2020 年丝绸之路数学竞赛解答与评析

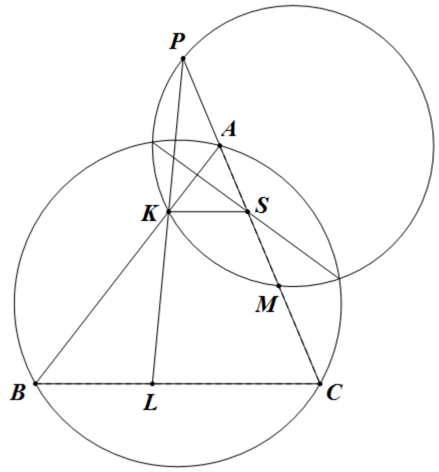
郭尧昱
(中国人民大学附属中学, 100080)
指导教师: 张端阳

本文给出 2020 年丝绸之路数学竞赛的解析和简评. 总体而言没有难度过高的题目, 其中前两题是高中联赛中档题难度, 后两题是冬令营中档题难度. 不当之处, 敬请读者批评指正.

I. 试 题

1. 设 $\{a_n\}$ 是严格单调递增的无穷正整数数列, 满足对任意正整数 n, $a_n \le n + 2020$, 且 $a_{n+1} \mid n^3 a_n - 1$. 证明: 对任意正整数 n, $a_n = n$.

2. 如图, ω 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, K, L, M 分别是边 AB, BC, CA 上的点, 满足 $CM \cdot CL = AM \cdot BL$. 延长 LK, CA 交于点 P, $\triangle KMP$ 的外接圆与圆 ω 的公共弦与线段 AM 交于点 S. 证明: $SK \parallel BC$.



3. 对于实系数多项式 $Q(x) = k_n x^n + k_{n-1} x^{n-1} + \cdots + k_0$, 若

$$|k_0| = |k_1| + |k_2| + \cdots + |k_n|,$$

修订日期: 2020-09-23.

则称它是"强力的"; 若 $k_0 \geq k_1 \geq \cdots \geq k_n$, 则称它是"非增的".

设 $P(x)=a_dx^d+a_{d-1}x^{d-1}+\cdots+a_0$ 是各项系数非零的实系数多项式, 满足 $a_d>0$. 已知存在非负整数 s,t, 使得 $s+t>0$, 且多项式 $P(x)(x-1)^t(x+1)^s$ 是强力的, 证明: 多项式 $P(x)$ 和 $(-1)^dP(-x)$ 中至少有一个是非增的.

4. 证明: 对任意正整数 m, 存在正整数 n, 使得平面上任意 n 个不同的点可以被分成 m 个非空的点集, 满足它们的凸包有一个公共点.

注: 有限点集 X 的凸包是指所有顶点均为 X 中的点, 且包含 X 中所有点的凸多边形. 这里的包含指 X 中的点均在这个凸多边形的边界或内部. 这个凸多边形可以退化为线段或点, 凸多边形的任意三个顶点不共线.

II. 解答与评注

1. 设 $\{a_n\}$ 是严格单调递增的无穷正整数数列, 满足对任意正整数 n, $a_n \leq n+2020$, 且 $a_{n+1} \mid n^3a_n-1$. 证明: 对任意正整数 n, $a_n=n$.

证明 1 因为 $\{a_n\}$ 是严格单调递增的正整数数列, 所以 $a_n \geq n$. 记 $b_n=a_n-n$, 则由条件, $0 \leq b_n \leq 2020$.

由 $a_{n+1}>a_n$, 知

$$b_{n+1}=a_{n+1}-(n+1)>a_n-(n+1)=b_n-1,$$

进而由 $\{b_n\}$ 是整数列, 知 $b_{n+1} \geq b_n$.

因为数列 $\{b_n\}$ 有上界 2020, 所以存在正整数 N 和整数 $0 \leq c \leq 2020$, 使得当 $n \geq N$ 时, b_n 恒等于 c, 从而 $a_n=n+c$.

这样, 当 $n \geq N$ 时,

$$n+c+1 \mid n^3(n+c)-1.$$

因为

$$n^3(n+c)-1 \equiv (c+1)^3-1 \pmod{n+c+1},$$

所以

$$n+c+1 \mid (c+1)^3-1.$$

取 n 使得 $n+c+1>(c+1)^3-1$, 则 $(c+1)^3-1=0$, 解得 $c=0$. 于是当 $n \geq N$ 时, $a_n=n$.

又由 $\{a_n\}$ 严格单调递增, 知当 $n<N$ 时, 也有 $a_n=n$.

