数学新星网 ※ 学生专栏
www.nsmath.cn/xszl

2020 年 USAMO 试题解答与评析

王一川

(华东师范大学第二附属中学, 201203)

指导教师: 唐立华

2020 年 USAMO 于 6 月 19, 20 日 13 : 30 – 18 : 00 在线上进行. 个人认为其中 1, 2, 4, 5 是简单题, 3, 6 较难, 没有超级难题, 其中 3, 6 均存在很简单 (巧妙) 的做法, 但一般在考场上想到的解法都比较复杂. 本文给出 2020 年 USAMO 试题的解答. 囿于水平, 不当之处在所难免, 敬请读者不吝赐教.

I. 试 题

1. 给定锐角 $\triangle ABC, \omega$ 是其外接圆, O 是 ω 的圆心, X 是 ω 中劣弧 AB 上的一个动点, D 是线段 CX 与 AB 的交点, O_1, O_2 分别是 $\triangle ADX, \triangle BDX$ 的外心. 求所有的点 X, 使 $\triangle OO_1O_2$ 的面积取到最小值.

2. 给定一个空心的 $2020 \times 2020 \times 2020$ 的大立方体, 在大立方体的 6 个面上各画一个 2020×2020 的方格表. 称"棒"是一个 $1 \times 1 \times 2020$ 的长方体, 在大立方体内放置若干 (> 0) 个棒, 满足下列条件:

(1) 每个棒中, 两个 1×1 的面分别是大立方体中两个相对的面上的小方格 (这样的棒一共有 $3 \cdot 2020^2$ 种可能的位置);

(2) 所有棒的内部区域 (不含面) 两两不相交;

(3) 每个棒中, 4个 1×2020 的面 (不含棱) 均碰到大立方体的面或另一个棒的面 (不含棱).

求棒的个数的最小可能值.

3. 给定奇素数 p. 称一个整数 x 是"非平方剩余", 如果对任意整数 t, p 不整除 $x - t^2$. A 是所有满足 $1 \le a < p$ 且 $a, 4 - a$ 均是非平方剩余的整数 a 组成的集合, 求 A 中所有元素的乘积模 p 的余数.

修订日期: **2020-08-18.**

4. 设 $(a_1,\ b_1), (a_2,\ b_2), \cdots, (a_{100},\ b_{100})$ 是两两不同的有序非负整数对, N 是满足 $1 \le i < j \le 100$ 且 $|a_ib_j - a_jb_i| = 1$ 的整数对 $(i,\ j)$ 的个数. 求 N 的最大可能值.

5. 在平面直角坐标系 xOy 中, 称一个有限点集 S 是"超定的", 如果 $|S| \ge 2$ 且存在一个次数不超过 $|S|-2$ 的非零实系数多项式 $P(t)$, 满足对 S 中的每个点 $(x,\ y)$, 均有 $P(x) = y$.

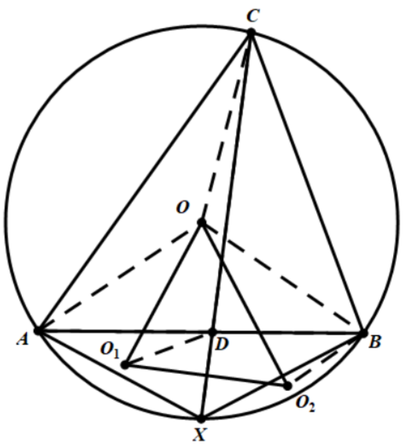
给定整数 $n \ge 2$, 求最大整数 $k = k(n)$, 使得存在一个 n 元点集不是超定的, 且这个点集有 k 个超定的子集.

6. 设 $n \ge 2$ 是一个整数, $x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n$, $y_1 \ge y_2 \ge \cdots \ge y_n$ 是 $2n$ 个实数, 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i = 0$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 = 1$. 证明:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_iy_i - x_iy_{n+1-i}) \ge \frac{2}{\sqrt{n-1}}.$$

II. 解答与评注

1. 给定锐角 $\triangle ABC$, ω 是其外接圆, O 是 ω 的圆心, X 是 ω 中劣弧 AB 上的一个动点, D 是线段 CX 与 AB 的交点, O_1, O_2 分别是 $\triangle ADX$, $\triangle BDX$ 的外心. 求所有的点 X, 使 $\triangle OO_1O_2$ 的面积取到最小值.



解 考虑 $\triangle ABC$, $\triangle AXD$, 其中 O, O_1 分别是外心. 由 A, B, C, X 共圆知 $\angle ABC = \angle AXD$, 进而 $\angle AO_1D = \angle AOC$, 故 $\triangle AO_1D \sim \triangle AOC$. 于是

$$AO \cdot AD = AO_1 \cdot AC$$

且

$$\angle OAO_1 = \angle DAO_1 + \angle OAD = \angle CAO + \angle OAD = \angle CAD.$$

故

$$\triangle OAO_1 \sim \triangle CAD. \tag{①}$$

同理可知

$$\triangle OBO_2 \sim \triangle CBD. \tag{②}$$

结合①②知:

$$OO_1 = CD \cdot \frac{AO}{AC},\ OO_2 = CD \cdot \frac{BO}{BC} \tag{③}$$

且

$$\begin{aligned}\angle O_1OO_2 &= \angle AOB - \angle AOO_1 - \angle BOO_2\\ &= 2\angle ACB - \angle ACD - \angle BCD\\ &= \angle ACB.\end{aligned} \tag{④}$$

结合③④知:

$$\begin{aligned}S_{\triangle OO_1O_2} &= \frac{1}{2} \cdot OO_1 \cdot OO_2 \cdot \sin\angle O_1OO_2\\ &= \frac{1}{2} \cdot CD^2 \cdot \frac{AO}{AC} \cdot \frac{BO}{BC} \cdot \sin\angle ACB.\end{aligned}$$

显然 A, B, C, O 均为定点, 故 $\frac{AO}{AC} \cdot \frac{BO}{BC} \cdot \sin\angle ACB$ 是定值. 从而 $S_{\triangle OO_1O_2}$ 最小等价于 CD^2 最小, 而 CD^2 在 $CD \perp AB$ 时取到最小值. 相应地, 原题所求 X 即为使 $CX \perp AB$ 的点. □

评注 注意到 $\triangle OO_1O_2$ 各边长及角度均可以看得很清楚, 本题是送分题.

