2020 年圣彼得堡数学竞赛组合题解析

王广廷

(上海市上海中学, 200231)

圣彼得堡数学竞赛是非常有影响力的城市学数学竞赛, 曾被称为全球“难度最大”的数学竞赛, 其组合问题有难度, 选材丰富, 立意新颖, 也从一个侧面反映出俄罗斯是传统数学强国和数学竞赛强国.

我们选取了 2020 年圣彼得堡数学竞赛的 7 道组合题给出了解答和评析. 其中第 1,2,3 题是九年级的竞赛题, 第 4,5 题是十年级的竞赛题, 第 6,7 题是十一年级的竞赛题. 其中第1,2,6 题是容易的组合题, 第 3,4,5,7 题是中等难度的组合题.

I. 试 题

1. 在一个 300 行 25 列的表格中, 甲将所有格三染色. 随后, 乙对表格中每一行声明一种颜色, 并将该行中所有被染这种颜色的格子打上标记, 然后所有包含标记的列会被删去, 这里甲希望最后留下的列数越少越好, 而乙希望留下的列数越多越好. 问: 乙最多可以保证留下多少列?

2. 我们标记平面直角坐标系内的点 (1,1), (2,3), (4,5), (999,111). 此后, 我们将按照以下规则继续标记其它点:

(1) 若 (a, b)被标记, 则可标记 (b, a) 和 $(a-b, a+b)$;

(2) 若 (a, b) 和 (c, d) 都被标记, 则可标记 $(ad+bc, 4ac-4bd)$.

问: 能否在有限步内标记直线 $y=2x$ 上的某点?

3. 令 G 是一个含有 400 个顶点的图. 对于 G 的每条边 AB, 我们称由 AB 和顶点 A, B 连出的所有边构成的子图为一个“乌贼子图”. 现在 G 的每条边被赋值为 1 或 -1, 且已知 G 的任何“乌贼子图”中的边赋值之和至少为 1. 求证: G 中所有边赋值之和至少为 -10^4.

修订日期: **2020-08-25.**

4. 甲有 100 块石头, 外形各不相同, 且重量也互不相同. 甲可以通过外形分别石头, 但无法得知它们的重量. 现在开始每天晚上将 10 块石头 (由甲选取) 放在窗台上, 而也可后善良精灵会出现, 并将 10 跨块石头按重量从小到大排列. 另一方面, 如果甲家中有淘气精灵, 那他会在天亮前交换某两块石头的位置 (操作一定会进行, 且在善良精灵之后). 甲知道两个精灵的行为方式, 但不知道家中是否有淘气精灵. 问: 甲能否在有限时间内确定自己家中是否有淘气精灵?

5. 在一个社交网络上, 每名用户至多有 10 个朋友 (假设朋友是相互的), 且这个社交网络是连通的. 求证: 可以将所有用户分成若干组, 满足如下条件:

(1) 每名用户恰好属于一个组;

(2) 每个组内是连通的;

(3) 一个组人数在 1 到 100 内, 其它组人数在 100 到 900 内.

6. 在一个 100×100 的棋盘上, 一个"近视车"可以攻击与它同行或同列且距离不超过 60 格的方格. 在棋盘上至多可以放置多少个互不攻击的"近视车"?

7. 在一个国家中有 N 个城市和 N 个贵族. 每个贵族拥有一座城市. 现在每个贵族在某些城市之间修了公路, 且一个贵族在任意两座城市之间至多修一条路 (注意两个城市之间可以有多条公路, 但它们属于不同的贵族). 假设所有贵族共修了 d 条公路. 现在一些贵族想要形成"集团", 使得集团内的城市之间可以通过集团内的公路相连接 (途中允许经过集团外的城市只要公路属于集团即可). 然而, 贵族们发现任何多于一个且少于 N 个贵族都无法形成集团. 求此条件下 d 的最大值.

II. 解答与评注

第 1 题 在一个 300 行 25 列的表格中, 甲将所有格三染色. 随后, 乙对表格中每一行声明一种颜色, 并将该行中所有被染这种颜色的格子打上标记, 然后所有包含标记的列会被删去, 这里甲希望最后留下的列数越少越好, 而乙希望留下的列数越多越好. 问: 乙最多可以保证留下多少列?

解 乙最多可以保证留下 2 列.

将 3 种颜色分别记为 1,2,3. 注意到 $\mathrm{C}_{25}^2 = 300$, 故甲可将 300 行中的每一行对应一个数组 $\{i, j\}(1 \le i < j \le 25)$. 在这一行中甲将 i 格染 1 色, j 格染 2 色, 其余格均染 3 色.

