# 一道精美的组合几何构造问题

冯跃峰

2019 年中国国家集训队测试题中有一个非常有趣的组合几何构造问题 (见《走向 IMO, 数学奥林匹克试题集锦, 2019》, p123-124):

【问题】 在平面上给定 60 个点, 其中任意三点不共线. 证明: 可以把这 60 个点分成 20 个"两两不交"的三点组 $\{A_i, B_i, C_i\}(1 \leq i \leq 20)$, 使得

$$\bigcap_{i=1}^{20} \triangle A_iB_iC_i \neq \varnothing,$$

这里 $\triangle A_iB_iC_i$ 表示平面上 $\triangle A_iB_iC_i$ 的内部及边界上的所有点构成的点集.

一读到题目, 便被深深吸引. 它有明显的海莱定理背景, 似乎只需证明任何 3 个凸集 $\triangle A_iB_iC_i, \triangle A_jB_jC_j, \triangle A_kB_kC_k$ 的交非空即可. 但问题是, 题中没有给出具体的三角形, 而需要适当将已知点分组, 它类似于集合的划分, 因而它本质上属于构造问题. 更为重要的是, 囿于海莱定理的固定结构, 解题并不能获得成功, 需要将其适当拓广, 方能达到目标, 这是本题最为迷人之处. 当然, 也许我们没有找到好的思路, 读者不妨试试, 能否直接构造 20 个三角形, 使任何 3 个三角形有公共点.

原解答相当巧妙, 读之深受启发. 本文试图还原其解答的探索过程, 并附带订正原解答过程中出现的一个小小疏漏.

【思路分析】 解题的关键, 是采用撒网策略, 将三点集扩充为 $r$-点集: 构造 20 个 $r$-点集的闭域 (凸包边界及内部所有点构成的集合称为闭域) $G_i(1 \leq i \leq 20)$, 使之有公共点, 其中 $r$ 待定.

由海莱定理, 这只需任何 3 个闭域 $G_i$ 的交非空, 进而只需任何 3 个 $r$-点集的交非空.

为此, 先考虑 $A \cap B \neq \varnothing$ 的充分条件. 由容斥原理可知,

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B|,$$

修订日期: **2020-08-11.**

所以 $A\cap B \neq \varnothing$ 的一个充分条件是 $|A|+|B|-|A\cup B|>0$, 即 $|A|+|B|>|A\cup B|$.

进而, $A\cap B\cap C\neq\varnothing$ 的一个充分条件是 $|A\cap B|+|C|>|A\cup B\cup C|$.

设 $A,B,C$ 都是题给 60 个点的 $r$-子集, 则 $|A\cup B\cup C|\leq 60$, 所以 $A\cap B\cap C\neq\varnothing$ 的一个充分条件是 $|A\cap B|+|C|>60$. 而 $|C|=r$, 所以 $|A\cap B|>60-r$, 即

$$|A|+|B|>|A\cup B|+60-r.$$

再注意到 $|A\cup B|\leq 60$, 所以只需 $|A|+|B|>120-r$, 即 $2r>120-r$, 解得 $r>40$, 取 $r=41$ 即可.

以上实际上证明了, 题给 60 个点的 41 元子集中任何 3 个都相交.

但现在还不能利用海莱定理, 因为"41 元子集"是离散点集. 为了将其变成凸集, 考察其闭域即可.

记 41-点集 $G_i$ 的凸包边界及其内部点的集合为 $\Omega_i$ $(1\leq i\leq 20)$, 则 $G_i\subseteq\Omega_i$, 而 $G_i(1\leq i\leq 20)$ 中任何 3 个都相交, 从而 $\Omega_i(1\leq i\leq 20)$ 中任何 3 个都相交. 由海莱定理, 所有 $\bigcap\limits_{i=1}^{20}\Omega_i\neq\varnothing$.

这与解题目标还相去甚远: 凸集 $\Omega_i$ 并非 $\triangle A_iB_iC_i$ (边界及内部点构成的集合). 我们期望将 $\bigcap\limits_{i=1}^{20}\Omega_i\neq\varnothing$ 优化为 $\bigcap\limits_{i=1}^{20}\triangle A_iB_iC_i\neq\varnothing$ . 这须再一次采用撒网策略, 考察所有的 41 点集的闭域, 因为仅 20 个闭域 $\Omega_i(1\leq i\leq 20)$ 未必能找到所需的 $\bigcap\limits_{i=1}^{20}\triangle A_iB_iC_i\neq\varnothing$.

考察题给 60 个点的所有 41 元子集, 共有 $m=\mathrm{C}_{60}^{41}$ 个. 由上所证, 这 $m$ 个凸集中任何 3 个都相交, 从而 $\bigcap\limits_{i=1}^{m}\Omega_i\neq\varnothing$.

为找到凸集 $\triangle A_iB_iC_i(1\leq i\leq 20)$, 使 $\bigcap\limits_{i=1}^{20}\triangle A_iB_iC_i\neq\varnothing$, 容易想到, 让每个凸集 $\triangle A_iB_iC_i$ 都覆盖一个凸集 $\Omega_i(1\leq i\leq 20)$. 这样, $m$ 个凸集 $\Omega_i(1\leq i\leq m)$ 的公共点就是 20 个凸集 $\triangle A_iB_iC_i(1\leq i\leq 20)$ 的公共点.

