta+\tilde{r}\times\frac{\pi}{2}:\tilde{r}=0,1,2,3\},$$

我们考虑 $2\beta^*$ 能 $(\bmod 2\pi)$ 意义下取到 $A_{2^k}=\{2^k\theta+r\times\frac{\pi}{2}):r=0,1,2,3\}$ 中的哪些角, 由于 $2\beta^*$ 是 $2^k\theta+2\tilde{r}\times\frac{\pi}{2}$ 的形式, 可以取到 $r=0,2$ 的情况, 不能取到 $r=1,3$ 的情况, 因此 $B_t=B_{2^k}$ 中恰有两个数满足条件.

综上 B_1 中有四个数, $B_2,B_4,\ldots,B_{2^{11}}$ 中各有两个数, 共 26 个数满足条件. $\square$

3. 将 $100\times100\times100$ 的正方体分割成 100^3 个单位正方体. 我们称这些单位正方体的棱为“E棱”, 称这些单位正方体的面为“F面”. 设 Ω 是由 2020 条两两不同的“E棱” $e_1,e_2,\ldots,e_{2020}$ 构成的集合, 满足对其中任意两条“E棱”e_i 与 e_j ($1\leq i<j\leq 2020$), 它们有公共端点当且仅当 $j-i=1$ 或 2019.

求证: 可以将若干个“F面”染为蓝色, 使得属于 Ω 的每条“E棱”都恰好在奇数个蓝色的“F面”上, 同时不属于 Ω 的每条“E棱”都恰好在偶数个蓝色的“F面”上.

证明. 记 $m=1010$ 即 $2m=2020$. 设棱 e_i 与 e_{i+1} 的公共端点为

$$P_i,(i=1,2,\ldots,2m,e_{2m+1}=e_1).$$

这样得到点 $P_1,P_2,\ldots,P_{2m}$ (它们两两不同,也是单位正方体的顶点), 以及棱 e_i 的两个端点是 P_{i-1},P_i, $(P_0=P_{2m})$. 直观的看, Ω 中的 $2m$ 条棱构成一条不自交的闭曲线(一个圈).

记所有的"F面" 构成集合 A , 所有的"E棱" 构成集合 B. 我们考虑一个 A 的子集族到 B 的子集族的映射 $\Phi:2^A\mapsto 2^B$, 对任意由若干个“F面”构成的集合 $S\subseteq A$, 定义 $\Phi(S)$ 是由所有恰好在 S 中的奇数个面上的"E 棱" 构成的集合. 例如若 S 是某个"F面"构成的单元集, 则 $\Phi(S)$ 恰好是它的 4 条"E棱"构成的集合, 如果 S 是某个单位立方体的六个面构成集合, 则 $\Phi(S)$ 是空集.

注意 Φ 有一个重要的性质, 它是模 2 意义下的线性函数. 即对 $\Phi(S_1)=T_1$ 与 $\Phi(S_2)=T_2$ 我们有 $\Phi(S_1\triangle S_2)=T_1\triangle T_2$, 这里 $\triangle$ 表示集合的对称差运算, 也可以理解为(把集合看成示性函数意义下的) 模 2 加法运算.

题目的要求是对任意长为 $2m$ 的封闭曲线 Ω, 存在它在 Φ 映射下的原像. 我们对 m 归纳来证明该命题.

归纳奠基 $m=2$ 即恰好 4 条"E棱" 时,它们一定是某个"F面"的 4 条"E棱", 结论成立. 一般情况下, 我们考虑把 Ω 这个大圈分解成两个圈“相加” $\Omega=\Omega_1\triangle\Omega_2$, 其中 Ω_1,Ω_2 是长度更小的圈或者容易找到原像的圈.