综上, 命题得证. $\square$

证明 2 因为 $\{a_n\}$ 是严格单调递增的正整数数列, 所以 $a_{n+1} \geq n+1$. 又由条件, $a_{n+1} \leq n+2021$, 所以 $n+1 \leq a_{n+1} \leq n+2021$.

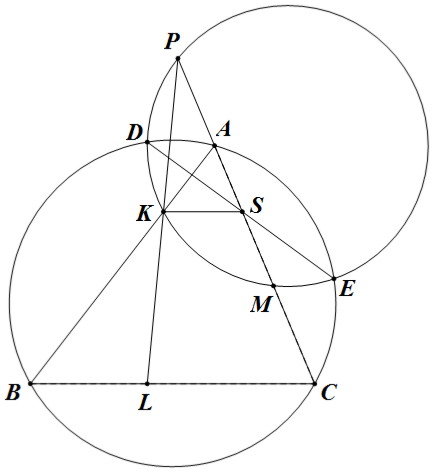
由 $a_{n+1} \mid n^3 a_n - 1$, 知 $(a_{n+1}, n) = 1$. 当 $2021! \mid n$ 时, $(a_{n+1}, 2021!) = 1$, 所以 $a_{n+1} \neq n+2, n+3, \cdots, n+2021$, 故 $a_{n+1} = n+1$.

由 $\{a_n\}$ 严格单调递增, 知当 $i \leq n$ 时, 也有 $a_i = i$.

因为有无穷多个正整数能被 2021! 整除, 所以命题得证. □

评注 注意到 a_n 的取值范围有限, 且数列严格递增, 故可在 n 较大时确定 a_n 的取值, 再反推 n 较小时的情形. 上述先研究较大的 n, 再反推的方法在很多数列问题中均可见到.

2. 如图, ω 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, K, L, M 分别是边 AB, BC, CA 上的点, 满足 $CM \cdot CL = AM \cdot BL$. 延长 LK, CA 交于点 P, $\triangle KMP$ 的外接圆与圆 ω 的公共弦与线段 AM 交于点 S. 证明: $SK \parallel BC$.



证明 对 $\triangle PLC$ 及截线 AKB 用梅涅劳斯定理得,

$$\frac{PK}{KL} \cdot \frac{LB}{BC} \cdot \frac{CA}{AP} = 1,$$

所以

$$\frac{PK}{KL} = \frac{BC}{LB} \cdot \frac{AP}{CA}.$$

由条件, $CM \cdot CL = AM \cdot BL$, 即

$$\frac{CL}{BL} = \frac{AM}{CM}.$$

于是由比例的性质,

$$\frac{BC}{BL} = \frac{CA}{CM}.$$

这样,
$$\frac{PK}{KL}=\frac{CA}{CM}\cdot\frac{AP}{CA}=\frac{AP}{CM}. \qquad ①$$

设 $\triangle KMP$ 的外接圆与圆 ω 的公共弦为 DE. 由相交弦定理,
$$SA\cdot SC=SD\cdot SE=SP\cdot SM,$$
即
$$\frac{SA}{SM}=\frac{SP}{SC}.$$
于是由比例的性质,
$$\frac{SP}{SC}=\frac{SP-SA}{SC-SM}=\frac{AP}{CM}. \qquad ②$$

结合 ①、② 得,
$$\frac{PK}{KL}=\frac{SP}{SC},$$
故 $SK\parallel BC$. □

评注 本题本质是直线型问题, 考察对边比例的转化. 也可以将两个比例设为基本量, 用它们表示其他的比例, 这种方法更代数一些, 不如上面的方法美观.

3. 对于实系数多项式 $Q(x)=k_nx^n+k_{n-1}x^{n-1}+\cdots+k_0$, 若
$$|k_0|=|k_1|+|k_2|+\cdots+|k_n|,$$
则称它是"强力的"; 若 $k_0\geq k_1\geq\cdots\geq k_n$, 则称它是"非增的".

设 $P(x)=a_dx^d+a_{d-1}x^{d-1}+\cdots+a_0$ 是各项系数非零的实系数多项式, 满足 $a_d>0$. 已知存在非负整数 s,t, 使得 $s+t>0$, 且多项式 $P(x)(x-1)^t(x+1)^s$ 是强力的, 证明: 多项式 $P(x)$ 和 $(-1)^dP(-x)$ 中至少有一个是非增的.

证明 先证明 $t\leq 1$.