但这是无法实现的, 我们将其弱化为: 适当对已知点编号, 使每个三角 $\triangle A_iB_iC_i(1\leq i\leq 20)$ 任何两边都"跨越" (从一个顶点旋转到第三顶点) 41 个已知点.

设 $P$ 是所有凸集 $\Omega_i(1\leq i\leq m)$ 的公共点, 取离 $P$ 最近的一个已知点为 $P_1$, 作射线 $PP_1$, 则由于已知点中无 3 点共线, 射线上最多有 2 个已知点.

想象射线绕点 $P$ 按逆时针方向旋转一周, 依次越过的已知点分别为 $P_1,P_2,\cdots,P_{60}$, 其中规定, 当射线同时跨越 2 个点时, 离 $P$ 较近的点的下标小于离 $P$ 较远的点的下标. 特别地, 如果 $P$ 也是已知点, 则记 $P_{60}=P$.

为了使每个三角形 $\triangle_i=(P_iP_jP_k)$ 的任何两边都"合并跨越"41个已知点,

只需 $\triangle_i(1\le i\le 20)$ 的三顶点的最大最小下标差: $k-i=40$.

此外, 为了使每个三角形 $\triangle_i=(P_iP_jP_k)(1\le i\le 20)$ 中任何两个没有公共顶点, 想象其顶点下标 $j=f(i)$, $k=g(i)$. 当 $i$ 跑遍 $1,2,\cdots,20$ 时, $f(i)$ 跑遍 $21,22,\cdots,40$; $g(i)$ 跑遍 $41,42,\cdots,60$, 三个下标 $i,j,k$ 合并构成 $1,2,\cdots,60$ 的一个排列.

由此可见, 取 $\triangle_i=(P_iP_{i+20}P_{i+40})(1\le i\le 20)$ 即可.

下面证明: 若 $P$ 是所有凸集 $\Omega_i(1\le i\le m)$ 的公共点, 则

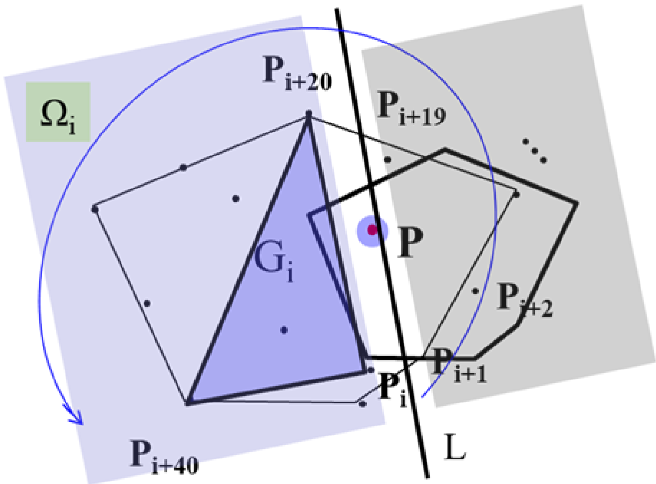
$$P\in\triangle P_iP_{i+20}P_{i+40}(1\le i\le 20).$$

用反证法, 设存在 $1\le i\le 20$, 使 $P\notin$ 凸集 $\triangle P_iP_{i+20}P_{i+40}$, 当然有 $P\notin\{P_i,P_{i+20},P_{i+40}\}$.

利用 $\triangle P_iP_{i+20}P_{i+40}$ 的凸性, 可用直线进行分隔 (在直线一侧). 于是, 存在过 $P$ 作直线 $L$, 使凸集 $\triangle P_iP_{i+20}P_{i+40}$ 位于 $L$ 的同一侧. 想象直线 $L$ 绕点 $P$ 按逆时针方向旋转, 从 $PP_i$ 转到PP $_{i+40}$ 时, 根据已知点的排序规则, 其跨越的已知点依次为 $P_i$, $P_{i+1}$, $\ldots$, $P_{i+40}$.

上述 41 个已知点都位于 $L$ 的同一侧, 从而这 41 个点的凸包边界及其内部点构成的凸集 $\Omega_i(1\le i\le m)$ 位于 $L$ 的同一侧. 但由 $P$ 的选取规则, 应有 $P\in\Omega_i$, 矛盾.

【注】 上述证明最后一段存在漏洞. 尽管存在过 $P$ 作直线 $L$, 使凸集 $\triangle P_iP_{i+20}\ P_{i+40}$ 位于 $L$ 的同一侧. 但未必 $L$ 绕点 $P$ 按逆时针方向旋转, 从 $PP_i$ 转到 $PP_{i+40}$ 时, 跨越的 41 个已知点都位于 $L$ 的同一侧. 反例如下图所示:




我们虽然发现了上述漏洞, 但苦于没有解决办法. 后来, 瞿振华教授给出了一个完美的修改方案, 其处理手法极为巧妙: 关键是将闭域转化为开域 (类似于

不等式改进为严格不等式) 重新进行估计.