具体的, 对于闭曲线 $\Omega=(P_1-P_2-\cdots-P_{2m}-P_1)$ 的 $2m$ 条棱, 如果有某两个不相邻的点 P_i,P_j 的距离为 1,($1\le i<i+1<j\le 2m$) 即有一条不属于 Ω 的棱 $e*$ 以 P_iP_j 为端点. 此时我们作出

$\Omega_1=(P_i-P_{i+1}-\cdots-P_j-P_i),\Omega_2=(P_j-P_{j+1}-\cdots-P_{2m}-P_1-\cdots-P_i-P_j)$ 是两条长度均小于 $2m$ 的闭曲线, 由归纳假设存在 $S_1,S_2\subset A$ 使得

$$\Phi(S_1)=\Omega_1,\Phi(S_2)=\Omega_2,$$

此时

$$\Phi(S_1\triangle S_2)=\Omega_1\triangle\Omega_2=\Omega$$

满足条件.

如果任意不相邻顶点的距离都大于 1 , 则考虑顶点 P_k 的坐标

$$(x_k,y_k,z_k),k=1,2,\ldots,2m.$$

不妨设 $x_1,x_2,\ldots,x_{2m}$ 的取值不为常数, 设它们的取值最大为 b, 且不全为 b, 即其中有一些 $=b$, 有一些 $\le b-1$. 由于角标模 $2m$ 循环, 不妨设 $x_0=x_{2m}\le b-1$ 且有某个 l 使得 $x_l=b$, 此时依此考虑 $x_{l+1},x_{l+2},\ldots$ 的取值, 其中会首次出现 $x_k=b-1$ 的情况,不妨设为 x_{v+1}, 即存在 v 使得:

$$x_l=x_{l+1}=\cdots=x_v=b,x_{v+1}=b-1.$$

同理存在 u 使得

$$x_l=x_{l-1}=\cdots=x_u=b,x_{u-1}=b-1.$$

我们有$1\le u\le k\le v\le 2m-1$, 且由于 $P_{l-1}\ne P_{l+1}$ 可知u,v 不能都等于 l , 即 $v-u\ge 1$. 这样我们有 $x_u=x_{u+1}=\cdots=x_v=b,x_{u-1}=x_{v+1}=b-1$.

对 $k=u,u+1,\ldots,v$, 我们取点 $Q_k=(x_k-1,y_k,z_k)$ 即把点 $P_k=(x_k,y_k,z_k)$ 平移一格使 x 坐标减小 1 , 由任意不相邻顶点的距离都大于 1 的假设可知 $Q_{u+1},Q_{u+2},\ldots,Q_{v-1}$ 与点 $P_1,P_2,\ldots,P_{2m}$ 互不相同, 且 $Q_u=P_{u-1},Q_v=P_{v+1}$.

我们设计 $\Omega_1=(P_u-P_{u+1}-\cdots-P_v-Q_v-Q_{v-1}-\cdots-Q_u-P_u)$ 以及

$$\Omega_2=(P_1-P_2-\cdots-P_{u-1}(=Q_u)-Q_{u+1}-Q_{u+2}-\cdots$$
$$-Q_{v-1}(=P_v)-P_{v+1}-\cdots-P_{2m}-P_1)$$

取 S_1 是由 $v-u$ 个“F面” $\{(P_kP_{k+1}Q_{k+1}Q_k)\mid k=u,u+1,\ldots,v-1\}$ 构成的集合. 此时 $\Phi(S_1)=\Omega_1$, 另一方面 Ω_2 是长度为 $2m-2$ 的闭曲线, 由归纳假设知存在 $S_2\subset A$ 使得 $\Phi(S_2)=\Omega_2$, 这样 $\Phi(S_1\triangle S_2)=\Omega_1\triangle\Omega_2=\Omega$ 满足条件.

由归纳法可知命题对所有 $m\geq 2$ 成立, 特别的对原题中的 $m=1010$ 即 2020 条”E棱” 时成立. □

注. 本题的背景与拓扑、同调论有关, 即 $\mathbb{R}^3$ 的 1 阶同调群 $H_1(\mathbb{R}^3)=0$ 是平凡的. 结论直观来看就是：三维空间中的一条封闭曲线总是某一片曲面的边缘(边界), 本题是该结论的离散版本.

解答中的 Φ 映射类似于求二维图形的边缘的运算, 结论也可以理解为：$\mathbb{R}^3$ 中的某个一维图形如果没有边缘, 则它一定是某个二维图形的边缘.