乙若在任一行中声明 3 色, 则至多留下两列, 若乙在任一行中都声明了 1,2 色, 若留下了至少两列 $a,b(a<b)$, 则在数组 a,b 对应的行中乙未声明任何颜色, 矛盾!

无论如何, 乙至多留下两列.

由于有 3 种颜色, 乙可以在每行声明不在第 24,25 列中的颜色, 这样一定可以留下两列. 故乙最多可保证留下两列. □

评注 这是一道较容易的组合题. 从; 两个角度着手构造: 一方面选某种颜色, 在其所在行占了绝大多数格. 另一方面其余颜色在整个 300 行的考虑下占了绝大多数列. 注意到 $\mathrm{C}_{25}^2=300$ 也可有助于考虑行与二元组的对应, 从而使得问题解决.

第 2 题 我们标记平面直角坐标系内的点 (1,1), (2,3), (4,5), (999,111). 此后, 我们将按照以下规则继续标记其它点:

(1) 若 (a,b)被标记, 则可标记 (b,a) 和 $(a-b,a+b)$;

(2) 若 (a,b) 和 (c,d) 都被标记, 则可标记 $(ad+bc,4ac-4bd)$.

问: 能否在有限步内标记直线 $y=2x$ 上的某点?

解 首先证明下面的引理:

引理 在操作过程中出现的点 (x,y) 满足: 5 不整除 x^2+y^2.

证明 注意到, 初始时, 5 不整除 $1^2+1^2,2^2+3^2,4^2+5^2,999^2+111^2$.

下面分两种情形:

(1) 若 5 不整除 a^2+b^2, 则 5 不整除 b^2+a^2 以及 $(a-b)^2+(a+b)^2=2(a^2+b^2)$, 故操作 (1) 保证引理成立.

(2) 若 5 不整除 b^2+a^2，5 也不整除 c^2+d^2, 注意到

$$\begin{aligned}(ad+bc)^2+(4ac-4bd)^2 &\equiv (ad+bc)^2+(ac-bd)^2 \pmod 5\\ &=(a^2+b^2)(c^2+d^2)\neq 0 \pmod 5.\end{aligned}$$

操作 (2) 也保证引理成立.

综上可得, 引理得证.

回到原题, 注意到 $y=2x$ 上的所有整点 (x_0,y_0) 均有 $5\mid(x_0^2+y_0^2)$, 故在有限步内不可能标记直线 $y=2x$ 上的点. □

评注 本题的关键在于熟悉两个恒等式: $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$ 以及 $(ab+cd)^2+(ad-bc)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$. 然后考虑平方和的不变量, 用模

5 去消去 4.

第 3 题 令 G 是一个含有 400 个顶点的图. 对于 G 的每条边 AB, 我们称由 AB 和顶点 A, B 连出的所有边构成的子图为一个“乌贼子图”. 现在 G 的每条边被赋值为 1 或 -1, 且已知 G 的任何“乌贼子图”中的边赋值之和至少为 1. 求证: G 中所有边赋值之和至少为 -10^4.

证明 (颜川皓) 取图 G 的一组最大匹配 $A_1B_1, A_2B_2, \cdots, A_kB_k (0 \le k \le 200)$. 考虑任一点 X, 记 $d(X)$ 为点 X 所连出边的赋值之和. 故要证原问题, 只需证明:

$$\sum d(X) \ge -20000.$$

由题意知, 若两点 X, Y 相连, 则 $d(X) + d(Y) \ge 0$, 于是 $d(A_i) + d(B_i) \ge 0$.

对另一点 C, 若 C 与 $A_1, A_2, \cdots, A_k, B_1, B_2, \cdots, B_k$ 中至少 $k+1$ 个点相连, 则必有 C 与某对 (A_i, B_i) 相连, 故

$$d(C) + d(A_i) \ge 0, d(C) + d(B_i) \ge 0.$$

故

$$d(C) + d(A_i) + d(B_i) \ge 0.$$

又另两点 C, D 不可能均与 A_i, B_i 相连, 否则有更大的匹配(将 A_iC, B_iD替换 A_iB_i), 因此, 可将 A_i, B_i 分为一组且可将所有度大于等于 $k+1$ 的点加入一个 (A_i, B_i) 的组(其中 A_i, B_i 均与其相连), 则每一组内的和大于等于 0, 而剩下的点的度小于等于 k. 故

$$\begin{aligned}\sum d(X) &\ge -k(400-2k) \\ &= -2(k(200-k)) \\ &\ge -20000.\end{aligned}$$

故原问题得证. □

评注 本题是一个中等难度的图论题, 容易想到用每个点连边的赋值和来刻画有些奇怪的条件和结论, 注意到三角形圈的结构保证度数和不小于 0. 于是可考虑选取最大匹配, 之后便是常规的讨论.