若 $t\geq 2$, 记多项式
$$Q(x)=P(x)(x-1)^{t-2}(x+1)^s,$$
则 $Q(x)$ 是实系数多项式, 首项系数为正, 且 $Q(x)(x-1)^2$ 是强力的.

设
$$Q(x)(x-1)^2=k_nx^n+k_{n-1}x^{n-1}+\cdots+k_0,$$
则 $k_n>0$, 且 $|k_0|=|k_1|+|k_2|+\cdots+|k_n|$. 取 $x=1$ 得,
$$k_n+k_{n-1}+\cdots+k_0=0,$$

所以

$$|k_0| = |k_n + k_{n-1} + \cdots + k_1|.$$

这样,

$$|k_1| + |k_2| + \cdots + |k_n| = |k_n + k_{n-1} + \cdots + k_1|,$$

结合 $k_n > 0$, 知 $k_{n-1}, \cdots, k_1$ 均非负.

设

$$Q(x)(x-1) = j_{n-1}x^{n-1} + j_{n-2}x^{n-2} + \cdots + j_0, \tag{$*$}$$

则

$$\begin{aligned} Q(x)(x-1)^2 =& (j_{n-1}x^{n-1} + j_{n-2}x^{n-2} + \cdots + j_0)(x-1) \\ =& j_{n-1}x^n + (j_{n-2} - j_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (j_0 - j_1)x - j_0. \end{aligned}$$

由上面的论证, $j_{n-1} > 0$ 且 $j_{n-2} - j_{n-1}, \cdots, j_0 - j_1$ 均非负, 所以

$$0 < j_{n-1} \leq j_{n-2} \leq \cdots \leq j_1 \leq j_0.$$

但在 $(*)$ 中取 $x = 1$ 得,

$$j_{n-1} + j_{n-2} + \cdots + j_0 = 0,$$

矛盾!

再证明 $s \leq 1$.

对实系数多项式 $R(x) = b_r x^r + b_{r-1}x^{r-1} + \cdots + b_0$, 记

$$\overline{R(x)} = (-1)^r R(-x) = b_r x^r + (-1)b_{r-1}x^{r-1} + \cdots + (-1)^r b_0.$$

由定义, 若 $R(x)$ 是强力的, 则 $\overline{R(x)}$ 也是强力的.

注意到对实系数多项式 $A(x), B(x)$,

$$\overline{A(x)B(x)} = (-1)^{\deg A + \deg B} A(-x)B(-x) = \overline{A(x)} \cdot \overline{B(x)}.$$

因为 $P(x)(x-1)^t(x+1)^s$ 是强力的, 所以

$$\overline{P(x)(x-1)^t(x+1)^s} = \overline{P(x)}(\overline{x-1})^t(\overline{x+1})^s = \overline{P(x)}(x+1)^t(x-1)^s$$

是强力的. 同上面的论证, 知 $s \leq 1$.

从而 $(s,t) = (1,1)$ 或 $(0,1)$ 或 $(1,0)$.

当 $(s,t) = (1,1)$ 时,

$$\begin{aligned} &P(x)(x+1)(x-1) = (a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_0)(x^2 - 1) \\ =& a_d x^{d+2} + a_{d-1}x^{d+1} + (a_{d-2} - a_d)x^d + \cdots + (a_0 - a_2)x^2 - a_1 x - a_0. \end{aligned}$$

因为 $P(x)(x+1)(x-1)$ 是强力的, 所以

$$\begin{aligned}|a_0| =&|a_d|+|a_{d-1}|+|a_{d-2}-a_d|+\cdots+|a_0-a_2|+|a_1|\\ \geq&|(a_0-a_2)+(a_2-a_4)+\cdots+(a_{2[\frac{d}{2}]-2}-a_{2[\frac{d}{2}]})+a_{2[\frac{d}{2}]}|\\ &+|a_1|+|a_1-a_3|+\cdots+|a_{2[\frac{d-1}{2}]+1}|\\ \geq&|a_0|+|a_1|+|a_1-a_3|+\cdots+|a_{2[\frac{d-1}{2}]+1}|,\end{aligned}$$

从而

$$a_1=a_3=\cdots=a_{2[\frac{d-1}{2}]+1}=0,$$

这与 $P(x)$ 的系数非零矛盾!