4. 求最大的实数 C, 使得不等式

$$\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{x_k}\cdot\sum_{k=1}^{100}\left(x_k^3+2x_k\right)\ -\ \left(\sum_{k=1}^{100}\sqrt{x_k^2+1}\right)^2\geq C$$

对任意 100 个两两不同的正整数 $x_1,x_2,\ldots,x_{100}$ 成立.

解. 记 $m=100$. 看到 $\left(\sum_{k=1}^m\sqrt{x_k^2+1}\right)^2$,想到柯西不等式与拉格朗日恒等式, 考虑把式子左边变形成为 $S+T$, 其中 $S=\left(\sum_{k=1}^m\frac{1}{x_k}\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^m x_k\right)$,

$$T=\sum_{k=1}^m\frac{1}{x_k}\cdot\sum_{k=1}^m x_k(x_k^2+1)-\left(\sum_{k=1}^m\sqrt{x_k^2+1}\right)^2=\sum_{1\leq i<j\leq m}\left[\sqrt{\frac{x_j(x_j^2+1)}{x_i}}-\sqrt{\frac{x_i(x_i^2+1)}{x_j}}\right]^2.$$

我们分别考虑 S,T 的取值下界, 易知 $S\geq m^2$,且当

$$\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}=\{N+1,N+2,\ldots,N+m\}$$

同时正整数 N 充分大时, S 的值充分接近 m^2.

我们对 T 的求和式中的每一项进行化简, 记 $x=x_i,y=x_j$ 不妨设 $y>x$,

$$A(y,x)=\sqrt{\frac{y(y^2+1)}{x}}-\sqrt{\frac{x(x^2+1)}{x}}=\frac{y\sqrt{y^2+1}-x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{xy}}$$

容易看出 $x\sqrt{x^2+1}$ 比较接近于 $x^2+\frac12$, 并且后者略大于前者:

$$g(x)=x^2+\frac12\ -\ x\sqrt{x^2+1}=\frac14\times\frac{1}{x^2+\frac12+x\sqrt{x^2+1}}<\frac{1}{8x^2}$$

显然 $g(x)$ 是减函数, 且当 x 较大时, $g(x)$ 取值很小,因此:

$$A(y,x)=\frac{[y^2+\frac{1}{2}-f(y)]-[x^2+\frac{1}{2}-f(x)]}{\sqrt{xy}}=\frac{y^2-x^2}{\sqrt{xy}}+\frac{g(x)-g(y)}{\sqrt{xy}}$$
$$>\frac{(y+x)(y-x)}{\sqrt{xy}}>2(y-x)$$
$$A(y,x)=\frac{y^2-x^2}{\sqrt{xy}}+\frac{g(x)-g(y)}{\sqrt{xy}}<2(y-x)\frac{y}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{8x^2\sqrt{xy}}$$

我们对 $x_1,x_2,\ldots,x_m$ 排序, 设 $x_1<x_2<\cdots<x_m$, 此时对 $j>i$ 有 $x_j-x_i\geq j-i$.

$$T=\sum_{1\leq i<j\leq m}[A(x_j,x_i)]^2>\sum_{1\leq i<j\leq m}4(x_j-x_i)^2$$
$$\geq\sum_{1\leq i<j\leq m}4(j-i)^2=2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(j-i)^2$$
$$=4m(\sum_{i=1}^{m}i^2)-4(\sum_{i=1}^{m}i)^2=\frac{4m^2(m+1)(2m+1)}{6}-m^2(m+1)^2$$
$$=\frac{m^4-m^2}{3}$$

我们有$T>\frac{1}{3}(m^4-m^2)$, 且当

$$(x_1,x_2,\ldots,x_m)=(N+1,N+2,\ldots,N+m)$$

同时正整数 N 充分大时, 由 $A(x_j,x_i)<2(j-i)\frac{N+m}{N}+\frac{1}{N^3}$ 可知此时

$$T=\sum_{1\leq i<j\leq m}[A(x_j,x_i)]^2<\frac{m^2}{N^3}+\frac{N+m}{N}\sum_{1\leq i<j\leq m}4(j-i)^2$$
$$=\frac{m^4-m^2}{3}+(\frac{m^4-m^2}{3}\times\frac{m}{N}+\frac{m^2}{N^3}).$$

可以充分接近其最小值 $\frac{1}{3}(m^4-m^2)$.

