2020 年保加利亚 TST 试题解答与评析

饶睿
(华南师范大学附属中学, 510630)
指导教师: 陈嘉华

本次赛事的六道题里面, 第一题相对较简单, 而第二、四、五、六题属于中档题, 第三题则是较为困难的题目, 主要难在不容易表达.

I. 试 题

1. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $BC > AC$, Γ 是外接圆, D 是 AC 上一点, E 是以 CD 为直径的圆与 Γ 的另一个交点. M 是 AB 的中点, CM 交 Γ 于另一点 Q. 与 Γ 相切于 A, B 两点的两条直线交于点 P, 而 H 是 P 在 BQ 上的垂足. 点 K 是 HQ 上的一点, 满足 Q 在 H, K 之间. 证明: $\angle HKP = \angle ACE$ 当且仅当 $\frac{KQ}{QH} = \frac{CD}{DA}$.

2. 设 a, b 是两个正奇数. 证明: 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 存在一个 $m \in \mathbb{N}$, 使得 2^n 至少整除 $a^m b^2 - 1$ 和 $b^m a^2 - 1$ 中的一个数.

3. Ω 是一个由 $A = \{1, 2, \cdots, 100\}$ 的一些子集组成的集族, 满足

(1) 任何一个 A 的 $99-$元子集都在 Ω 中;

(2) 对任意一个非空集合 $C \in \Omega$, 都存在一个元素 $c \in C$ 使得 $C \setminus \{c\} \in \Omega$.

求 $|\Omega|$ 可能满足的最小值.

4. 甲在一张 $n \times n$ 的棋盘上依次摆放一些棋子, 规则如下: 若一个格子是空的, 并且同行同列的剩下 $2n-2$ 个格子中棋子的个数为偶数, 那么甲可以在这个格子中放一颗棋子. 在放了 M 颗棋子之后, 甲发现他无法再放入任何棋子了, 请问 M 的最小可能值是多少?

5. 设函数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足对任意 x, $y \in \mathbb{R}$ 都有

$$|f(x+y) - f(x) - f(y)| \leq 1.$$

修订日期: 2020-08-29.

证明: 存在一个唯一的函数 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足对任意 x 都有

$$|g(x)-f(x)|\le 1,$$

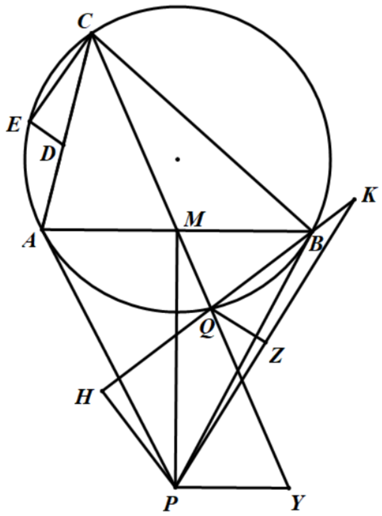
且对任意 $x,\ y\in\mathbb{R}$ 都有

$$g(x+y)=g(x)+g(y).$$

6. 在 $\triangle ABC$ 中, $BC>AC$, I_B 是 $B-$旁心, 过 C 且平行于 AB 的直线交 BI_B 于 F. 点 M 是 AI_B 的中点, 而 $A-$旁切圆与直线 AB 切于点 D. 点 E 与点 C 在同一侧, 且满足 $\angle BAC=\angle BDE$, $DE=BC$. 设 Q 是 EC, FM 的交点, P 为 EC, AB 的交点. 证明: P, A, M, Q 共圆.

II. 解答与评注

1. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $BC>AC$, Γ 是外接圆, D 是 AC 上一点, E 是以 CD 为直径的圆与 Γ 的另一个交点. M 是 AB 的中点, CM 交 Γ 于另一点 Q. 与 Γ 相切于 A, B 两点的两条直线交于点 P, 而 H 是 P 在 BQ 上的垂足. 点 K 是 HQ 上的一点, 满足 Q 在 H, K 之间. 证明: $\angle HKP=\angle ACE$ 当且仅当 $\frac{KQ}{QH}=\frac{CD}{DA}$.



