2020 年第 61 届 IMO 试题解答

瞿振华

(华东师范大学, 200241)

I. 试题

第 1 题. 考虑凸四边形 $ABCD$. 设 P 是 $ABCD$ 内部一点, 且以下比例等式成立:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1:2:3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

证明: $\angle ADP$ 的内角平分线、$\angle PCB$ 的内角平分线和线段 AB 的垂直平分线三线共点.

(波兰供题)

第 2 题. 设实数 a,b,c,d 满足 $a \geq b \geq c \geq d > 0$, 且 $a+b+c+d=1$. 证明:

$$(a+2b+3c+4d)a^a b^b c^c d^d < 1.$$

(比利时供题)

第 3 题. 有 $4n$ 枚石子, 重量分别为 $1,2,3,\cdots,4n$. 每一枚小石子都染了 n 种颜色之一, 使得每种颜色的小石子恰有四枚. 证明: 我们可以把这些小石子分成两堆, 同时满足以下两个条件:

- 两堆小石子有相同的总重量;
- 每一堆恰有每种颜色的小石子各两枚.

(匈牙利供题)

第 4 题. 给定整数 $n > 1$. 在一座山上有 n^2 个高度互不相同的缆车车站, 有两家缆车公司 A 和 B, 各运营 k 辆缆车; 每辆从一个车站运行到某个更高的车站(中间不停留其他车站). A 公司的 k 辆缆车的 k 个起点互不相同, k 个终点也互不相同, 并且起点较高的缆车, 它的终点也较高. B 公司的缆车也满足相同的条件. 我们称两个车站被某家公司连接, 如果可以从其中较低的车站通过该公司的一辆或多辆缆车到达较高的车站(中间不允许在车站之间有其他移动).

确定最小的正整数 k, 使得一定有两个车站被两家公司同时连接.

(印度供题)

第 5 题. 有一叠 $n>1$ 张卡片. 在每张卡片上写有一个正整数. 这叠卡片具有如下性质: 其中任意两张上的数的算术平均值也等于这叠卡片中某一张或几张卡片上的数的几何平均值.

确定所有的 n, 使得可以推出所有卡片上的数均相等.

(爱沙尼亚供题)

第 6 题. 证明: 存在正常数 c 具有下述性质: 对任意整数 $n>1$, 以及平面上 n 个点的集合 $\mathcal{S}$, 若 $\mathcal{S}$ 中任意两点之间的距离不小于 1, 则存在一条分离 $\mathcal{S}$ 的直线 ℓ, 使得 $\mathcal{S}$ 中的每个点到直线 ℓ 的距离不小于 $cn^{-1/3}$ (我们称直线 ℓ 分离点集 $\mathcal{S}$, 如果某条以 $\mathcal{S}$ 中两点为端点的线段与 ℓ 相交).

注. 如果证明了比 $cn^{-1/3}$ 弱的估计 $cn^{-\alpha}$, 会根据 $\alpha>1/3$ 的值, 适当给分.

(中国台湾供题)

II. 解答

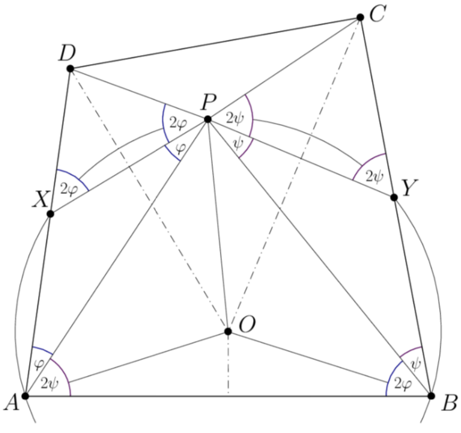
第 1 题. 考虑凸四边形 $ABCD$. 设 P 是 $ABCD$ 内部一点, 且以下比例等式成立:

$$\angle PAD:\angle PBA:\angle DPA=1:2:3=\angle CBP:\angle BAP:\angle BPC.$$

证明: $\angle ADP$ 的内角平分线、$\angle PCB$ 的内角平分线和线段 AB 的垂直平分线三线共点.