综上

$$S+T>m^2+\frac{1}{3}(m^4-m^2)=\frac{1}{3}m^2(m^2+2),$$

当

$$(x_1,x_2,\ldots,x_m)=(N+1,N+2,\ldots,N+m)$$

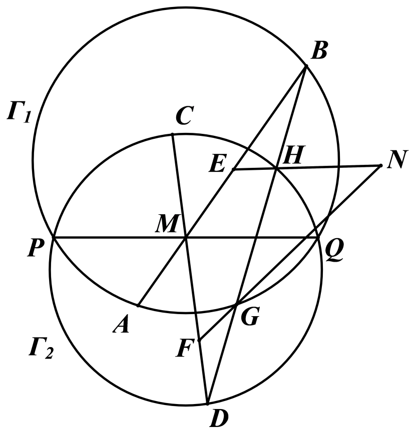
同时正整数 N 充分大时, $S+T$ 充分接近其最小值. 因此题目所求的结果为 $\frac{1}{3}m^2(m^2+2)=33340000$. □

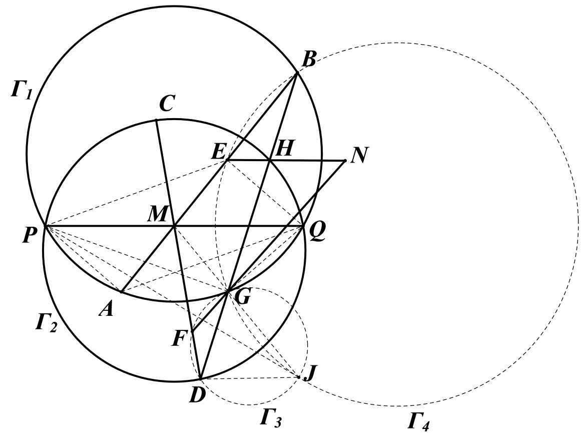
5. 圆 Γ_1 和圆 Γ_2 相交于 P,Q 两点, 圆 Γ_1 的弦 AB (异于 PQ) 与圆 Γ_2 的弦 CD (异于 PQ) 均经过 PQ 的中点 M. 线段 BD 与圆 Γ_1 交于点 G (异于B), 与圆 Γ_2 交于点 H (异于 D). 点 E,F 分别在线段 BM 与 DM 上, 满足

$EM = AM$, $FM = CM$．直线 EH与 FG 相交于点 N．求证：M, E, N, F 四点共圆．

证法一. 如图, 作 $\triangle DFG$ 的外接圆 $\mathit{\Gamma}_3$．设直线 MG 与圆 $\mathit{\Gamma}_3$ 交于 J (异于G), 则

$$MG \cdot MJ = MF \cdot MD = MC \cdot MD = MP \cdot MQ = MA \cdot MB = ME \cdot MB.$$





所以 B, E, G, J 四点共圆，记该圆为圆 $\mathit{\Gamma}_4$．

由 $AM = EM$ 及 $CM = FM$ 知四边形 $APEQ$ 是平行四边形，故 $\angle PAQ = \angle PEQ$ ．再由 $MG \cdot MJ = MP \cdot MQ = MP^2 = MQ^2$ 可得 $\triangle MPG \sim \triangle MJP$ 且 $\triangle MQG \sim \triangle MJQ$, 故

$$\begin{aligned} \angle PJQ &= \angle PJM + \angle QJM = \angle GPM + \angle GQM \\ &= \pi - \angle PGQ = \pi - \angle PAQ = \pi - \angle PEQ. \end{aligned}$$