证明 我们先证

$$\angle HKP=\angle ACE\Rightarrow\frac{KQ}{QH}=\frac{CD}{DA}.$$

若已知 $\angle HKP=\angle ACE$. 作 $QZ\perp PK$ 于 Z, 过 P 作 $PY\parallel AB$ 交 CQ 于 Y, 则 C, Q, M, Y 调和. 由 $PM\perp PY$ 可得

$$\angle CPM=\angle QPM\Rightarrow\angle APC=\angle BPQ.$$

因为 $\angle PBQ=\angle BCQ=\angle ACP$, 所以 $\triangle PAC\sim\triangle PQB$. 故

$\angle AEC=\pi-\angle CBA=\angle CAP=\angle PQB=\pi-\angle HQP=\pi-\angle HZP=\angle HZK$,

因此 $\triangle HZK\sim\triangle AEC$. 因为 $DE\perp EC$, $QZ\perp ZK$, 所以 Q 与 D 为相似对称点. 即

$$\frac{KQ}{QH}=\frac{CD}{DA}.$$

下面我们证明

$$\frac{KQ}{QH}=\frac{CD}{DA}\Rightarrow\angle HKP=\angle ACE.$$

若已知 $\frac{KQ}{QH}=\frac{CD}{DA}$, 由于

$$\angle PQH=\angle ABC>\angle ACE,$$

则 HQ 的延长线上必存在点 K' 满足 $\angle HK'P=\angle ACE$, 由前面的证明可得

$$\frac{K'Q}{QH}=\frac{CD}{DA},$$

即 K' 与 K 为同一点. $\square$

评注 $\angle HKP=\angle ACE\Rightarrow\frac{KQ}{QH}=\frac{CD}{DA}$ 的证明中, 比较容易找到相似三角形, 而 $\frac{KQ}{QH}=\frac{CD}{DA}\Rightarrow\angle HKP=\angle ACE$ 的证明则比较自然能够想到同一法.

2. 设 a, b 是两个正奇数. 证明: 对任意 $n\in\mathbb{N}$, 存在一个 $m\in\mathbb{N}$, 使得 2^n 至少整除 a^mb^2-1 和 b^ma^2-1 中的一个数.

证明 设 $\nu_2\left(a^2-1\right)=x$, $\nu_2\left(b^2-1\right)=y$, 不妨设 $x\leq y$. 下面证明: 对任意 $n\in\mathbb{N}$, 存在一个 $m\in\mathbb{N}$, 使得 $2^n\mid a^{2m}b^2-1$.

因为

$$a^{2^{n-x+1}}-1=\left(a^2-1\right)\left(a^2+1\right)\left(a^4+1\right)\left(a^8+1\right)\cdots\left(a^{2^{n-x}}+1\right),$$

而当 $i\geq 1$ 时, $\nu_2\left(a^{2^i}+1\right)=1$, 且 $\nu_2\left(a^2-1\right)=x$. 所以有

$$2^n||a^{2^{n-x+1}}-1.$$

若正整数 t 满足 $2^{n-x+1}\mid t$, 则有 $2^n\mid a^t-1$. 而若正整数 t 满足 $2^n\mid a^t-1$. 假设 $u=\nu_2\left(t\right)\leq n-x$, 则

$$2^n\mid a^{\left(2^{n-x+1},\,t\right)}-1.$$

即 $2^n\mid a^{2^u}-1$, 这与 $2^{u+x-1}||a^{2^u}-1$ 矛盾. 因此 $2^{n-x+1}\mid t$, 即

$$2^n|a^t-1\Leftrightarrow 2^{n-x+1}|t.$$

所以 $a^2,\ a^4,\ a^6,\ \cdots,\ a^{2^{n-x+1}}$ 这 2^{n-x} 个数模 2^n 互不同余. 而

$$a^{2k} \equiv \left(a^2\right)^k \equiv 1\,[2^x]\,.$$

故它们必为

$$1,\ 2^x+1,\ 2\cdot 2^x+1,\ 3\cdot 2^x+1,\ \cdots,\ \left(2^{n-x}-1\right)2^x+1$$