2. 给定一个空心的 $2020 \times 2020 \times 2020$ 的大立方体, 在大立方体的 6 个面上各画一个 2020×2020 的方格表. 称“棒”是一个 $1 \times 1 \times 2020$ 的长方体, 在大立方体内放置若干 (> 0) 个棒, 满足下列条件:

(1) 每个棒中, 两个 1×1 的面分别是大立方体中两个相对的面上的小方格 (这样的棒一共有 $3 \cdot 2020^2$ 种可能的位置);

(2) 所有棒的内部区域 (不含面) 两两不相交;

(3) 每个棒中, 4个 1×2020 的面 (不含棱) 均碰到大立方体的面或另一个棒的面 (不含棱).

求棒的个数的最小可能值.

解 (1) 约定一些记号:

将 $2020 \times 2020 \times 2020$ 的立方体看做一个 $2020 \times 2020 \times 2020$ 的立体表格, 则“棒”即为 $1 \times 1 \times 2020$ 的子表格(可旋转).

我们用有序三元组 $(x,\ y,\ z)$ $(1 \le x,\ y,\ z \le 2020)$ 标记表格中的每一个小立方体, 其中 $(x,\ y,\ z)$ 表示高度为 z 的一层中第 x 行第 y 列的小立方体.

用三元组 $(x,\ y,\ \#)$ 表示包含小立方体

$$(x,\ y,\ 1),\ (x,\ y,\ 2),\ \cdots,\ (x,\ y,\ 2020)$$

的棒, 类似定义 $(x,\ \#,\ z)$, $(\#,\ y,\ z)$.

我们称"截面"指一个 $1 \times 2020 \times 2020$ 的子表格(可旋转), 显然"截面"有 $3 \cdot 2020$ 个. 用三元组 $(x,\ \#,\ \#)$ 或者 $(\#,\ y,\ \#)$ 或者 $(\#,\ \#,\ z)$ $(1 \le x,\ y,\ z \le 2020)$ 来标记一个截面, 其中" $\#$ "是一个符号, $(x,\ \#,\ \#)$ 表示由小立方体

$$(x,\ i,\ j)\ (1 \le i,\ j \le 2020)$$

组成的截面, 类似定义 $(\#,\ y,\ \#)$, $(\#,\ \#,\ z)$.

记原题中的 3 个条件依次为 ①, ②, ③.

(2) 回到原题, 结论是: "棒"个数最小值为 3030. 先给出构造: 取出 3030 个棒: $(2k-1,\ 2k,\ \#)$, $(2k,\ \#,\ 2k-1)$, $(\#,\ 2k-1,\ 2k)$ $(1 \le k \le 1010)$.

验证构造: 显然棒 $(2k-1,\ 2k,\ \#)\,(1 \le k \le 1010)$ 两两不相交, 且对 $1 \le k,\ k' \le 1010$, 棒 $(2k-1,\ 2k,\ \#)$, $(2k',\ \#,\ 2k'-1)$ 不交(考虑第一个分量即可). 类似地, 可知 3030 个棒两两不相交, 符合条件 ②.

对 $1 \le k \le 1010$, 棒 $(2k-1,\ 2k,\ \#)$ 四个面分别碰到棒

$$(2k-2,\ \#,\ 2k-3)\,,\ (2k,\ \#,\ 2k-1)\,,\ (\#,\ 2k+1,\ 2k+2)\,,\ (\#,\ 2k-1,\ 2k)\,.$$

其中, 约定 $(0,\ \#,\ -1)$, $(\#,\ 2021,\ 2022)$ 等表示表格边界. 类似地, 可知 3030 个棒均符合条件 ③.

条件 ①显然满足, 故 3030 个"棒"可以达到.

(3) 再给出证明: 即证至少需要 3030 个"棒".

任取一个棒, 不妨设为 $(x_0,\ y_0,\ \#)$ (否则适当旋转表格). 考虑 $(x_0,\ y_0,\ \#)$ 的与截面 $(x_0+1,\ \#,\ \#)$ 接触的面, 同样约定 $(0,\ \#,\ \#)$, $(2021,\ \#,\ \#)$ 等表示表格边界.

由 ③ 知截面 $(x_0+1,\ \#,\ \#)$ 中至少包含一个棒. 同理, 截面 $(x_0-1,\ \#,\ \#)$, $(\#,\ y_0-1,\ \#)$, $(\#,\ y_0+1,\ \#)$ 中也都至少包含一个棒.

由上述过程可知: 若截面 $(t,\ \#,\ \#)$, $(1 \le t \le 2020)$ 至少包含一个棒, 则截面 $(t-1,\ \#,\ \#)$, $(t+1,\ \#,\ \#)$ 均至少包含一个棒. $(*)$

从 $(x_0,\ y_0,\ \#)$ 开始, 不断应用 $(*)$ 可知: 截面 $(1,\ \#,\ \#)$, $(2,\ \#,\ \#)$, $\cdots$, $(2020,\ \#,\ \#)$, $(\#,\ 1,\ \#)$, $(\#,\ 2,\ \#)$, $\cdots$, $(\#,\ 2020,\ \#)$ 中均至少包含一个棒.

以下分两种情形:

情形 1: 存在形如 $(x,\ \#,\ z)$ 或 $(\#,\ y,\ z)$ 的棒.

由 $(*)$ 知所有 $3\cdot 2020$ 个截面中均至少包含一个棒, 而另一方面, 显然每个棒恰包含在两个截面中, 故棒的个数 $\geq \frac{3\times 2020}{2}=3030$.

情形 2: 不存在形如 $(x,\ \#,\ z)$ 或 $(\#,\ y,\ z)$ 的棒.

此时对 $1\leq s,\ t\leq 2020$, 若存在棒 $(s,\ t,\ \#)$, 则由条件③知存在棒

$$(s-1,\ t,\ \#),\ (s+1,\ t,\ \#),\ (s,\ t-1,\ \#),\ (s,\ t+1,\ \#). \qquad (**)$$

从 $(x_0,\ y_0,\ \#)$ 开始, 反复利用 $(**)$ 知: 所有形如 $(x,\ y,\ \#)$ $(1\leq x,\ y\leq 2020)$ 的棒均存在, 一共至少 $2020^2>3030$ 个棒.

综上, 总有至少 3030 个棒, 故“棒”个数最小值为 3030. □

评注 本题是一个立方体表格问题, 本题的关键是需要理解清楚原题条件(3)到底是什么, 之后的证明就不难了, 本题的构造从几何直观上不太好理解, 但从纯代数的角度反而更好理解.

3. 给定奇素数 p. 称一个整数 x 是“非平方剩余”, 如果对任意整数 t, p 不整除 $x-t^2$. A 是所有满足 $1\leq a<p$ 且 $a, 4-a$ 均是非平方剩余的整数 a 组成的集合, 求 A 中所有元素的乘积模 p 的余数.