故 E, P, Q, J 四点共圆．

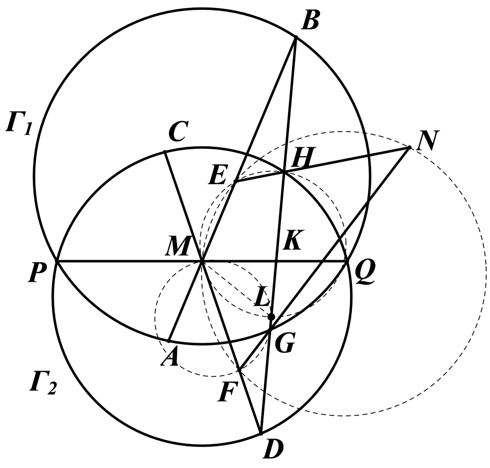
考虑三圆：$\mathit{\Gamma}_1, \mathit{\Gamma}_4$ 与 $\odot(EPJQ)$, 由根心定理可知 PQ, BG, EJ 三线交于一点, 记该点为 K．

由相交弦定理得 $EK \cdot JK = PK \cdot QK = DK \cdot HK$, 故 E, H, J, D 四点共圆, 故

$$\angle MFN = \angle MJD = \angle EJD - \angle EJM = \angle EHD - \angle EBG = \angle BEH.$$

故 M, E, N, F 四点共圆． □

证法二. 如图, 设直线 PQ,BD 相交于点 K．则 $EM \cdot BM = MP^2$ 且 $HK \cdot DK = PK \cdot QK$．由 M 是 PQ 的中点可得 $MP^2 - PK \cdot QK = MK^2$, 故



$$\begin{aligned}BE\cdot BM-BH\cdot DK=&(BM-EM)\cdot BM-(BK-HK)\cdot DK\\=&BM^2-(EM\cdot BM-HK\cdot DK)-BK\cdot DK\\=&BM^2-(MP^2-PK\cdot QK)-BK\cdot DK\\=&BM^2-MK^2-BK\cdot DK\\=&BK\cdot(BK-2MK\cdot\cos\angle BKM-DK)\end{aligned}$$

同理 $DF\cdot DM-DG\cdot BK=DK\cdot(DK-2MK\cdot\cos\angle DKM-BK)$, 所以

$$\frac{BE\cdot BM-BH\cdot DK}{DF\cdot DM-DG\cdot BK}=-\frac{BK}{DK}.$$

注意 $BK\cdot GK=PK\cdot QK=DK\cdot HK$, 故 $\dfrac{BK}{DK}=\dfrac{HK}{GK}=\dfrac{BH}{DG}$, 故

$$\frac{BE\cdot BM-BH\cdot DK}{DF\cdot DM-DG\cdot BK}=-\frac{BH}{DG}$$
$$\Rightarrow\frac{BE\cdot BM-BH\cdot DK}{BH}=-\frac{DF\cdot DM-DG\cdot BK}{DG}.$$

即 $\dfrac{BE\cdot BM}{BH}+\dfrac{DF\cdot DM}{DG}=BD.$

现于 BD 上取一点 L 使得 $BL=\frac{BE\cdot BM}{BH}$, 则 $DL=\frac{DF\cdot DM}{DG}$ ，而这意味 M,E,H,L 四点共圆, 且 M,F,G,L 四点共圆, 故 $\angle BEN-\angle MLB=\angle MFN$, 故$M,E,N,F$ 四点共圆. □

6. 是否存在正整数集的 100 个两两不交的子集 $A_1,A_2,\dots,A_{100}$ 满足：对任意无穷多个质数组成的集合 S, 存在正整数 m 以及

$$a_1\in A_1,\ a_2\in A_2,\dots,\ a_{100}\in A_{100}$$

使得 $a_1,a_2,\dots,a_{100}$ 都可以表示为 S 中的 m 个不同质数的乘积.

解. 存在, 下面给出一种构造方法. 记全体质数为 $p_1<p_2<p_3<\dots$, 对任

意正整数 m, 记所有无平方因子且恰有 m 个质因数的正整数构成集合 H_m.