的一个排列. 而由 $b^2 \equiv 1\,[2^x]$ 可知 $(b^2)^{-1} \equiv 1\,[2^x]$, 这里 $(b^2)^{-1}$ 是 b^2 模 2^n 意义下的倒数. 所以存在 k, 使

$$a^{2k} \equiv \left(b^2\right)^{-1}[2^n]\,,$$

即

$$2^n | a^{2k}b^2-1. \qquad \square$$

评注 本题考察原根在 $p=2$ 时的推广, 了解原根这一个知识点的可以比较轻松地完成证明.

3. Ω 是一个由 $A=\{1,\ 2,\ \cdots,\ 100\}$ 的一些子集组成的集族, 满足

(1) 任何一个 A 的 $99-$元子集都在 Ω 中;

(2) 对任意一个非空集合 $C\in\Omega$, 都存在一个元素 $c\in C$ 使得 $C\backslash\{c\}\in\Omega$.

求 $|\Omega|$ 可能满足的最小值.

解 $|\Omega|$ 的最小值为 673.

对每个符合条件的 Ω, 构造一个对应的 Φ, 满足对集合 A 的任意子集 S, 都有 $S\in\Phi$ 当且仅当 $A\backslash S\in\Omega$, 此时 Φ 满足的性质为:

① $\{1\},\ \{2\},\ \cdots,\ \{100\}\in\Phi$;

② 对任意 $S\in\Phi(S\neq A)$, 存在 $c\notin S(c\in A)$, 使 $\{c\}\cup S\in\Phi$.

此时等价于求 $|\Phi|$ 的最小值.

我们用 $f(x)$ 表示由 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ x\}$ 的一些子集组成且满足条件①, ②的集族的元素个数的最小值, 即求 $f(100)$.

我们先证明

$$\begin{cases} f(2x+1)\leq f(x)+f(x+1)+2x \\ f(2x)\leq 2f(x)+2x-1 \end{cases}.$$

先考虑集合 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ 2x+1\}$, 将其分成两个集合

$$\{1,\ 2,\ \cdots,\ x\},\ \{x+1,\ x+2,\ \cdots,\ 2x+1\}.$$

对于每个集合可得到一个符合题意且元素个数最少的集族, 取这两个集族的并集, 再加入

$$\{1,\ 2,\ \cdots,\ i\}\,(i>x)\ \text{和}\ \{i,\ i+1,\ i+2,\ \cdots,\ 2x+1\}\,(2\le i\le x)$$

这 $2x$ 个集合, 则得到一个对于 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ 2x+1\}$ 的符合条件的集族. 所以有

$$f(2x+1)\le f(x)+f(x+1)+2x.$$

再考虑 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ 2x\}$, 将其分成两个集合

$$\{1,\ 2,\ \cdots,\ x\},\ \{x+1,\ x+2,\ \cdots,\ 2x\}$$

对于每个集合可得到一个符合题意且元素个数最少的集族, 取这两个集族的并集, 再加入

$$\{1,\ 2,\ \cdots,\ i\}\,(i>x)\ \text{和}\ \{i,\ i+1,\ i+2,\ \cdots,\ 2x\}\,(2\le i\le x)$$

这 $2x-1$ 个集合, 则得到一个对于 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ 2x\}$ 的符合条件的集族. 所以有

$$f(2x)\le 2f(x)+2x-1.$$

因为 $f(1)=1,\ f(2)=3,\ f(3)=6$, 所以

$$f(4)\le 9,\ f(6)\le 17,\ f(7)\le 21,\ f(12)\le 45,$$
$$f(13)\le 50,\ f(25)\le 119,\ f(50)\le 287,\ f(100)\le 673.$$

当 $|\Phi|$ 取最小值时, 若记 Φ 中拥有 i 个元素的集合有 x_i 个,

$$a_i=x_i-x_{i+1}\,(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 100,\ x_{101}=0),$$

则 $x_1\ge x_2\ge\cdots\ge x_{100}$, 否则 $|\Phi|$ 必定不取最小值.