当 $(s,t)=(0,1)$ 时,

$$\begin{aligned}P(x)(x-1)&=(a_dx^d+a_{d-1}x^{d-1}+\cdots+a_0)(x-1)\\ &=a_dx^{d+1}+(a_{d-1}-a_d)x^d+\cdots+(a_0-a_1)x-a_0.\end{aligned}$$

因为 $P(x)(x-1)$ 是强力的, 所以

$$\begin{aligned}|a_0| =&|a_d|+|a_{d-1}-a_d|+\cdots+|a_0-a_1|\\ \geq&|(a_0-a_1)+(a_1-a_2)+\cdots+(a_{d-1}-a_d)+a_d|\\ =&|a_0|.\end{aligned}$$

从而

$$a_d,a_{d-1}-a_d,\cdots,a_0-a_1$$

同非负, 所以

$$a_0\geq a_1\geq\cdots\geq a_d,$$

即 $P(x)$ 是非增的.

当 $(s,t)=(1,0)$ 时, $P(x)(x+1)$ 是强力的, 所以

$$\overline{P(x)(x+1)}=\overline{P(x)}\cdot\overline{(x+1)}=\overline{P(x)}(x-1)$$

是强力的. 这样由 $(s,t)=(0,1)$ 的情形知, $\overline{P(x)}$ 是非增的.

综上, 命题得证. $\square$

评注 本题过程较长, 关键在于发现 $x+1$ 和 $x-1$ 具有与 $P(x)$ 和 $(-1)^dP(-x)$ 相同的关系, 比较系数可知 s 与 t 均只能取 0 或 1, 再讨论即可.

4. 证明: 对任意正整数 m, 存在正整数 n, 使得平面上任意 n 个不同的点可以被分成 m 个非空的点集, 满足它们的凸包有一个公共点.

注: 有限点集 X 的凸包是指所有顶点均为 X 中的点, 且包含 X 中所有点的凸多边形. 这里的包含指 X 中的点均在这个凸多边形的边界或内部. 这个凸多边形可以退化为线段或点, 凸多边形的任意三个顶点不共线.

证明 对 m 归纳证明, 存在正整数 n_m 满足要求.

当 $m=1$ 时, 取 $n_1=1$ 即可.

当 $m=2$ 时, 取 $n_2=4$. 对于平面上的 4 个不同的点 A,B,C,D, 若它们的凸包是四边形 $ABCD$, 则点集 $\{A,C\},\{B,D\}$ 满足要求; 若它们的凸包是三角形 ABC, 则点集 $\{A,B,C\},\{D\}$ 满足要求.

假设 $m\geq 2$ 且命题对所有不超过 m 的正整数均成立, 来看 $m+1$ 时的情形.

令 $n_{m+1}=3n_m$. 下面证明平面上任意 $3n_m$ 个不同的点可以被分成 $m+1$ 个非空的点集, 满足它们的凸包有一个公共点.

考虑这 $3n_m$ 个点的凸包, 分两种情形讨论.

情形 1: 当凸包上的顶点个数不超过 $2n_m$ 时, 将凸包上的所有顶点归入一个点集 A. 由归纳假设, 凸包内的不少于 n_m 个点可以被分成 m 个非空的点集, 它们的凸包有一个公共点. 因为该公共点在点集 A 的凸包中, 所以命题成立.

情形 2: 当凸包上的顶点个数不少于 $2n_m+1$ 时, 设凸包上的顶点依次为 $P_1,P_2,\cdots,P_t$, 其中 $t\geq 2n_m+1$. 将

$$P_1,P_3,P_5,\cdots,P_{2n_m-1},P_{2n_m+1},P_{2n_m+2},P_{2n_m+3},\cdots,P_t$$

及凸包内的所有点归入一个点集 A. 由归纳假设, 凸包上余下的顶点 $P_2,P_4,\cdots,P_{2n_m}$ 可以被分成 m 个非空的点集 $X_1,X_2,\cdots,X_m$, 它们的凸包有一个公共点 Q, Q 在 $P_1,P_2,\cdots,P_t$ 的凸包中.

因为对 $1\leq i\leq n_m$, $\triangle P_{2i-1}P_{2i}P_{2i+1}$ 中的任意一点均只在点集 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 中一个 (即含 P_{2i} 的点集) 的凸包中, 所以 $\triangle P_{2i-1}P_{2i}P_{2i+1}$ 与 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 的凸包的公共区域的交集是空集, 从而 Q 在多边形 $P_1P_3P_5\cdots P_{2n_m+1}$ 中, 进而 Q 在点集 A 的凸包中, 命题成立.

归纳证毕. □

评注 本题是一道构造性的组合问题, 主要考察对凸包的认识和运用. 在对 m 归纳的过程中, 当凸包上的点较少时显然成立, 当凸包上点较多时可间隔地取凸包上的点, 保证公共点不在整体的凸包与所选点集的凸包的差集内.