(波兰供题)

证明: 如图所示,



设 $\varphi=\angle PAD,\ \psi=\angle CBP$, 则由条件可知

$$\angle PBA=2\varphi,\ \angle DPA=3\varphi,\ \angle BAP=2\psi,\ \angle BPC=3\psi.$$

设点 X 在线段 AD 上, 满足 $\angle XPA=\varphi$. 于是

$$\angle PXD=\angle PAX+\angle XPA=2\varphi=\angle DPA-\angle XPA=\angle DPA.$$

由此知三角形 DPX 是等腰三角形, $DX=DP$, 于是 $\angle ADP$ 的内角平分线也是 XP 的中垂线. 类似地, 如果 Y 在线段 BC 上, 满足 $\angle BPY=\psi$, 则 $\angle PCB$ 的内角平分线也是 PY 的中垂线.

问题转化为证明 XP, PY, AB 的中垂线三线共点. 注意到

$$\angle AXP=180^\circ-\angle PXD=180^\circ-2\varphi=180^\circ-\angle PBA.$$

从而 $AXPB$ 是圆内接四边形, 即 X 在三角形 APB 的外接圆上. 类似可知, Y 在三角形 APB 的外接圆上. 于是 A, B, Y, P, X 五点共圆, 从而 AP, PY, AB 的中垂线都经过该圆的圆心. □

第 2 题. 设实数 a, b, c, d 满足 $a\geq b\geq c\geq d>0$, 且 $a+b+c+d=1$. 证明:

$$(a+2b+3c+4d)a^a b^b c^c d^d<1.$$

(比利时供题)

证明: 由于 $a+b+c+d=1$, 由加权均值不等式得

$$a^a b^b c^c d^d\leq a\cdot a+b\cdot b+c\cdot c+d\cdot d=a^2+b^2+c^2+d^2.$$

故只需证明 $(a+2b+3c+4d)(a^2+b^2+c^2+d^2)<1$.

由于 $a\geq b\geq c\geq d>0$, 故

$$\begin{aligned}(a+b+c+d)^3&>a^2(a+3b+3c+3d)+b^2(3a+b+3c+3d)\\&\quad+c^2(3a+3b+c+3d)+d^2(3a+3b+3c+d)\\&\geq(a+2b+3c+4d)(a^2+b^2+c^2+d^2),\end{aligned}$$

再结合 $a+b+c+d=1$, 可知结论成立. □

第 3 题. 有 $4n$ 枚石子, 重量分别为 $1, 2, 3, \cdots, 4n$. 每一枚小石子都染了 n 种颜色之一, 使得每种颜色的小石子恰有四枚. 证明: 我们可以把这些小石子分成两堆, 同时满足以下两个条件:

- 两堆小石子有相同的总重量;

- 每一堆恰有每种颜色的小石子各两枚.

(匈牙利供题)

证明: 设 n 种颜色为 $c_1, c_2, \cdots, c_n$, 小石子集合记为 $\{p_1, p_2, \cdots, p_{4n}\}$, p_i 表示重量为 i 的小石子.

下面构造图 $G=(V,E)$, 其中顶点集 $V=\{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$, 边集的定义如下: 对每个 $1 \le i \le 2n$, 若 p_i 的颜色为 u, p_{4n+1-i} 的颜色为 v, 则在 u, v 之间连一条边, 对应于小石子对 (p_i, p_{4n+1-i}). 这样 G 共有 $2n$ 条边, 可能含环边(当 p_i 与 p_{4n+1-i} 同色时)或重边, 由于每种颜色的小石子恰有四枚, 因此 G 是 4-正则图(注意, 一条环边在顶点处需计入度数 2).

我们证明下面的引理:

引理: 任何一个 4-正则图都有一个 2-正则生成子图.

引理的证明: 只需对连通图来证明, 一般情形对每个连通分支取 2-正则生成子图即可. 假设 $G=(V,E)$ 是一个连通的 4-正则图, $|V|=n$, $|E|=2n$. 由于每个顶点处的度数均为偶数, 由欧拉一笔画定理, G 中存在一个欧拉闭迹 L. 将 L 中的边交替地分到集合 E_1, E_2 中, 则 $|E_1|=|E_2|=n$, 且 $(V,E_1),(V,E_2)$ 均是 2-正则生成子图.