下面证明

$$i\cdot a_{100}+i\cdot a_{99}+\cdots+i\cdot a_{2i-1}+(i-1)\cdot a_{2i-2}+(i-2)\cdot a_{2i-3}+\cdots+a_i\ge 100$$

对任意 $i\le 50$ 均成立.

首先我们知道, 对任意 $G\in\Phi$, 存在 $H\in\Phi,\ h\in A\backslash H$, 使得 $G=H\cup\{h\}$, 否则可以将 G 删去, 仍满足题意, 但不符合最小性. 我们考虑 $M\in\Phi,\ |M|=i+k$, 且存在 $S,\ T\in\Phi$ 和 $s,\ t\in A,\ s\notin S,\ t\notin T$, 满足

$$M=S\cup\{s\}=T\cup\{t\},$$

则存在集合 $X,\ Y\in\Phi,\ |X|=|Y|=i$, 满足 $X\subseteq S$ 和 $Y\subseteq T$. 即 S 是从 M 中删去 k 个元素而成, T 是从 M 中删去 k 个元素而成, 则最多删掉了 $2k$ 个元素, 故

$$|X\cap Y|\ge\max\{0,\ i-k\}.$$

对于固定的 i, 我们考虑所有上述的集合 $M\in\Phi$, 若存在 $S,\ T\in\Phi$ 和 $s,\ t\in A,\ s\notin S,\ t\notin T$, 满足

$$M=S\cup\{s\}=T\cup\{t\},$$

则我们称 S 和 T 合并为 M. 从 Φ 中所有 $(i+k-1)$ 元集合到所有 $(i+k)$ 元集合的过程中, 经过了 a_{i+k-1} 次合并, 每次合并我们可知至少有 $(i-k)$ 个重复元素. 而 ix_i-100 表示 Φ 中所有 i 元集合的元素的重复总次数, 所以有

$$ix_i-100\geq(i-1)\,a_i+(i-2)\,a_{i+1}+\cdots+a_{2i-2}.$$

考虑到 $x_i=a_i+a_{i+1}+\cdots+a_{100}$, 所以化简可得:

$$i\cdot a_{100}+i\cdot a_{99}+\cdots+i\cdot a_{2i-1}+(i-1)\cdot a_{2i-2}+(i-2)\cdot a_{2i-3}+\cdots+a_i\geq 100$$

在上式中分别取 $i=1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32$, 有

$$\begin{cases}a_{100}+a_{99}+\cdots+a_1=100\\ 2a_{100}+2a_{99}+\cdots+2a_3+a_2\geq 100\\ 4a_{100}+4a_{99}+\cdots+4a_7+3a_6+2a_5+a_4\geq 100\\ 8a_{100}+8a_{99}+\cdots+8a_{15}+7a_{14}+6a_{13}+\cdots+a_8\geq 100\\ 16a_{100}+16a_{99}+\cdots+16a_{15}+15a_{30}+14a_{29}+\cdots+a_{16}\geq 100\\ 32a_{100}+32a_{99}+\cdots+32a_{15}+31a_{62}+30a_{61}+\cdots+a_{32}\geq 100\end{cases}$$

相加可得

$$63a_{100}+63a_{99}+\cdots+63a_{63}+62a_{62}+61a_{61}+\cdots+a_1\geq 600. \qquad ③$$