解 (1) 取 p 的原根 g. 设 X^+ 是 $1,\ 2,\ \cdots,\ p-1$ 中所有模 p 的平方剩余组成的集合, X^- 是 $1,\ 2,\ \cdots,\ p-1$ 中所有模 p 的非平方剩余组成的集合.

考虑如下 4 个同余方程组 (关于 $x,\ y$)

$$\Omega_1:\begin{cases}x+y\equiv 4 \pmod p\\ (x,\ y)\in X^-\times X^-\end{cases},\qquad \Omega_2:\begin{cases}x+y\equiv 4 \pmod p\\ (x,\ y)\in X^+\times X^-\end{cases},$$

$$\Omega_3:\begin{cases}gx^2+gy^2\equiv 4 \pmod p\\ x,\ y\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ p-1\}\end{cases},\quad \Omega_4:\begin{cases}x^2+gy^2\equiv 4 \pmod p\\ x,\ y\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ p-1\}\end{cases}.$$

显然, 由 Ω_3 的所有解 $(x,\ y)$ 得到的不同的 $(gx^2,\ gy^2)$ 即为 Ω_1 的所有不同解, 由 Ω_4 的所有解 $(x,\ y)$ 得到的不同的 $(x^2,\ gy^2)$ 即为 Ω_2 的所有不同解.

对 $i=1,\ 2$, 记 S_i 为 Ω_i 的所有不同解中 y 的乘积. 显然 $S_1S_2=\prod\limits_{j\in X^-} j$, 且原题所求即为 S_1 模 p 的余数. 其中

$$S_1S_2=\prod_{j\in X^-} j\equiv\prod_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} g^{2j-1}\equiv g^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \pmod p. \qquad ①$$

(2) 以下计算 S_2 : 设 Ω_4 的所有解中, y 的所有不同值为 $y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_m$. 显然 $0\notin\{y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_m\}$, 且

$$\{-y_1,\ -y_2,\ \cdots,\ -y_m\}=\{y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_m\}\,(\text{mod}\ p\ \text{意义}).$$

故 $2\mid m$, 且可设

$$\{y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_m\}=\left\{z_1,\ -z_1,\ z_2,\ -z_2\cdots\ z_{\frac{m}{2}},\ -z_{\frac{m}{2}}\right\}\ (\text{mod}\ p\ \text{意义}),$$

则

$$S_2\equiv\prod_{j=1}^{\frac{m}{2}}gz_j^2\equiv\prod_{j=1}^{\frac{m}{2}}-g\cdot z_j\cdot(-z_j)\equiv(-g)^{\frac{m}{2}}\cdot y_1y_2\cdots y_m\pmod p. \qquad ②$$

(3) 以下求 m 及 $y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_m$. 注意到, Ω_4 可写为

$$\begin{cases}(xy^{-1})^2+g\equiv(2y^{-1})^2\pmod p\\ x,\ y\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ p-1\}\end{cases}.$$

其中, 用 α^{-1} 表示 α (p 不整除 α)模 p 的逆元. 且

$$\left(xy^{-1}\right)^2+g\equiv\left(2y^{-1}\right)^2\pmod p\Leftrightarrow\left(2y^{-1}+xy^{-1}\right)\left(2y^{-1}-xy^{-1}\right)\equiv g\pmod p.$$

为求出 y 的所有不同可能值, 只需要考虑

$$2y^{-1}+xy^{-1}\equiv g^k\pmod p,\ 2y^{-1}-xy^{-1}\equiv g^{p-k}\pmod p \qquad ③$$

的情形, 其中 $1\le k\le\frac{p-1}{2}$. 由 p 不整除 $2y^{-1},\ xy^{-1}$ 知

$$g^k\neq\pm g^{p-k}\pmod p,$$

即 $k\neq\frac{p+1}{4}$.

(4) 分 p 模 4 余数讨论:

情形 1 $\quad p\equiv1\ (\text{mod}\ 4)$. 此时 $m=\frac{p-1}{2}$ (因为 $\frac{p+1}{4}\notin\mathbb{Z}$), 且

$$\begin{aligned}y_1y_2\cdots y_m&\equiv\left(y_1^{-1}y_2^{-1}\cdots y_m^{-1}\right)^{-1}\\&\equiv\left(\prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(\left(g^k+g^{p-k}\right)\cdot4^{-1}\right)\right)^{-1}\ (\text{由③})\\&\equiv4^{\frac{p-1}{2}}\cdot\prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}(g^k+g^{p-k})^{-1}\\&\equiv4^{\frac{p-1}{2}}\cdot\Big(\prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(g^{2k-1}+1\right)^{-1}\Big)\cdot\Big(\prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}g^{k-1}\Big)\\&\equiv\Big(\prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(g^{2k-1}+1\right)^{-1}\Big)\cdot g^{\frac12\cdot\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p-3}{2}}\pmod p.\end{aligned} \qquad ④$$

其中由费马小定理, 有

$$4^{\frac{p-1}{2}}=2^{p-1}\equiv 1 \pmod p.$$

而 $g^{2k-1}+1\left(1\le k\le \frac{p-1}{2}\right)$ 恰为关于 x 的多项式 $(x-1)^{\frac{p-1}{2}}+1$ 模 p 意义下的所有不同根, 由韦达定理知乘积为 2 . 故由④知

$$y_1y_2\cdots y_m\equiv 2^{-1}\cdot g^{\frac{1}{2}\cdot\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p-3}{2}} \pmod p.$$

再代入②知

$$S_2\equiv(-g)^{\frac{p-1}{4}}\cdot 2^{-1}\cdot g^{\frac{1}{2}\cdot\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p-3}{2}} \pmod p.$$

再代入①知

$$\begin{aligned}
S_1&\equiv S_1S_2\cdot S_2^{-1}\\
&\equiv 2\cdot(-1)^{\frac{p-1}{4}}\cdot g^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2-\frac{p-1}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p-3}{2}}\\
&\equiv 2\cdot g^{\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)^2-\frac{p-1}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p-1}{2}\cdot\ \frac{p-3}{2}\right)\right)+\frac{p-1}{4}\cdot\frac{p-1}{2}}\\
&\equiv 2\cdot g^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}\equiv 2 \pmod p.
\end{aligned}$$