事实上, 考察一个顶点 v, 若 v 处没有环边, 则 L 经过 v 两次, 每次进入 v 和走出 v 的两条 L 上相邻边分别属于 E_1 和 E_2, 因此 v 处恰有 2 条 E_1 中的边, v 在 (V,E_1) 中的度等于 2.

若 v 处恰有一条环边, 则 L 中有连续三条边 e_1, e, e_2, 其中 e 是 v 处的环边, e_1, e_2 是 v 处的另两条(非环)边, 则 e_1, e_2 同属于某个 E_i, e 属于另一个 E_{3-i}, 这样 v 在 (V,E_1) 中的度也是 2.

若 v 处恰有两条环边, 由图的连通性可知 $n=1$, 此时两条环边分别属于 E_1, E_2, v 在 (V,E_1) 中的度等于 2. 引理得证.

回到原问题, 我们作出的图 $G=(V,E)$ 是 4-正则图, 由引理结论, 可将 E 分为两组 E_1, E_2, $|E_1|=|E_2|=n$, 且 (V,E_1) 和 (V,E_2) 均为 2-正则生成子图. 由 G 的边集的定义, 每一条边对应于一对小石子 (p_i, p_{4n+1-i}). 现将 E_i 中 n 条边对应的 n 对小石子作为第 i 堆小石子, $i=1,2$, 由于每对小石子的重量之和均为 $4n+1$, 因此两堆小石子有相同的总重量 $n(4n+1)$. 又 (V,E_1) 和 (V,E_2) 均为 2-正则生成子图, 因此每一堆恰有每种颜色的小石子各两枚. $\square$

注. 题中所证引理是下面定理的一个特殊情形. 对图 $G=(V,E)$, 若每个

顶点的度均为 k, 则称 G 是 k -正则图. 对 G 的生成子图 $H=(V,E')$, $E'\subseteq E$, 若 H 是 r -正则图, 则称 H 是 G 的一个 r -因子. 1-因子也称为完美匹配.

Petersen 2-**因子定理**: 设 G 是一个 $2k$ -正则图(可有环边或重边), 则 G 有 2-因子.

第 4 题. 给定整数 $n>1$. 在一座山上有 n^2 个高度互不相同的缆车车站, 有两家缆车公司 A 和 B, 各运营 k 辆缆车; 每辆从一个车站运行到某个更高的车站(中间不停留其他车站). A 公司的 k 辆缆车的 k 个起点互不相同, k 个终点也互不相同, 并且起点较高的缆车, 它的终点也较高. B 公司的缆车也满足相同的条件. 我们称两个车站被某家公司*连接*, 如果可以从其中较低的车站通过该公司的一辆或多辆缆车到达较高的车站(中间不允许在车站之间有其他移动).

确定最小的正整数 k, 使得一定有两个车站被两家公司同时连接.

(印度供题)

解答: 答案是 n^2-n+1.

首先我们说明对 $k\le n^2-n$, 存在一种缆车的运行路线, 使得不存在两个车站同时被两家公司连接. 显然只需对 $k=n^2-n$ 举例, 对更小的 k, 从中删去一些缆车即可. 设 $S_1,S_2,\cdots,S_{n^2}$ 是高度依次递增的 n^2 个车站.

考虑 A 公司的 n^2-n 辆缆车, 从 S_i 到 S_{i+1}, 其中 $1\le i\le n^2$, 且 $n\mid i$; B 公司的 n^2-n 辆缆车, 从 S_i 到 S_{i+n}, 其中 $1\le i\le n^2-n$. 从而 S_i,S_j 被 A 公司连接当且仅当 $\lceil \frac{i}{n}\rceil=\lceil \frac{j}{n}\rceil$, 被 B 公司连接当且仅当 $i\equiv j \pmod n$, 显然这两个条件不能同时成立, 故没有两个车站同时被 A 公司和 B 公司连接.