而 $a_{100}=1$, 若 $a_{99}=0$, 则 $x_{99}=1$. 不妨设 Φ 中唯一的一个 99 元集合为 $\{1,2,\cdots,99\}$, 则任意一个 Φ 中的 98 元集合均不包含元素 100. 如此类推可得 Φ 中任意一个元素个数小于 100 的集合均不包含元素 100, 这与 $\{100\}\in\Phi$ 矛盾, 所以 $a_{99}\geq 1$. 故

$$37a_{100}+36a_{99}+\cdots+a_{64}\geq 37a_{100}+36a_{99}\geq 73. \qquad ④$$

③④相加, 可得

$$100a_{100}+99a_{99}+\cdots+a_1\geq 673,$$

即

$$f\,(100)=x_{100}+x_{99}+\cdots+x_1=100a_{100}+99a_{99}+\cdots+a_1\geq 673.$$

综上可得, $f\,(100)=673$, 即 $|\Omega|$ 的最小可能值为 673. □

评注 这题的构造与证明都比较困难, 证明过程的表达也有一定难度, 而且很难仅通过其中一项来猜出答案, 是一道需要频繁进行尝试的题目.

4. 甲在一张 $n\times n$ 的棋盘上依次摆放一些棋子, 规则如下: 若一个格子是空的, 并且同行同列的剩下 $2n-2$ 个格子中棋子的个数为偶数, 那么甲可以在这个格子中放一颗棋子. 在放了 M 颗棋子之后, 甲发现他无法再放入任何棋子了, 请问 M 的最小可能值是多少?

解 当 n 为奇数时, M 的最小值为 $\frac{n^2+1}{2}$; 当 n 为偶数时, M 的最小值为 $\frac{n^2+2n}{2}$.

首先, 对于任意一个 $m\times m$ 的正方形, 可将其划分为 m 组, 每组 m 个格子, 且同一组的格子均两两不同行不同列. 此时只需要依次放完每一组的格子即可将 $m\times m$ 的正方形填满. 所以构造如下:

当 $n=2k+1$ 时, 可以按照上述方式将位于左上角的 $k\times k$ 正方形和右下角的 $(k+1)\times(k+1)$ 正方形填满, 此时无法继续放入更多棋子了, 此时 $M=\frac{n^2+1}{2}$.

当 $n=2k$ 时, 我们先按照下面的顺序将第一行, 第一列和从左上到右下的对角线填满:

$$(1,\ 1)\to(2,\ 2)\to(1,\ 2)\to(2,\ 1)\to(1,\ 3)\to$$
$$(3,\ 1)\to(3,\ 3)\to(4,\ 4)\to(4,\ 1)\to(1,\ 4)\to\cdots.$$

接下来可以对右下角的 $(2k-1)\times(2k-1)$ 进行奇数情况的操作(这时左上到右下的对角线已经放入棋子, 可按照奇数情况的方式继续操作).此时$M=\frac{n^2+2n}{2}$.

我们先证明: 经过 i 次操作后, 若记 a_i 为有奇数个棋子的行数, b_i 为有奇数个棋子的列数, 则 $a_i=b_i$.

对 i 归纳, 当 $i=0$ 时显然成立.

设命题对 $i-1$ 成立, 现考虑第 i 次操作. 若这次操作的格子所在行和所在列的棋子数均为奇数, 则有 $a_i=a_{i-1}-1$, $b_i=b_{i-1}-1$, 由归纳假设可得 $a_i=b_i$. 若这次操作的格子所在行和所在列的棋子数均为偶数, 则有 $a_i=a_{i-1}+1$, $b_i=b_{i-1}+1$, 由归纳假设可得 $a_i=b_i$.

