※ **数学新星 OPEN 问题征解**※

第二期 一些有代数几何背景的初等数学问题

韩京俊

(约翰 · 霍普金斯大学, The Johns Hopkins University)

2018 年菲尔兹奖得主 Caucher Birkar 在几年前曾提出了如下代数几何方向的猜想.

猜想 1 ([Birkar]) For a fixed positive integer n and a fixed positive real number $\epsilon \in (0,1]$, is there a positive integer M depending only on n and ϵ, such that if X_a is ϵ-lc, then $a_1 \leq M$, where $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ are coprime, and X_{a} is the weighted blow up of the affine n-plane $\mathbb{A}^n$ at the origin with the weight $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

利用 toric geometry 中的一些知识, 不难将猜想 1 转化为如下与格点有关的初等数学问题, 可参见中国科学院系统科学研究所的陈亦飞教授的预印本论文 [5, Lemma 3.1].

猜想 2 固定正整数 n 与正实数 $\epsilon \in (0,1]$. 求证, 存在正整数 M 满足如下性质: 设 C_n^ϵ 是顶点为

$$\{\mathbf{0}, \epsilon \boldsymbol{e}_1, \ldots, \epsilon \boldsymbol{e}_n, \epsilon \boldsymbol{a}\}$$

的凸多面体, 其中 $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0,\ldots,0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0,1,0,\ldots,0), \cdots, \boldsymbol{e}_n = (0,0,\ldots,1)$, $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $M \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$, 则 C_n^ϵ 的内部存在整点.

陈亦飞教授同时还证明了 $n = 2, 3$ 时的猜想 2, $n = 2$ 时即为:

定理 3 ([5, Theorem 1.6(Main Theorem)]) 固定正实数 $\epsilon \in (0,1]$. 则存在正整数 M 满足如下性质. 设 C_2^ϵ 是顶点为

$$\{(0,0), (\epsilon, 0), (0, \epsilon), (\epsilon a_1, \epsilon a_2)\}$$

的凸多面体, 其中 $M \leq a_1 \leq a_2$, 则 C_2^ϵ 的内部存在整点.

今年 2 月, Gregory Sankaran 与 Francisco Santos 声称证明了猜想 1, [7]. 他们的方法需要用一些较为高等的数学. 一个有趣的问题是, 是否存在较为初等的方法证明猜想 2, 从而证明 Birkar 的猜想 (猜想 1)?

当 $n=3$ 时, Birkar 的猜想与三维的极小模型纲领 (Minimal Model Program) 相关 [6, Theorem 1]. Birkar 的猜想源自 Birkar 的的博士导师、美国约翰斯霍普金斯大学 Shokurov 教授提出的 Complement 理论. Birkar 的菲尔兹奖的主要获奖工作是证明了法诺簇的有界性, 也即所谓的"Borisov-Alexeev-Borisov 猜想". Birkar 的证明由两篇论文组成 [2,1], 而第一篇接近 120 页长文的主要结果正是 Shokurov 的 Complement 猜想的一个特例 [2, Theorem 1.1, Theorem 1.7, Theorem 1.8]. 代数几何方向的专家们认为 Complement 理论是一个有深度又比较技术化的理论, 直到最近, 人们才逐渐将这一理论应用在代数几何中, 除"Borisov-Alexeev-Borisov 猜想"外, 还解决了一些著名的猜想与公开问题, 可参见美国普林斯顿大学的许晨阳教授及其与合作者 Harold Blum、刘雨晨的论文 [3,8].

Complement 理论在一维的情形, 还有一些问题有待解决, 我们可将其转化为初等数学的语言.