第 4 题 甲有 100 块石头, 外形各不相同, 且重量也互不相同. 甲可以通过外形分别石头, 但无法得知它们的重量. 现在开始每天晚上将 10 块石头 (由甲选取) 放在窗台上, 而也可后善良精灵会出现, 并将 10 跨块石头按重量从小到大

排列. 另一方面, 如果甲家中有淘气精灵, 那他会在天亮前交换某两块石头的位置 (操作一定会进行, 且在善良精灵之后). 甲知道两个精灵的行为方式, 但不知道家中是否有淘气精灵. 问: 甲能否在有限时间内确定自己家中是否有淘气精灵?

解 (颜川皓) 甲可以确定家中是否有淘气精灵.

将石头标号为 $A_1, A_2, \cdots, A_{100}$, 下面给出甲的策略:

甲在 C_{100}^{10} 天内依次挑选的所有的 10 块石头的子集, 甲选择相信这些石头的排序为正确的, 若其中产生了矛盾, 则甲可得知一定存在淘气精灵; 若其中没有产生矛盾, 则甲可以得到一个所有的石头的从轻到重的排序. 不妨设为 $A_1 < A_2 < \cdots < A_{100}$(这是因为任意两块石头的重量互不相同).

设石头重量的真实排序为: $A_{\sigma(1)} < A_{\sigma(2)} < \cdots < A_{\sigma(100)}$, 其中 σ 为 $1, 2, \cdots, 100$ 的一个置换.

若存在淘气精灵, 则对 $1, 2, \cdots, 100$ 中的任意不同的正整数 $x_1 < x_2 < \cdots < x_{10}$, 有 $\sigma(x_1), \sigma(x_2), \cdots, \sigma(x_{10})$ 恰经过一次交换可变为从小到大的排列. 不妨设 $\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(10)$ 中交换的为 $\sigma(a), \sigma(b)$. $\sigma(11), \sigma(12), \cdots, \sigma(20)$ 中交换的为 $\sigma(c), \sigma(d)$, 则考虑包含 $\sigma(a), \sigma(b), \sigma(c), \sigma(d)$ 的 10 块石头,知这与淘气精灵的行动方式不符.

故甲在 C_{100}^{10} 天后一定知道是否存在淘气精灵. □

评注 该问题只需考虑将 C_{100}^{10} 种情况圈查询是否能发现, 在从正面推有难度的情况下, 考虑用反证法得到更强的条件. 即存在淘气精灵下看似正确的排列, 再分析可导出矛盾.

第 5 题 在一个社交网络上, 每名用户至多有 10 个朋友 (假设朋友是相互的), 且这个社交网络是连通的. 求证: 可以将所有用户分成若干组, 满足如下条件:

(1) 每名用户恰好属于一个组;

(2) 每个组内是连通的;

(3) 一个组人数在 1 到 100 内, 其它组人数在 100 到 900 内.

证明 (黄凤麟) 用图论语言描述原问题: 将用户视作顶点, 按是否为朋友关系进行了连边, 得到图 $G(V, E)$.

下面对顶点的个数 $|V|$ 进行归纳. 当 $|V| \leq 100$ 时, 显然成立, 直接将这 100

个点全部划分成一组即可.

当 $100 < |V| \le 901$ 时, 取 G 的一颗生成树的一个叶子结点, 将其单独划分为一组, 其余点划分成一组即可.

下设 $|V| \ge 902$, 且 $|V|$ 较小时均成立.

我们希望将图 G 的顶点集 V 划分成两个不交的部分 V_1, V_2, 即 $V_1 \cup V_2 = V, V_1 \cap V_2 = \emptyset$, 其中 $100 \le |V_1| \le 900$, 且图 G 在 V_1, V_2 上的诱导子图是连通的.

由图 G 连通性, 知可以从图 G 的任意结点开始搜索得到一棵有根生成树 T, 设 A_0 为其根.

下面分两种情况进行讨论:

(1) 若 A_0 的子结点的子树的大小均小于 100, 则任取一棵子树单独作为一组, 剩下的顶点作为一组即可;

(2) 若 A_0 有一个子节点 A_1 的子树的大小大于等于 100, 若其小于等于 900, 则取出该子树即可; 若其大于等于 901, 则由于 A_1 至多有 9 个子节点, 必有一个子节点 A_2, 其子树的大小大于等于 100. 以此类推, 总可以找到一颗在 100 到 900 之间的子树, 结合归纳假设, 知成立.