考虑 $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$ 的构造, 即对所有无平方因子的数 $H=\bigcup_{m=1}^{\infty} H_m$ 进行 100 划分. 我们分别对每个 H_m 考虑划分, 对 $a=p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_m}\in H_m$, 我们考虑让 a 的分类结果 $F(a)$ 只取决于 a 的最小素因子 p_{i_1} 的情况. 这样我们只需对每个正整数 m, 给出一个素数集 $P=\{p_1,p_2,p_3,\ldots\}$ 的分类函数(分类方案) $f_m: P\mapsto\{1,2,\ldots,100\}$, 即可诱导出 H_m 的分类方案：

$$F(a)=f_m(p_{i_1})\in\{1,2,\ldots,100\},\ \ a=p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_m}\in H_m,\ \ i_1<i_2<\cdots<i_m.$$

设计 P 的分类方案 f_m 时, 我们考虑简单的按照大小分段的方式, 即设定好 99 个分点(写成有序数组的形式) $\beta=(x_1,x_2,\ldots,x_{99})$, (默认 $x_0=0, x_{100}=+\infty$, 且递增排列 $0<x_1<x_2<\cdots<x_{99}<+\infty$) , 我们把满足 $x_{k-1}<p\le x_k$ 的质数 p 归为第 k 类, $k=1,2,\ldots,100$, 即定义

$$f_m(p)=\min\{k=1,2,\ldots,100: x_k\ge p\}, \forall p\in P.$$

我们为每个 m 选择分点数组 β_m, 并得到相应的分类函数 f_m. 要求对于任意无穷素数集 S, 都存在某个 m 使得 $\{f_m(p): p\in S\}$ 的取值遍历 $\{1,2,\ldots,100\}$.

一个自然的想法是选择互不相同的, 尽可能多的 β_m, 或者尝试考虑所有可能的分点数组 $\beta=(x_1,x_2,\ldots,x_{99})$, 事实上这些分点 x_k 都可以取成质数, 因此我们考虑质数集 P 的所有 99 元子集(记作数组的形式)构成的集合:

$$C=\{\beta=(p_{l_1},p_{l_2},\ldots,p_{l_{99}})\mid l_1<l_2<\cdots<l_{99}\in Z_+\}$$

幸运的是集合 C 是可数集, 即可以把 C 的所有元素排成一排(例如按照元素和从小到大排序, 固定 99 个元素之和后, 99 元子集的选择只有有限个), 并依次被命名为 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\ldots$. 接下来对每个 m, 我们根据分点数组 $\beta_m=(x_{m,1},x_{m,2},\ldots,x_{m,99})$ (默认 $x_{m,0}=0, x_{m,100}=+\infty$) , 给出素数集 P 的分类方案 f_m, 然后由 f_m 诱导出 H_m 的分类方案以及最终的 $H=\bigcup_{m=1}^{\infty} H_m$ 的分类方案. 即对 $k=1,2,\ldots,100$, 定义：

$$A_k=\bigcup_{m=1}^{\infty}\{a=p_{i_1}p_{i_2}\ldots p_{i_m}\in H_m\ : x_{m,k-1}<p_{i_1}\le x_{m,k},\ p_{i_1}<p_{i_2}<\cdots<p_{i_m}\}.$$

这个方案满足题意. 对素数集 P 的无穷子集 $S=\{q_1,q_2,q_3\ldots\}$ (元素从小到大排列), 考虑其中最小的 99 个素数构成的数组 $(q_1,q_2,\ldots,q_{99})$, 它是集合 C 的元素, 因此存在某个正整数 m ,使得 $\beta_m=(q_1,q_2,\ldots,q_{99})$. 这时对 $k=1,2,\ldots,100$, 我们有 $f_m(q_k)=k$, 即分类方案 f_m 将素数 q_k 被分在第 k 类,

同时我们取

$$a_k = q_k q_{(k+1)} q_{(k+2)} \cdots q_{(k+m-1)} \in H_m$$

是 S 中的 m 个不同素数的乘积, 满足 a_k 的最小质因数为 q_k , 因而被分在第 k 类, 即 $a_k \in A_k, (k = 1, 2, \ldots, 100)$ 满足题意. □