其中最后一步是由于

$$\left(\frac{p-1}{2}\right)^2=(p-1)\cdot\frac{p-1}{4}\equiv p-1 \pmod{p-1}.$$

情形 2 $p\equiv -1 \pmod 4$. 此时 $\frac{p+1}{4}\in\mathbb{Z}$, 故 $m=\frac{p-3}{2}$ 且

$$\begin{aligned}
y_1y_2\cdots y_m&\equiv\left(\prod_{\substack{1\le k\le\frac{p-1}{2}\\ k\ne\frac{p+1}{4}}}\left(\left(g^k+g^{p-k}\right)\cdot 4^{-1}\right)\right)^{-1}\\
&\equiv 4^{\frac{p-3}{2}}\cdot\left(\prod_{\substack{1\le k\le\frac{p-1}{2}\\ k\ne\frac{p+1}{4}}}\left(g^{2k-1}+1\right)^{-1}\right)\cdot\left(\prod_{\substack{1\le k\le\frac{p-1}{2}\\ k\ne\frac{p+1}{4}}}g^{k-1}\right)\\
&\equiv 4^{\frac{p-3}{2}}\cdot\left(\prod_{\substack{1\le k\le\frac{p-1}{2}\\ k\ne\frac{p+1}{4}}}\left(g^{2k-1}+1\right)^{-1}\right)\cdot g^{\frac{1}{2}\cdot\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p-3}{2}-\frac{p-3}{4}} \pmod p. \qquad ⑤
\end{aligned}$$

其中 $g^{2k-1}+1\left(1\le k\le\frac{p-1}{2},\ k\ne\frac{p+1}{4}\right)$ 恰为关于 x 的多项式 $\frac{(x-1)^{\frac{p-1}{2}}+1}{x}$ 的所有不同根, 由韦达定理知乘积为 $\frac{p-1}{2}$. 代入⑤知

$$\begin{aligned}
y_1y_2\cdots y_m&\equiv 4^{\frac{p-3}{2}}\cdot\left(\frac{p-1}{2}\right)^{-1}\cdot g^{\frac{1}{2}\cdot\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p-3}{2}-\frac{p-3}{4}}\\
&\equiv 2^{p-3}\cdot(-2)\cdot g^{\frac{1}{2}\cdot\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p-3}{2}-\frac{p-3}{4}}\\
&\equiv 2^{-1}\cdot(-1)\cdot g^{\frac{1}{2}\cdot\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p-3}{2}-\frac{p-3}{4}} \pmod p.
\end{aligned}$$

上式同样用到费马小定理, 代入②有

$$\begin{aligned}S_2&\equiv(-g)^{\frac{p-3}{4}}\cdot 2^{-1}\cdot(-1)\cdot g^{\frac{1}{2}\cdot\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p-3}{2}-\frac{p-3}{4}}\\&\equiv 2^{-1}\cdot(-1)^{\frac{p+1}{4}}\cdot g^{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p-3}{2}-\frac{p-3}{4}\right)+\frac{p-3}{4}}\\&\equiv 2^{-1}\cdot(-1)^{\frac{p+1}{4}}\cdot g^{\frac{1}{2}\cdot\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p-3}{2}}\pmod p.\end{aligned}$$

再代入①有

$$\begin{aligned}S_1&\equiv S_1S_2\cdot S_2^{-1}\\&\equiv g^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p-3}{2}}\cdot(-1)^{\frac{p+1}{4}}\cdot 2\\&\equiv g^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p-3}{2}+\frac{p+1}{4}\cdot\frac{p-1}{2}}\cdot 2\\&\equiv g^{\frac{p^2-1}{4}}\cdot 2\\&\equiv g^{(p-1)\cdot\frac{p+1}{4}}\cdot 2\equiv 2\pmod p.\end{aligned}$$

综上, 两种情形中, 均有所求 $S_1\equiv 2\pmod p$. □

评注 一个经典的问题是: 求 $|A|$ 的值 (该经典问题的解法中, 关键部分的配平方差, 即原题解答中式③的那一步), 利用这个方法容易将原题所求乘积化为计算 $\prod\limits_{1\le k\le\frac{p-1}{2},k\ne\frac{p+1}{4}}\left(g^k+g^{p-k}\right)$. 在处理这个乘积的时候, 我们类比了处理复数单位根问题中的手法: 复数中的经典问题是求表达式 $\sin 1^\circ\cdot\sin 2^\circ\cdot\cdots\cdot\sin 89^\circ$ 的值, 解法是化为单位根, 并构造多项式, 应用韦达定理(复数单位根与素数原根有很多相似之处).

本题还有另一个巧妙的解法: 记

$$V^+=\{x\mid x,\ 4-x\in X^+\pmod p\}$$
$$V^-=\{x\mid x,\ 4-x\in X^-\pmod p\}$$

其中, X^+, X^- 与原解答中定义相同. 则

$$\begin{aligned}\prod_{x\in V^+}x=\prod_{x\in V^+}(4-x)&=\prod_{\substack{4-x^2\in X^+\\x\ne0,\,2\\1\le x\le\frac{p-1}{2}}}(4-x^2)\\&=\prod_{\substack{4-x^2\in X^+\\x\ne0,\,2\\1\le x\le\frac{p-1}{2}}}(2+x)(2-x)=\prod_{\substack{4-x^2\in X^+\\x\ne2,\,-2\pmod p\\1\le x\le p-1}}(2+x)\\&=\prod_{\substack{x(4-x)\in X^+\\x\ne0,\,4\pmod p\\3\le x\le p+1}}x=\prod_{\substack{x\in V^+\cup V^-\\x\ne0,\,2,\,4\pmod p\\1\le x\le p-1}}x\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \prod_{x \in V^+} x \cdot \prod_{x \in V^-} x$$

故有

$$\prod_{x \in V^-} x \equiv 2 \pmod{p}.$$

4. 设 $(a_1,\ b_1), (a_2,\ b_2), \cdots, (a_{100},\ b_{100})$ 是两两不同的有序非负整数对, N 是满足 $1 \le i < j \le 100$ 且 $|a_i b_j - a_j b_i| = 1$ 的整数对 $(i,\ j)$ 的个数. 求 N 的最大可能值.

解 结论: N 最大值为 197.

(1) 先给出构造: 令

$$(a_i,\ b_i) = (i-1,\ i)\,(1 \le i \le 99)\,,\ (a_{100},\ b_{100}) = (1,\ 1)\,.$$

此时对 $1 \le i \le 98$, 有

$$|a_i b_{i+1} - a_{i+1} b_i| = \left|(i-1)(i+1) - i^2\right| = 1.$$

对 $1 \le i \le 99$, 有

$$|a_i b_{100} - a_{100} b_i| = |(i-1) - i| = 1.$$

故 $N \ge 98 + 99 = 197$, 得到了一个使 $N \ge 197$ 的构造.

(2) 再证明总有 $N \le 197$.

不妨设对 $i = 1, 2, \cdots, 100$, a_i, b_i 全为 0 或全不为 0, 否则用 $(a_i + b_i,\ a_i + 2b_i)$ 替换 $(a_i,\ b_i)\,(1 \le i \le 100)$. 此时对 $1 \le i \le j \le 100$,

$$(a_i + b_i)(a_j + 2b_j) - (a_j + b_j)(a_i + 2b_i) = a_i b_j - a_j b_i,$$

结论不变. 显然此时 $(a_i + b_i,\ a_i + 2b_i)$ 仍两两不同.