组合几何中, 数据的细微改进, 常常起着至关重要的作用, 这个改进估计的手法就是一个典型的例子.

首先要考虑的是, 如何改进前面得到的交集估计. 由

$$|A\cap B| = |A| + |B| - |A\cup B| \geq 41 + 41 - 60 = 22,$$

已推出 $A\cap B\cap C \neq \varnothing$. 稍作思考, 这一估计可改进为 $|A\cap B\cap C| \geq 3$.

实际上, 因为

$$|A\cap B| = |A| + |B| - |A\cup B| \geq 41 + 41 - 60 = 22,$$

所以 $|\overline{A\cap B}| \leq 60 - 22 = 38$, 进而

$$|A\cap B\cap C| \geq |C| - |\overline{A\cap B}| \geq 41 - 38 = 3.$$

这个数据“3”却有重大意义——3 个已知点生成一个三角形, 任何三个凸包的交存在内部区域! 这是将闭域改进为开域的前提.

因为任何三个凸包的交中有 3 个已知点构成三角形, 于是任何 3 个凸包内部的交也非空, 由凯莱定理, 所有凸包内部的交非空 (含有一个上述三角形的内部) , 其交是一个非线性的开集.

60 个点两两连线, 只有有限条直线, 不能覆盖上述开集, 可在该开集中选取一点P, 使其不在任何两个已知点确定的直线上 (当然P也就不是已知点).

下面验证这样选取的点 $P$ 属于每个 $\triangle P_iP_{i+20}P_{i+40}$, 这是水到渠成的, 采用反证法即可.

假设存在 $1 \leq i \leq 20$, 使 $P \notin \triangle P_iP_{i+20}P_{i+40}$, 则存在过 $P$ 的直线 $L$, 使 $\triangle P_iP_{i+20}\ P_{i+40}$ 位于 $L$ 的同一侧. 此时, 直线 $L$ 不包含 $\triangle P_iP_{i+20}P_{i+40}$ 的那一侧至多包含了 $\triangle P_iP_{i+20}P_{i+40}$ 相邻两顶点间按前述射线旋转所跨越的 19 个点, 从而 $L$ 的含 $\triangle P_iP_{i+20}P_{i+40}$ 的那一侧至少含有 41 个已知点, 设这 41 个点的凸包内部开区域为 $\Omega_i(1 \leq i \leq m)$. 由 $P$ 的选取规则, 应有 $P \in \Omega_i$, 矛盾.

所以 $P$ 是 20 个 $\triangle P_iP_{i+20}P_{i+40}(1 \leq i \leq 20)$ 的公共点, 命题获证.

**【新写】**记 $m = \mathrm{C}_{60}^{41}$, 对 $1 \leq i \leq m$, 设每 41 个已知点的凸包内部开区域为 $\Omega_i$.

对任意 3 个 41 点集 $A$ , $B$ , $C$, 有

$$|A\cap B| = |A| + |B| - |A\cup B| \geq 41 + 41 - 60 = 22,$$

所以 $|\overline{A\cap B}| \leq 60 - 22 = 38$, 进而 $|A\cap B\cap C| = |C| - |\overline{A\cap B}| \geq 41 - 38 = 3$.

这说明任何三个凸包的交中含有 3 个已知点构成的三角形, 从而任何 3 个开集 $\Omega_i(1 \leq i \leq m)$ 的交也非空 (含有一个上述三角形的内部), 由凯莱定理, 所有 $m$ 个开集的交非空, 其交是一个非线性的开集.

60 个点形成的有限条直线, 不能覆盖上述开集, 可在该开集中选取一点 $P$, 使其不在任何两个已知点确定的直线上. 以 $P$ 为端点作射线, 绕点 $P$ 按逆时针方向旋转一周, 则任何时刻射线至多通过一个已知点, 设其越过的已知点依次为 $P_1, P_2, \cdots, P_{60}$.

假设存在 $1 \leq i \leq 20$, 使 $P \notin \triangle P_iP_{i+20}P_{i+40}$, 则存在过 $P$ 的直线 $L$, 使 $\triangle P_iP_{i+20}\ P_{i+40}$ 位于 $L$ 的同一侧. 此时, 直线 $L$ 不包含 $\triangle P_iP_{i+20}P_{i+40}$ 的那一侧至多包含了 $\triangle P_iP_{i+20}P_{i+40}$ 相邻两顶点间按前述射线旋转所跨越的 19 个点, 从而 $L$ 的含 $\triangle P_iP_{i+20}P_{i+40}$ 的那一侧至少含有 41 个已知点, 设这 41 个点的凸包内部开区域为 $\Omega_i(1 \leq i \leq m)$. 由 $P$ 的选取规则, 应有 $P \in \Omega_i$, 矛盾.

所以 $P$ 是 20 个 $\triangle P_iP_{i+20}P_{i+40}(1 \leq i \leq 20)$ 的公共点, 命题获证. □