下面证明当 $k=n^2-n+1$ 时, 一定有两个车站被两家公司同时连接. 定义有向图 G_A, 顶点集为 n^2 个车站 $\{S_1,S_2,\cdots,S_{n^2}\}$, 对于 $1\le i<j\le n^2$, 当且仅当 A 公司有一辆缆车从 S_i 运行到 S_j 时, 连一条有向边 $S_i\to S_j$.

由条件知, G_A 中每个顶点至多一条出边, 也至多一条入边, 且由于有向边只能从下标较小的顶点指向下标较大的顶点, 因此 G_A 也不含有向圈. 易知 G_A 是若干个有向链的并(一个有向链可以只有一个顶点), 每个有向链上的两个车站是被 A 公司连通的. 由于有 n^2-n+1 条边, 有 n^2-n+1 个顶点有入边, 恰有 $n-1$ 个顶点没有入边, 因此 G_A 有 $n-1$ 条有向链.

由抽屉原理, 其中有一个有向链至少含有 $\lceil \frac{n^2}{n-1}\rceil=n+2$ 个顶点, 设这个有向链上的顶点集为 X, $|X|\ge n+2$. 类似定义有向图 G_B, 同样地, G_B 也有 $n-1$ 条有向链, 从而 X 中有两个顶点 S_i,S_j 在 G_B 的同一个有向链上, 于

是 S_i, S_j 同时被 A 公司和 B 公司连接. $\square$

第 5 题. 有一叠 $n>1$ 张卡片. 在每张卡片上写有一个正整数. 这叠卡片具有如下性质: 其中任意两张上的数的算术平均值也等于这叠卡片中某一张或几张卡片上的数的几何平均值.

确定所有的 n, 使得可以推出所有卡片上的数均相等.

(爱沙尼亚供题)

解答: 对所有 $n>1$, 都能推出卡片上的数均相等.

等价地, 我们证明如下命题: 若 $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$ 是不全相等的正整数, 则存在其中两个数, 它们的算术平均值不等于其中任何一部分数的几何平均值.

设 $d=\gcd(a_1, a_2, \cdots, a_n)$. 若 $d>1$, 可将 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 换成 $\frac{a_1}{d}, \frac{a_2}{d}, \cdots, \frac{a_n}{d}$, 此时所有算术平均值和几何平均值都除以 d, 所证结论与原 n 个数等价. 因此可不妨设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 互素.

由于 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 不全相等, 故 $a_n \ge 2$. 设 p 是 a_n 的素因子, 由于 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 互素, 因此存在 $1 \le k \le n-1$, 使得 $p \nmid a_k$. 取这样的 a_k, 且 k 最大. 下面我们说明 $\frac{a_n+a_k}{2}$ 不能表示为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中一部分数的几何平均值.

反证法, 假设存在 $1 \le i_1 < \cdots < i_m \le n$, 使得 $\sqrt[m]{a_{i_1} \cdots a_{i_m}} = \frac{a_k+a_n}{2}$, 即

$$2^m a_{i_1} \cdots a_{i_m} = (a_k+a_n)^m.$$

若 $i_m > k$, 则 $p \mid a_{i_m}$, 但 $p \nmid a_k + a_n$, 因此上式左边被 p 整除, 右边不被 p 整除, 矛盾.

若 $i_m \le k$, 由于 $a_k < a_n$, 有

$$\sqrt[m]{a_{i_1} \cdots a_{i_m}} \le a_{i_m} \le a_k < \frac{a_k+a_n}{2},$$

也矛盾. 结论获证. $\square$

第 6 题. 证明: 存在正常数 c 具有下述性质: 对任意整数 $n>1$, 以及平面上 n 个点的集合 $\mathcal{S}$, 若 $\mathcal{S}$ 中任意两点之间的距离不小于 1, 则存在一条分离 $\mathcal{S}$ 的直线 ℓ, 使得 $\mathcal{S}$ 中的每个点到直线 ℓ 的距离不小于 $cn^{-1/3}$. (我们称直线 ℓ 分离点集 $\mathcal{S}$, 如果某条以 $\mathcal{S}$ 中两点为端点的线段与 ℓ 相交.)

注. 如果证明了比 $cn^{-1/3}$ 弱的估计 $cn^{-\alpha}$, 会根据 $\alpha > 1/3$ 的值, 适当给分.