不妨设 $b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_{100}$, 否则重新排列. 称符合原题条件的 $(i,\ j)$ 为“好对”.

下证对取定的 $j \in \{3, 4, \cdots 100\}$, 至多存在 2 个 i 使 (i, j) 是“好对”. ①

用反证法, 假设①不成立, 即存在正整数 $i_1,\ i_2,\ i_3,\ j$, 其中 $i_1,\ i_2,\ i_3$ 是区间 $[1,\ j)$ 中的不同正整数, 且 $(i_1,\ j)$, $(i_2,\ j)$, $(i_3,\ j)$ 均是好对, 即对 $k = 1,\ 2,\ 3$, 有

$$a_{i_k} b_j - a_j b_{i_k} \in \{-1,\ \ 1\},$$

由抽屉原理, 存在 $1 \le u < v \le 3$, 使得

$$a_{i_u} b_j - a_j b_{i_u} = a_{i_v} b_j - a_j b_{i_v} \in \{-1,\ 1\}\,.$$

不妨设 $u=1,\ v=2$. 显然, 最大公约数

$$(a_j,\ b_j)=(b_{i_1},\ b_j)=(b_{i_2},\ b_j)=1, \tag{②}$$

且

$$a_{i_1}b_j-a_jb_{i_1}=a_{i_2}b_j-a_jb_{i_2}\Rightarrow b_j\left(a_{i_1}-a_{i_2}\right)=a_j\left(b_{i_1}-b_{i_2}\right). \tag{③}$$

由于 $(a_j,\ b_j)=1$, 故由③知可设

$$a_{i_1}-a_{i_2}=ha_j,\ b_{i_1}-b_{i_2}=hb_j,\quad (h\in\mathbb{Z}),$$

且由数对 $(a_{i_1},\ b_{i_1})\neq(a_{i_2},\ b_{i_2})$ 知 $h\neq 0$ 且 $a_j,\ b_j$ 不全为 0. 由 $h\neq 0$ 知

$$\left|b_{i_1}-b_{i_2}\right|=\left|hb_j\right|\geq\left|b_j\right|,$$

而由 $i_1,\ i_2\in[1,\ j)$ 知 $b_{i_1},\ b_{i_2}\in[0,\ b_j]$, 故只能 $\{b_{i_1},\ b_{i_2}\}=\{0,\ b_j\}$. 特别地, 若 $b_j=0$, 则 $b_{i_1}=b_{i_2}=0$. 再结合②即知最大公约数

$$(0,\ b_j)=(b_j,\ b_j)=1,$$

只能 $b_j=1$. 进而不妨设 $b_{i_1}=0,\ b_{i_2}=1$. 由“不妨设对 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ 100,\ a_i,\ b_i$ 全为 0 或全不为 0”知: $a_{i_1}=0$. 于是

$$a_{i_1}b_j-a_jb_{i_1}=0\notin\{-1,\ 1\},$$

矛盾!故反证不成立, 结论①得证!

显然 $j=2$ 时至多存在 1 个 i 使 $(i,\ j)$ 是“好对”, 结合①即知:

$$N\leq 1+2\cdot 98=197.$$

综上, 所求 N 最大值为 197. □

评注 本题的构造可通过下列经典问题想到:

设 $a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{Z}^+$, 若

$$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=1,$$

则

$$\frac{a}{c}>\frac{a+b}{c+d}>\frac{b}{d},$$

且

$$\begin{vmatrix}a & a+b\\ c & c+d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+b & b\\ c+d & d\end{vmatrix}=1$$

证明部分也不难.

5. 在平面直角坐标系 xOy 中, 称一个有限点集 S 是"超定的", 如果 $|S|\ge 2$ 且存在一个次数不超过 $|S|-2$ 的非零实系数多项式 $P(t)$, 满足对 S 中的每个点 $(x,\ y)$, 均有 $P(x)=y$.

给定整数 $n\ge 2$, 求最大整数 $k=k(n)$, 使得存在一个 n 元点集不是超定的, 且这个点集有 k 个超定的子集.

解 结论是: k 最大值为 $2^{n-1}-n$. 设 n 元点集为 T.

(1) 先给出构造: 令 $T=T'\cup\{(0,0)\}$, 其中 $T'=\{(i,1)\mid i=0,1,\cdots,n-2\}$.

一方面, 由于对任意多项式 P, $P(0)=0$ 与 $P(0)=1$ 不同时成立, 显然 T 不是"超定的". 另一方面, 令 $P(t)=1$ 即得 T' 的任意 ≥ 2 元子集均是"超定的". 故

$$k\ge\sum_{j=2}^{n-1}\binom{n-1}{j}=\left(\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\right)-\binom{n-1}{1}-\binom{n-1}{0}=2^{n-1}-n.$$

其中, 约定 $\sum\limits_{j=2}^{1}$ 表示空求和. 从而 $k\ge 2^{n-1}-n$ 可以取到.

(2) 证明总有 $k\le 2^{n-1}-n$).

设 T 的所有"超定的"子集组成集族 F. 记 $F_2,F_3,\cdots,F_n$ 分别是 F 中 $2,3,\cdots,n$ 元集合组成的集族. 显然

$$|F|=|F_2|+|F_3|+\cdots+|F_n|,$$

且 $|F_n|=0$.

我们证明一个引理

引理 对 $I\subseteq T$, 及 $\beta,\ \beta'\in T\setminus I\ (I\ne\varnothing,\ \beta\ne\beta')$. 若

$$I\cup\{\beta\},\ I\cup\{\beta'\}\in F,$$

则

$$I\cup\{\beta,\ \beta'\}\in F.$$

证明 由 F 的定义知, 存在实系数多项式 $P,\ Q$, 满足

$$\deg P,\ \deg Q\le |I|-1,$$

且对任意 $(x,\ y)\in I\cup\{\beta\}$, 有 $P(x)=y$. 对任意 $(x,\ y)\in I\cup\{\beta'\}$, 有 $Q(x)=y$. 于是对任意 $(x,\ y)\in I$, 有 $P(x)=Q(x)=y$. 显然 I 中点的横坐标两两不同, 否则 $P,\ Q$ 不存在. 故结合 $\deg P,\ \deg Q\le |I|-1$ 及拉格朗日插值公式知: 只能 $P=Q$. 进而对任意 $(x,\ y)\in I\cup\{\beta,\ \beta'\}$, 有 $P(x)=y$, 故 $I\cup\{\beta,\ \beta'\}\in F$, 引理得证!