问题 4 设 n 是一个正整数, $\epsilon\in[0,1]$. 我们称 $\{b_i^+\}_{i\in I}$ 是 $\{b_i\}_{i\in I}$ 的一个 <u>(n,ϵ)-complement</u>, 若 $\sum\limits_{i\in I} b_i^+=2$, 且对任意 $i\in I$, 有 $b_i^+\in[0,1-\epsilon]$,

$$nb_i^+\geq\lfloor(n+1)\{b_i\}\rfloor+n\lfloor b_i\rfloor.$$

(1) 求证, 对任意正整数 p, $\epsilon\in[0,1]$, 存在正整数 N 满足下面的性质: 对任意 $\{b_i\}_{i\in I}$, 若对任意 $i\in I$, $b_i\in[0,1-\epsilon]$, 且 $\sum\limits_{i\in I} b_i\leq 2$, 则存在正整数 $n\leq N$, 使得 $p|n$, 且 $\{b_i\}_{i\in I}$ 有一个 (n,ϵ)-complement.

(2) 证明或否定, 对任意正整数 p, 对任意 $\{b_i\}_{i\in I}$, 若对任意 $i\in I$, $b_i\in[0,1]$, 且 $\sum\limits_{i\in I} b_i\leq 2$, 则存在正整数 $n\leq N:=p((p+1)^2+2)$, 使得 $p\mid n$, 且 $\{b_i\}_{i\in I}$ 有一个 $(n,0)$-complement.

(3) 一般的, 对固定的 ϵ,p, 是否能找到最佳的 N? 特别地, $\epsilon=0$ 时, N 的最佳值是否为 $p((p+1)^2+2)$?

(4) 固定正整数 p, $\epsilon\in[0,1]$. 求元素个数最少的集合 $\{n_i\}$, 使得对任意 $\{b_i\}_{i\in I}$, 若对任意 $i\in I$, $b_i\in[0,1-\epsilon]$, 且 $\sum\limits_{i\in I} b_i\leq 2$, 则存在正整数 $n\in\{n_i\}$, 使得 $p\mid n$, 且 $\{b_i\}_{i\in I}$ 有一个 (n,ϵ)-complement. 特别地, 当 $\epsilon=0$, $p=1$ 时, 集合元素的最少个数是否为 5? 此时对应的集合为 $\{1,2,3,4,6\}$.

Birkar 在他的博士毕业论文中, 证明了问题 4(1) 的一个弱化版本, 也即当 $p=1$ 时, 存在一个只和 ϵ 相关的正实数 $\delta<\epsilon$, 使得 $\{b_i\}_{i\in I}$ 有一个 (n,δ)-complement. 今年年初, 我和北京大学的陈国度博士研究了二维的 Complement 理论, 顺便我们证明了问题 4(1),[4,Theorem 1.9]. 证明基于初等数论. 问题 4(2-4) 目前均是未知的, 其中问题 4(2) 中 N 的值 $p((p+1)^2+2)$ 是美国约翰斯霍普金斯大学的何阳博士通过编程计算之后提出的.

致谢 北京大学的陈国度博士仔细阅读了本文的初稿, 在此致谢.

参考文献

[1] Caucher Birkar, Singularities of linear systems and boundedness of Fano varieties. *arXiv: 1609.05543v1*, 2016.

[2] Caucher Birkar, Anti-pluricanonical systems on Fano varieties. *Annals of Mathematics*, 190(2):345–463, 2019.

[3] Harold Blum, Yuchen Liu, and Chenyang Xu. Openness of K-semistability for Fano varieties. *arXiv:1907.02408*, 2019.

[4] Guodu Chen and Jingjun Han, Boundedness of (ϵ, n)-complements for surfaces. *arXiv: 2002.02246v1,* 2020.

[5] Yifei Chen, On singularities of threefold weighted blowups. *arXiv: 1911.04726,* 2019.

[6] Masayuki Kawakita, Divisorial contractions in dimension three which contract divisors to smooth points, *Invent. Math.* (145)2001: 105 – 119.

[7] Gregory Sankaran, and Francisco Santos. Blowups with log canonical singularities. *arXiv: 1911.06435v3*, 2020.

[8] Chenyang Xu. A minimizing valuation is quasi-monomial. *Annals of Mathematics*, 191, 1003–1030, 2020.