(中国台湾供题)

证明: 我们证明 $c=\frac{1}{16}$ 满足要求.

记 $\delta = cn^{-\frac{1}{3}}$. 对平面上有限点集 $\mathcal{S}$ 以及直线 ℓ, 记 $\delta(\mathcal{S},\ell)$ 为 $\mathcal{S}$ 中点到 ℓ 距离的最小值.

反证法, 假设结论不成立, 则存在平面上 n 个点的集合 $\mathcal{S}$, $n \geq 2$, 使得对任意分离 $\mathcal{S}$ 的直线 ℓ, 均有 $\delta(S,\ell) < \delta$. 取 $\mathcal{S}$ 中距离最大的两点 A, B, 设 $d = |AB|$, 显然 $d \geq 1$. 以 A 为原点, $\overrightarrow{AB}$ 为 x 轴正方向, 建立直角坐标系. 设 $\mathcal{S}$ 中点的横坐标从小到大依次为 $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$, 由于 $\mathcal{S}$ 中所有点落在下面两个闭圆盘 D_A 和 D_B 的交集中,

$$D_A = \{P \in \mathbb{R}^2 : |PA| \leq d\}, \quad D_B = \{P \in \mathbb{R}^2 : |PB| \leq d\}.$$

$\mathcal{S}$ 中所有点的横坐标都在区间 $[0,d]$ 中, 因此 $d_1 = 0$, $d_n = d$.

若存在 $1 \leq i \leq n-1$, 使得 $d_{i+1} - d_i \geq 2\delta$, 则直线 $\ell : x = \frac{d_i + d_{i+1}}{2}$ 分离 $\mathcal{S}$, 且 $\delta(\mathcal{S},\ell) \geq \delta$, 与反证法假设矛盾.

所以对任意 $1 \leq i \leq n-1$, 均有 $d_{i+1} - d_i < 2\delta$. 现考虑条形区域 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 中 $\mathcal{S}$ 的点, 设这些点为 $P_1, P_2, \cdots, P_k$, 其中 P_i 的坐标为 (d_i, y_i), $i = 1, 2, \cdots, k$. 由于 $d_i \leq 2(i-1)\delta$, 故 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 中至少有 $\lceil \frac{1}{4\delta} \rceil$ 个数属于区间 $[0, \frac{1}{2}]$, 即 $k \geq \lceil \frac{1}{4\delta} \rceil \geq \frac{1}{4\delta}$.

对任意 $1 \leq i < j \leq k$, 由于 $|d_j - d_i| \leq \frac{1}{2}$, 而 $|P_iP_j| \geq 1$, 故 $|y_j - y_i| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$. 即 $y_1, y_2, \cdots, y_k$ 中任意两数之差的绝对值不小于 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 从而

$$\max_{1\leq i\leq k} y_i - \min_{1\leq i\leq k} y_i \geq (k-1)\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

而带状区域 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 与圆盘 D_B 的交集是一个弓形区域, 最高点和最低点是直线 $x = \frac{1}{2}$ 与圆周 $(x-d)^2 + y^2 = d^2$ 的交点, $(\frac{1}{2}, \pm\sqrt{d - \frac{1}{4}})$. 因此

$$\max_{1\leq i\leq k} y_i - \min_{1\leq i\leq k} y_i \leq 2\sqrt{d - \frac{1}{4}} < 2\sqrt{d}.$$

结合上面两个不等式, 以及 $k \geq \frac{1}{4\delta} > 2$, 即得

$$2\sqrt{d} > (k-1)\frac{\sqrt{3}}{2} \geq \frac{\sqrt{3}}{4}k \geq \frac{\sqrt{3}}{16\delta}.$$

两边平方, 再利用 $d < 2n\delta$, 有

$$8n\delta > 4d > \frac{3}{256\delta^2},$$

即 $2048n\delta^3 > 3$. 代入 $\delta = cn^{-\frac{1}{3}}$, 有 $2048n\delta^3 = 2048c^3 > 3$. 但对于 $c = \frac{1}{16}$, 有 $2048c^3 < 3$, 矛盾. 故反证法假设不成立, $c = \frac{1}{16}$ 满足题目要求. □