回到原题, 对 $i=n,\ n-1,\ \cdots 2$, 归纳证明:

$$|F_i| \le \binom{n-1}{i}. \tag{①}$$

$i=n$ 时, 由于 T 不是"超定的", 故

$$|F_n| = 0 = \binom{n-1}{n},$$

①成立.

$i\in[2,\ n-1]$ 时, 假设①在 i 更大时均成立, 则 $|F_{i+1}| \le \binom{n-1}{i+1}$. 记 $\begin{pmatrix} T \\ i+1 \end{pmatrix}$ 表示 T 的所有 $(i+1)$ 元子集组成的集族. 构造一个二部图 $G=(V_1,\ V_2,\ E)$, 其中

$$V_1 = F_i,\ V_2 = \begin{pmatrix} T \\ i+1 \end{pmatrix},\ E = \{(I,\ J) \mid I\in V_1,\ J\in V_2,\ I\subseteq J\}$$

显然, V_1 中每个点度数恰为 $n-i$, $V_2\cap F_{i+1}$ 中每个度数 $\le i+1$, 且由引理知:

$$V_2\setminus F_{i+1} \text{ 中每个度数 } \le 1.$$

若不然, 则存在 $J,\ J'\in F_i\,(J\ne J')$, $L\in V_2\setminus F_{i+1}$, 且 $J,\ J'\subseteq L$, 在引理中令

$$I = J\cap J',\ \{\beta\} = J\setminus J',\ \{\beta'\} = J'\setminus J,$$

即知

$$L = J\cup J' \in F_{i+1},$$

矛盾! 故

$$|V_1|\cdot(n-i) = |E| \le (i+1)\cdot|V_2\cap F_{i+1}| + |V_2\setminus F_{i+1}|,$$

即

$$|F_i|\cdot(n-i) \le (i+1)\cdot|F_{i+1}| + \binom{n}{i+1} - |F_{i+1}|.$$

从而

$$\begin{aligned}
|F_i| &\le \frac{i\cdot|F_{i+1}| + \binom{n}{i+1}}{n-i} \le \frac{i\cdot\binom{n-1}{i+1} + \binom{n}{i+1}}{n-i}(\text{由归假})\\
&= \frac{i\cdot\binom{n-1}{i}\cdot\frac{n-1-i}{i+1} + \binom{n-1}{i}\cdot\frac{n}{i+1}}{n-i}\\
&= \binom{n-1}{i}\cdot\frac{i\cdot\frac{n-1-i}{i+1} + \frac{n}{i+1}}{n-i} = \binom{n-1}{i}.
\end{aligned}$$

故①对 i 成立, 由归纳法知结论①得证!

由①知:

$$k = |F| = \sum_{j=2}^{n}|F_j| \le \sum_{j=2}^{n-1}\binom{n-1}{j}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\right)-\binom{n-1}{1}-\binom{n-1}{0}\\
&= 2^{n-1}-n.
\end{aligned}
$$

综上, 所求 k 最大值为 $2^{n-1}-n$. □

评注 可以先研究较小的找找感觉, 然后不难想到引理, 这个引理的好处是可以将问题转化为一个纯组合问题(而且运气好的是:这样的转化足够做出原题, 但并不一定的充要的), 后面的组合部分也不难, 归纳+算两次就可以了.

6. 设 $n \geq 2$ 是一个整数, $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n, y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$ 是 $2n$ 个实数, 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i=\sum\limits_{i=1}^{n} y_i=0$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2=\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2=1$. 证明:

$$
\sum_{i=1}^{n}\left(x_i y_i-x_i y_{n+1-i}\right) \geq \frac{2}{\sqrt{n-1}}.
$$

证明 记

$$
F=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i y_i-x_i y_{n+1-i}\right).
$$

由条件知

$$
n=n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2=\sum_{1 \leq i \leq j \leq n}\left(x_i-x_j\right)^2.
$$

同理

$$
n=\sum_{1 \leq i \leq j \leq n}\left(y_i-y_j\right)^2. \tag{1}
$$

下面分 n 奇偶讨论.

情形 1　n 是偶数. 此时,

$$
\begin{aligned}
F&=\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}\left(x_i y_i+x_{n+1-i} y_{n+1-i}-x_{n+1-i} y_i-x_i y_{n+1-i}\right)\\
&=\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}\left(x_i-x_{n+1-i}\right)\left(y_i-y_{n+1-i}\right).
\end{aligned}
$$

记

$$
l_i=x_i-x_{n+1-i},\ l_i'=y_i-y_{n+1-i}(1 \leq i \leq \frac{n}{2}).
$$

注意到, 由 (1) 知:

$$
n=\sum_{1 \leq i \leq j \leq n}\left(x_i-x_j\right)^2
$$

$$=\sum_{1\le i\le\frac{n}{2}}(x_i-x_{n+1-i})^2+\sum_{1\le i<j\le\frac{n}{2}}\Big((x_i-x_j)^2+(x_i-x_{n+1-j})^2$$
$$+(x_{n+1-i}-x_j)^2+(x_{n+1-i}-x_{n+1-j})^2\Big).\tag{2}$$
其中对 $1\le i\le j\le n$,
$$\begin{aligned}&(x_i-x_j)^2+(x_i-x_{n+1-j})^2+(x_{n+1-i}-x_j)^2+(x_{n+1-i}-x_{n+1-j})^2\\=&(x_i-x_j)^2+(x_i-x_j+l_j)^2+(x_i-l_i-x_j)^2+(x_i-l_i-x_j+l_j)^2\\=&4\cdot\left(x_i-x_j-\frac{l_i-l_j}{2}\right)^2+l_i^2+l_j^2\le(l_i-l_j)^2+l_i^2+l_j^2.\end{aligned}\tag{3}$$
其中, 最后的不等号是由 $x_i\ge x_j,\ x_{n+1-j}\ge x_{n+1-i}$ 有
$$0\le x_i-x_j=l_i+x_{n+1-i}-l_j-x_{n+1-j}\le l_i-l_j.$$
进而
$$\left(x_i-x_j-\frac{l_i-l_j}{2}\right)^2\le\left(\frac{l_i-l_j}{2}\right)^2.$$
将 (3) 代入 (2) 得
$$\begin{aligned}n\le&\sum_{1\le i\le\frac{n}{2}}l_i^2+\sum_{1\le i\le j\le\frac{n}{2}}\left((l_i^2+l_j^2)+(l_i-l_j)^2\right)\\=&n\cdot\sum_{1\le i\le\frac{n}{2}}l_i^2-\left(\sum_{1\le i\le\frac{n}{2}}l_i\right)^2.\end{aligned}\tag{4}$$
于是可设 $l_1:l_2:\cdots:l_{\frac{n}{2}}=t_1:t_2:\cdots:t_{\frac{n}{2}}$ 且
$$n=n\cdot\sum_{1\le i\le\frac{n}{2}}t_i^2-\left(\sum_{1\le i\le\frac{n}{2}}t_i\right)^2.\tag{5}$$
显然 $l_1,\ l_2,\ \cdots,\ l_{\frac{n}{2}}\ge0$, 故可令 $t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_{\frac{n}{2}}\ge0$. 显然 $l_i\ge t_i\left(1\le i\le\frac{n}{2}\right)$. 类似定义 $t_1',\ t_2',\ \cdots,\ t_{\frac{n}{2}}'$, 则
$$F=\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}l_il_i'\ge\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}t_it_i'.\tag{6}$$
$n=2$ 时, 由 (5) 知只能 $t_1=t_1'=\sqrt2$, 代入 (6) 知 $F\ge2=\frac{2}{\sqrt{2-1}}$, 原不等式得证.