综上可知, 原问题成立. $\square$

评注 注意到连通性的要求, 可考虑图的生成树. 这样 V 及其子孙的诱导子图必连通, 此后由每点度数限制及 $901 = 100 \times 9 + 1$ 联想到用抽屉原理向下递归找子树即可.

第 6 题 在一个 100×100 的棋盘上, 一个"近视车"可以攻击与它同行或同列且距离不超过 60 格的方格. 在棋盘上至多可以放置多少个互不攻击的"近视车"?

解 近视车的最大值为 178.

首先给出 178 的构造:

用 (i, j) 表示方格表中第 i 行, 第 j 列的方格. 则当近视车在如下格子中时满足条件:

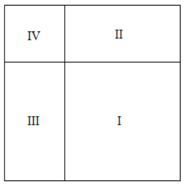
$(i, 61 + i), i = 1, 2, \cdots, 39;$

$(i, i - 61), i = 62, 63, \cdots, 100;$

$(i, i), i = 1, 2, \cdots, 100.$

下面说明 178 是最大值.

将 100×100 的方格表分成如下 4 块: 在 I 中至多放 61 个车, IV 中至多放



39 个车, II,III 中每行, 每列至多有一个车, 记至多有 39 个车. 所以, 至多共有 178 个车. □

评注 这是一道简单的组合题, 注意到 $i \times 61$ 长方形中至多有 i 个近视车. 尝试用这样的图形尽量划分 100×100 即可. 构造在此划分下也是相对自然的.

第 7 题 在一个国家中有 N 个城市和 N 个贵族. 每个贵族拥有一座城市. 现在每个贵族在某些城市之间修了公路, 且一个贵族在任意两座城市之间至多修一条路 (注意两个城市之间可以有多条公路, 但它们属于不同的贵族). 假设所有贵族共修了 d 条公路. 现在一些贵族想要形成"集团", 使得集团内的城市之间可以通过集团内的公路相连接 (途中允许经过集团外的城市只要公路属于集团即可). 然而, 贵族们发现任何多于一个且少于 N 个贵族都无法形成集团. 求此条件下 d 的最大值.

解 (颜川皓) d 的最大值为 C_n^3.

首先给出构造: 将城市编号为 $1, 2, \cdots, N$, 对每三个满足 $i < j < k$ 的三元组, 在 j, k 之间连第 i 色的道路, 则共有 C_n^3 条道路. 对任意 $i_1 < i_2 < \cdots < i_t$, i_1 无法与 $i_2, i_3, \cdots, i_t$ 用 $i_1, i_2, \cdots, i_t$ 色道路相连, 故不存在集团, 故上述构造满足要求.

下面用归纳法证明: $d \le \mathrm{C}_n^3$.

当 $n = 2$ 时, 无公路, 显然成立.

当 $n = 3$ 时, 至多有一条公路, 成立.

假设 $n - 1$ 时成立, 即 $d \le \mathrm{C}_{n-1}^3$. 下面考虑 n 的情况, 只需证明: 存在一个城市 i, i 色道路和 i 连出道路数目之和不超过 C_{n-1}^2.

将每个 i 连到 j 的 k 色道路对应无序数对 (j, k), 则 j 与 k 之间无 i 色道路(否则 i, j, k 形成集团), 而每一对 (j, k) 至多被对应一次, 否则若被对应两次, 即有 i 连向 j 的 k 色道路和 i 连向 k 的 j 色道路, 则 j, k 形成集团, 又 i 不会连出 i 色道路, 于是每一条 i 连出的道路都会对应一个未连 i 色道路的数对 $(j, k)(j, k \ne i)$, 故这三类道路共至多有 C_{n-1}^2 条.

即 n 时成立. 由归纳法原理知, $d \le \mathrm{C}_n^3$.

综上可知, d 的最大值为 C_n^3. $\square$

评注 将题目转化为图论语言并用染色代替建路是自然地. 从最基本的"集团"入手, 知 uv 间边不由 uv 修建, u 也不能像 vw 两点发出的 N 色的路. 这样考察 u 色路与 u 出发的路知它们被三人(二人)集团制约, 由此可得关于路数的上界, 而更大集团难以下手处理, 容易想到用归纳法证明. 另一方面,对小的情况试验可得到按顺序设计路的构造.