下面我们称有奇数个棋子的行为“奇行”, 有奇数个棋子的列为“奇列”. 若某次操作后不能再放棋, 此时记“奇行”和“奇列”的个数均为 a, 则“偶行”和“偶列”的个数均为 $n-a$. 此时每个“奇行”与每个“奇列”的公共格子上必有棋子, 否则可以继续再放棋. 同理, 每个“偶行”与每个“偶列”的公共格子上也必有棋子,

所以当 $n=2k+1$ 时, 至少有 $a^2+(n-a)^2$ 个棋子. 而

$$a^2+(n-a)^2=n^2+2a(n-a)\geq n^2+2k(k+1)=\frac{n^2+1}{2}.$$

当 $n=2k$ 时, 由于每个"奇行"与每个"奇列"的公共格子上必有棋子, 所以"奇行"和"奇列"都至少有 a 个棋子. 同理"偶行"和"偶列"都至少有 $n-a$ 个棋子.

(1) 若 a 为偶数, 对于任意一个"奇行", 它至少有 $a+1$ 个棋子, 也就是说除了这个"奇行"与所有 a 个"奇列"的 a 个公共格子里之外, 还至少有1个格子里有棋子, 这个棋子必定在"奇行"和"偶列"的公共格子上. 同理, 对于任意一个"奇列", 它至少有 $a+1$ 个棋子, 也就是说除了这个"奇列"与所有 a 个"奇行"的 a 个公共格子里之外, 还至少有1个格子里有棋子, 这个棋子必定在"奇列"和"偶行"的公共格子上. 所以总数至少为

$$\begin{aligned}(n-a)^2+a^2+2a&=n^2-2a(n-a-1)\\&\geq n^2-2k(k-1)=\frac{n^2+2n}{2}.\end{aligned}$$

(2) 若 a 为奇数, 对于任意一个"偶行", 它至少有 $n-a+1$ 个棋子, 也就是说除了这个"偶行"与所有 $n-a$ 个"偶列"的 $n-a$ 个公共格子里之外, 还至少有1 个格子里有棋子, 这个棋子必定在"偶行"和"奇列"的公共格子上. 同理, 对于任意一个"偶列", 它至少有 $n-a+1$ 个棋子, 也就是说除了这个"偶列"与所有 $n-a$ 个"奇行"的 $n-a$ 个公共格子里之外, 还至少有1个格子里有棋子, 这个棋子必定在"偶列"和"奇行"的公共格子上. 所以总数至少为

$$\begin{aligned}(n-a)^2+a^2+2(n-a)&=n^2+2n-2a(n-a+1)\\&\geq n^2+2n-2k(k+1)\\&=\frac{n^2+2n}{2}.\end{aligned}$$

综上所述, 当 n 为奇数时, M 的最小值为 $\frac{n^2+1}{2}$, 当 n 为偶数时, M 的最小值为 $\frac{n^2+2n}{2}$. □

评注 本题虽然构造比较容易, 但是突破口其实在证明, 关键在于对于行列棋子奇偶性的分析.

5. 设函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足对任意 $x, y\in\mathbb{R}$ 都有

$$|f(x+y)-f(x)-f(y)|\leq 1.$$

证明: 存在一个唯一的函数 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足对任意 x 都有

$$|g(x)-f(x)|\leq 1,$$

且对任意 $x,\ y\in\mathbb{R}$ 都有

$$g(x+y)=g(x)+g(y).$$

证明 对任意正整数 $n_1,\ n_2$, 有

$$\begin{aligned}n_2f(n_1x)&\le(n_2-2)f(n_1x)+f(2n_1x)+1\\&\le(n_2-3)f(n_1x)+f(3n_1x)+2\\&\cdots\\&\le f(n_2n_1x)+n_2-1\\&\le f(n_2x)+f[(n_1-1)n_2x]+n_2\\&\le n_1f(n_2x)+n_2+n_1-2\\&<n_1f(n_2x)+n_2+n_1.\end{aligned}$$

所以

$$\frac{f(n_1x)-1}{n_1}<\frac{f(n_2x)+1}{n_2}$$

对任意正整数 $n_1,\ n_2$ 和任意实数 x 成立.