下设 $n\ge4$, 记 $M=t_1,\ M'=t_1',\ S=t_1+\cdots+t_{\frac{n}{2}},\ S'=t_1'+\cdots+t_{\frac{n}{2}}'$. 由 (6) 及排序不等式知
$$F\ge t_1t_1'+\frac{1}{\frac{n}{2}-1}\cdot\left(\sum_{2\le i\le\frac{n}{2}}t_i\right)\left(\sum_{2\le i\le\frac{n}{2}}t_i'\right)$$

$$= MM' + \frac{2}{n-2}\cdot(S-M)(S'-M')$$
$$= \frac{n}{n-2}\cdot\left(M-\frac{2}{n}\cdot S\right)\left(M'-\frac{2}{n}\cdot S'\right)+\frac{2}{n}\cdot SS'. \tag{7}$$

由 (5) 知

$$n \le n\cdot S^2 - S^2 \Rightarrow S \ge \sqrt{\frac{n}{n-1}},\ n \ge n\cdot\frac{S^2}{\frac{n}{2}} - S^2 \Rightarrow S \le \sqrt{n},$$

且

$$n \le n\cdot\sum_{1\le i\le\frac{n}{2}} Mt_i - \left(\sum_{1\le i\le\frac{n}{2}} t_i\right)^2 \Rightarrow M \ge \frac{n+S^2}{nS} \ge \frac{2}{n}\cdot S. \tag{8}$$

其中对 $1\le i\le\frac{n}{2}$, $0\le t_i\le M \Rightarrow t_i^2 \le Mt_i$, 而 $\frac{n+S^2}{nS}\ge\frac{2}{n}\cdot S$ 是因为 $S\le\sqrt{n}$. 类似有

$$M \ge \frac{n+S'^2}{nS'} \ge \frac{2}{n}\cdot S'.$$

将 (8) 代入 (7) 知

$$F \ge \frac{n}{n-2}\cdot\left(\frac{n+S^2}{nS}-\frac{2}{n}\cdot S\right)\left(\frac{n+S'^2}{nS'}-\frac{2}{n}\cdot S'\right)+SS'\cdot\frac{2}{n}$$
$$= \frac{n}{n-2}\cdot\left(\frac{1}{S}-\frac{S}{n}\right)\left(\frac{1}{S'}-\frac{S'}{n}\right)+SS'\cdot\frac{2}{n}$$
$$= \frac{1}{SS'}\cdot\frac{n}{n-2}+SS'\cdot\frac{2n-3}{n(n-2)}-\frac{1}{n-2}\cdot\left(\frac{S}{S'}+\frac{S'}{S}\right). \tag{9}$$

从而只需证明: $S,\ S'\in\left[\sqrt{\frac{n}{n-1}},\ \sqrt{n}\right]$ 时,

$$G = \frac{1}{SS'}\cdot\frac{n}{n-2}+SS'\cdot\frac{2n-3}{n(n-2)}-\frac{1}{n-2}\cdot\left(\frac{S}{S'}+\frac{S'}{S}\right) \ge \frac{2}{\sqrt{n-1}}. \tag{10}$$

固定 SS', 此时 $\frac{S}{S'}+\frac{S'}{S}$ 在 $S\in\left\{\sqrt{\frac{n}{n-1}},\ \sqrt{n}\right\}$ 或 $S'\in\left\{\sqrt{\frac{n}{n-1}},\ \sqrt{n}\right\}$ 时取最大值. 故只需证明 $S\in\left\{\sqrt{\frac{n}{n-1}},\ \sqrt{n}\right\}$ 时 (10) 成立.

当 $S=\sqrt{\frac{n}{n-1}}$ 时, 由均值不等式有

$$G = \frac{1}{S'}\cdot\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}+S'\cdot\frac{1}{\sqrt{n-1}\cdot\sqrt{n}} \ge \frac{2}{\sqrt{n-1}}.$$

当 $S=\sqrt{n}$ 时, 由 $S'\ge\sqrt{\frac{n}{n-1}}$ 有

$$G = S'\cdot\frac{2}{\sqrt{n}} \ge \frac{2}{\sqrt{n-1}}.$$

从而 (10) 成立, 代入 (9) 知 $F\ge\frac{2}{\sqrt{n-1}}$, 原不等式得证.

情形 2 n 是奇数(与情形 2 类似, 但略有不同).

记

$$l_i = x_i - x_{n+1-i},\ l_i' = y_i - y_{n+1-i}(1\le i\le\frac{n-1}{2}),$$

则
$$F=\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} l_i\cdot l_i'.$$
由 (1),

$$\begin{aligned}
n=&\sum_{1\le i\le j\le n}(x_i-x_j)^2\\
=&\sum_{1\le i\le \frac{n-1}{2}} l_i^2+\sum_{1\le i\le \frac{n-1}{2}}\Big((x_i-x_{\frac{n+1}{2}})^2+(x_{n+1-i}-x_{\frac{n+1}{2}})^2\Big)\\
&+\sum_{1\le i\le j\le \frac{n-1}{2}}\Big((x_i-x_j)^2+(x_i-x_{n+1-j})^2+(x_{n+1-i}-x_j)^2+(x_{n+1-i}-x_{n+1-j})^2\Big)\\
\le&\sum_{1\le i\le \frac{n-1}{2}} l_i^2+\sum_{1\le i\le \frac{n-1}{2}} l_i^2+\sum_{1\le i\le j\le \frac{n-1}{2}}\left(l_i^2+l_j^2+(l_i-l_j)^2\right)\\
=&n\cdot\sum_{1\le i\le \frac{n-1}{2}} l_i^2-\left(\sum_{1\le i\le \frac{n-1}{2}} l_i\right)^2. \qquad (11)
\end{aligned}$$