考虑数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$,

$$a_n=\frac{f(nx)-1}{n},\ b_n=\frac{f(nx)+1}{n}.$$

则存在 $A,\ B\in\mathbb{R}$, 使得 $a_n\le A\le B\le b_n$. 又因为

$$\lim_{n\to+\infty}(b_n-a_n)=0,$$

所以对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $n_0\in\mathbb{N}$, 使得对任意 $n\ge n_0$, 都有 $|b_n-a_n|<\varepsilon$, 即

$$(b_n-B)+(B-A)+(A-a_n)<\varepsilon.$$

因为 $b_n-B\ge0,\ B-A\ge0,\ A-a_n\ge0$, 所以 $A=B$, 且 $|b_n-B|<\varepsilon,\ |a_n-A|<\varepsilon$, 即

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}b_n=A.$$

又因为

$$a_n<\frac{f(nx)}{n}<b_n,$$

所以对于 $n\in\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{f(nx)}{n}$ 存在.

设

$$g(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{f(nx)}{n},$$

下面证明 $g(x)$ 符合题意. 考虑到

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(nx)}{n}-f(x)\right| \\
&=\frac{1}{n}\left|f(nx)-nf(x)\right| \\
&\leq \frac{1}{n}\Big(\left|f(nx)-f[(n-1)x]-f(x)\right|+\left|f[(n-1)x]-(n-1)f(x)\right|\Big) \\
&\leq \frac{1}{n}\Big(1+\left|f[(n-1)x]-(n-1)f(x)\right|\Big) \\
&\cdots \\
&\leq \frac{1}{n}\times n \\
&=1.
\end{aligned}$$

所以 $|g(x)-f(x)|\leq 1$. 而

$$0\leq\left|\frac{f(nx+ny)}{n}-\frac{f(nx)}{n}-\frac{f(ny)}{n}\right|\leq\frac{1}{n},$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{f(nx+ny)}{n}-\frac{f(nx)}{n}-\frac{f(ny)}{n}\right]=0,$$

即

$$g(x+y)=g(x)+g(y).$$

所以 $g(x)$ 符合题意.

下面证明唯一性. 假设函数 $h(x)$ 符合题意, 且存在 $x_0\in\mathbb{R}$ 使得 $h(x_0)\neq g(x_0)$, 则存在 $k\in\mathbb{Z}$ 使得

$$|kg(x_0)-kh(x_0)|>2.$$

则

$$f(kx_0)\in[g(kx_0)-1,\ g(kx_0)+1].$$

又因为 $g(kx_0)=kg(x_0)$, 所以

$$f(kx_0)\in[kg(x_0)-1,\ kg(x_0)+1].$$

同理

$$f(kx_0)\in[kh(x_0)-1,\ kh(x_0)+1].$$

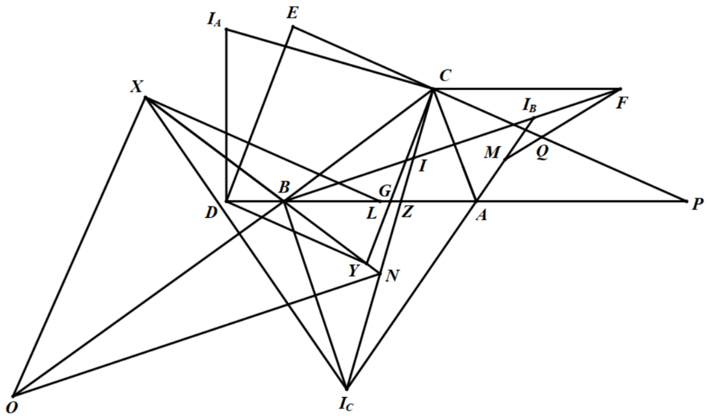
而 $|kg(x_0)-kh(x_0)|>2$, 所以

$$[kg(x_0)-1,\ kg(x_0)+1]\cup[kh(x_0)-1,\ kh(x_0)+1]=\varnothing.$$

所以不存在这样的函数 $h(x)$, 即唯一性得证. $\square$

评注 一定不要去试图解出 f, 先对 g 的形式进行一定分析, 然后去利用 g 的结构构造出 g, 再验证这个 g 符合条件且唯一.

6. 在 $\triangle ABC$ 中, $BC > AC$, I_B 是 $B-$旁心, 过 C 且平行于 AB 的直线交 BI_B 于 F. 点 M 是 AI_B 的中点, 而 $A-$旁切圆与直线 AB 切于点 D. 点 E 与点 C 在同一侧, 且满足 $\angle BAC = \angle BDE$, $DE = BC$. 设 Q 是 EC, FM 的交点, P 为 EC, AB 的交点. 证明: P, A, M, Q 共圆.



证明 设 I_C 是 $C-$旁心, N 为 I_CI 中点, 在 NB 的延长线上取一点 X, 使

$$\angle XI_CA = \angle BAC,$$

因为 $\triangle I_CBA \sim \triangle CI_BA$, 而

$$\angle XI_CA = \angle BAC = \angle FCA,\ \angle XBA = \pi - \angle ABN = \pi - \angle AI_BB = \angle FI_BA,$$

则 $I_CBAX \sim CI_BAF$. 设 AB 中点为 L, 则 L, M 为相似对应点, 所以

$$\angle XLB = \angle FMI_B.$$

而

$$P,\ A,\ M,\ Q \text{ 共圆 } \Leftrightarrow \angle FMI_B = \angle CPA \Leftrightarrow \angle XLB = \angle CPA \Leftrightarrow EC \parallel XL.$$

即只需证 $EC \parallel XL$ 即可.

作平行四边形 $CEDY$, 由 $BC = DE$ 得 $\triangle CBY$ 为等腰三角形. 所以有

$$\angle YBC = \frac{\pi}{2} - \frac{\angle BCY}{2}.$$

设 AB 与 CY 交于点 G, 则

$$\angle BCY = \angle CGA - \angle ABC = \angle EDA - \angle ABC = \angle BAC - \angle ABC.$$

所以

$$\angle YBC = \frac{\pi}{2} - \frac{\angle BAC}{2} + \frac{\angle CBA}{2} = \angle CBA + \frac{\angle ACB}{2} = \angle NBC,$$

即 $Y,\ B,\ N$ 共线.

设 I_CI 与 AB 交于 Z, O 是 $\triangle XBI_C$ 的外心, 则 $ON \perp BI_C$, 即 $ON \parallel BI$. 所以

$$\angle OBX = \frac{\pi}{2} - \angle BI_CX = \frac{\pi}{2} - \angle I_BCF = \frac{\pi}{2} - \frac{\angle BCY}{2} = \angle CBY,$$

即 $O,\ B,\ C$ 共线. 所以 $\triangle BOX \sim \triangle BCY$, 则

$$\frac{XB}{XY} = \frac{OB}{OC} = \frac{NI}{NC}.$$

而

$$DL = DB + BL = \frac{CB + CA - AB}{2} + \frac{AB}{2} = \frac{CB + CA}{2},$$

所以

$$\frac{BL}{DL} = \frac{AB}{CB + CA} = \frac{AZ}{AC} = \frac{NB}{NC} = \frac{NI}{NC},$$

即

$$\frac{XB}{XY} = \frac{BL}{DL}.$$

故 $XL \parallel DY \parallel EC$, 因此 $P,\ A,\ M,\ Q$ 共圆. $\square$

评注 直接去证明共圆无疑是很困难的, 但经过一个旋转相似对应后就可以消去很多飘在空中的点, 接下来的处理基本就是盯着图猜结论了, 导角复导边, 导边复导角即可.