其中, 最后一步类似 (3), 对 $1\le i\le \frac{n-1}{2}$, $x_i\ge x_{\frac{n+1}{2}}\ge x_{n+1-i}$ 有
$$\left(x_i-x_{\frac{n+1}{2}}\right)^2+\left(x_{n+1-i}-x_{\frac{n+1}{2}}\right)^2\le (x_i-x_{n+1-i})^2=l_i^2.$$
类似 (5), 可设 $l_1:l_2:\cdots:l_{\frac{n-1}{2}}=t_1:t_2:\cdots:t_{\frac{n-1}{2}},\ t_1,\ t_2\cdots,\ t_{\frac{n-1}{2}}\ge 0$, 且
$$n=n\cdot\sum_{1\le i\le \frac{n-1}{2}} t_i^2-\left(\sum_{1\le i\le \frac{n-1}{2}} t_i\right)^2. \qquad (12)$$
类似定义 $t_1',\ t_2'\cdots,\ t_{\frac{n-1}{2}}'$, 则
$$F\ge \sum_{1\le i\le \frac{n-1}{2}} t_it_i'. \qquad (13)$$
$n=3$ 时, 由 (12) 知 $t_1=t_1'=\sqrt{\frac{3}{2}},\ F\ge\frac{3}{2}\ge\frac{2}{\sqrt{3}-1}$, 下设 $n\ge 5$:记
$$M=t_1,\ M'=t_1',\ S=t_1+\cdots+t_{\frac{n-1}{2}},\ S'=t_1'+\cdots+t_{\frac{n-1}{2}}'.$$
由 (13) 及排序不等式, 类似 (7) 可得,
$$\begin{aligned}
F\ge&MM'+\frac{2}{n-3}\cdot(S-M)\left(S'-M'\right)\\
=&\frac{n-1}{n-3}\cdot\left(M-\frac{2}{n-1}\cdot S\right)\left(M'-\frac{2}{n-1}\cdot S'\right)+\frac{2}{n-1}\cdot SS'. \qquad (14)
\end{aligned}$$
由 (12) 得
$$n\le nS^2-S^2\Rightarrow S\ge\sqrt{\frac{n}{n-1}},\ n\ge n\cdot\frac{S^2}{\left(\frac{n-1}{2}\right)}-S^2\Rightarrow S\le\sqrt{\frac{n(n-1)}{n+1}},$$

且类似 (8) 有

$$n \le n \cdot \sum_{1\le i\le \frac{n-1}{2}} t_i M - \left(\sum_{1\le i\le \frac{n-1}{2}} t_i\right)^2 \Rightarrow M \ge \frac{n+S^2}{nS} \ge \frac{2}{n-1}\cdot S. \tag{15}$$

将 (15) 代入 (14) 得

$$\begin{aligned} F &\ge \frac{n-1}{n-3}\cdot\left(\frac{1}{S}-S\cdot\frac{n+1}{n(n-1)}\right)\left(\frac{1}{S'}-S'\cdot\frac{n+1}{n(n-1)}\right)+\frac{2}{n-1}\cdot SS' \\ &= \frac{1}{SS'}\cdot\frac{n-1}{n-3}+SS'\cdot\frac{2n^2-3n-1}{n^2(n-3)}-\frac{(n+1)}{n(n-3)}\cdot\left(\frac{S}{S'}+\frac{S'}{S}\right). \end{aligned} \tag{16}$$

类似 (10), 只需证明: $S\in\left\{\sqrt{\frac{n}{n-1}},\ \sqrt{\frac{n(n-1)}{n+1}}\right\}$ 时, (16) 右边 $\ge \frac{2}{\sqrt{n-1}}$.

当 $S=\sqrt{\frac{n}{n-1}}$ 时, 由均值不等式有

$$(16)\text{ 右边 } = \frac{1}{S'}\cdot\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}+S'\cdot\frac{1}{\sqrt{n-1}\cdot\sqrt{n}} \ge \frac{2}{\sqrt{n-1}}.$$

当 $S=\sqrt{\frac{n(n-1)}{n+1}}$ 时, 由 $S'\ge\sqrt{\frac{n}{n-1}}$ 有

$$(16)\text{ 右边 } = S'\cdot\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n-1}} \ge \frac{2n}{\sqrt{n+1}\cdot(n-1)} > \frac{2}{\sqrt{n-1}}.$$

故 $F\ge\frac{2}{\sqrt{n-1}}$, 原不等式得证.

综上两种情形中均有 $F\ge\frac{2}{\sqrt{n-1}}$, 原不等式得证! □

评注 首先注意到结论是平移不变的, 这意味着条件“$\sum x_i=0$, $\sum {x_i}^2=1$”只需利用其中的“$\sum\limits_{i<j}(x_i-x_j)^2=n$”(这一步其实不一定是好的, 反面例子的是: IMO 2003 第 5 题: $x_1\le\cdots\le x_n\,(n\in\mathbb{Z}^+)$, 证明:

$$\left(\sum_{i.\ j=1}^{n}|x_i-x_j|\right)^2 \le \frac{2\left(n^2-1\right)}{3}\cdot\sum_{i.\ j=1}^{n}(x_i-x_j)^2.$$

反倒要加上 $\sum x_i=0$ 再利用柯西), 接下来容易将问题转化为式 (5), (6) (而且是充要的), 下一步的排序不等式直接放会放过头, 要单独取出最大值(优化), 最后的少元问题也不难.

若按此方法做, 步骤其实不算多, 而且排序优化的一步比较有意思, 但是要分奇偶讨论直接让解答长度翻倍.

本题的最优结果如下:

n 是偶数时 $F_{\min}=\frac{2}{\sqrt{n-1}}$, 构造:

$$(l_i)=(\sqrt{\frac{n}{n-1}},\ 0\cdots,\ 0),\ (l_i')=(\frac{2}{\sqrt{n}},\ \cdots\frac{2}{\sqrt{n}}).$$

n 是奇数时 $F_{\min}=\frac{2n}{(n-1)\cdot\sqrt{n+1}}$, 构造:

$$(l_i)=(\sqrt{\frac{n}{n-1}},\ 0\cdots,\ 0),\ (l_i')=(2\cdot\sqrt{\frac{n}{n^2-1}},\ \cdots,\ 2\cdot\sqrt{\frac{n}{n^2-1}}).$$

$x_1 = \cdots = x_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$, $y_1 = \cdots = y_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$.

本题还有一个用概率的神奇做法:随机取 1, 2, $\cdots$, n 的一个排列 σ, 记

$$S(\sigma) = \sum x_i y_{\sigma(i)},$$

计算 $S(\sigma)$ 的平均, 方差, 以及最大最小值之差即可(不需分奇偶).