2019 年罗马尼亚大师杯 (RMM) 几何部分预选题

缪何玺　梁敬勋　肖俊谦

(杭州学军中学, 310012)

指导教师: 边红平

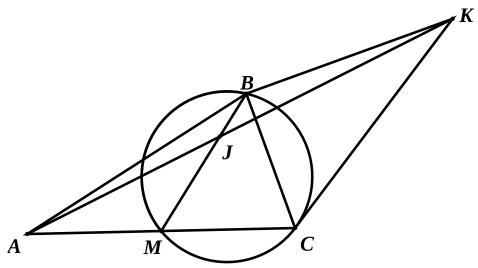
罗马尼亚大师杯 (RMM) 是由罗马尼亚数学会主办的一场国际邀请赛, 自 2008 年开始每年于 2 月举办, 是国际上十分重要的比赛. 本文为 2019 年 RMM 几何部分的预选题, 共 6 道题. 本文若有不当之处请读者批评指正.

I. 试 题

1. 对任意正整数 n, 证明: 一定存在一个多边形 (不一定是凸的), 其任意三个顶点不共线, 且恰有 n 种方法对其进行三角剖分.

注: 三角剖分指, 用多边形的对角线将其分割为若干三角形, 这些三角形两两之间都没有公共的内部点, 也没有公共的原多边形的边.

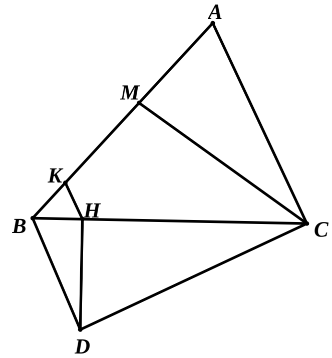
2. 锐角 $\triangle ABC$ 中, BM 为中线. 过 C 作 $\triangle BMC$ 外接圆的切线, 并在其上取一点 K, 使得 $\angle KBC = 90°$. 线段 AK 与 BM 交于 J. 证明: $\triangle BJK$ 的外心在直线 AC 上.



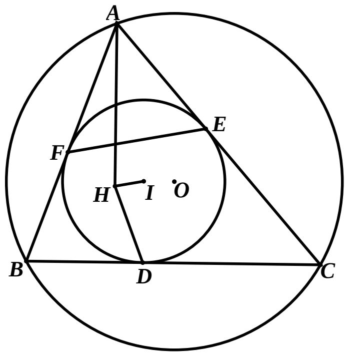
3. 锐角 $\triangle ABC$ 中, 过 C 作直线 AC 的垂线, 与 $\angle ABC$ 的外角平分线交于

修订日期: 2020-10-16.

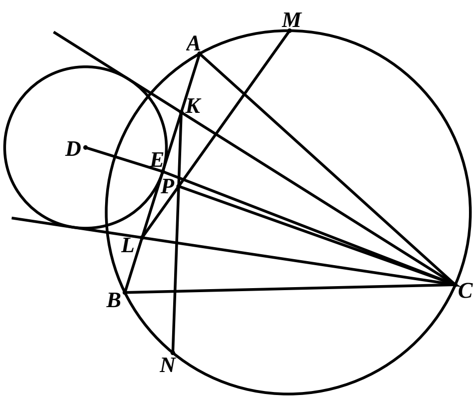
点 D. 过 D 作 BC 垂线, 垂足为 H, 过 H 作 AC 平行线, 交 AB 于 K. 若 M 为 AK 中点, 证明: $MC = MB + BH$.



4. 锐角 $\triangle ABC$ 中, $AB \neq AC$, I 和 O 分别为其内心和外心. 其内切圆与 BC, CA, AB 分别切于点 D, E, F, 过 I 作 EF 平行线, 过 D 作 AO 平行线, 两者交于点 H. 若 $AH \perp BC$, 证明: H 为 $\triangle ABC$ 垂心.



5. 设 Ω 为锐角 $\triangle ABC$ 外接圆, D 为 Ω 上劣弧 $\widehat{AB}$ 中点. 以 D 为圆心, 作圆 ω, 与 AB 切于点 E. 过 C 作 ω 的切线, 与线段 AB 分别交于点 K, L, 其中 K 在线段 AL 上. 圆 Ω_1 与 AL, CL 相切, 与 Ω 切于点 M. 同样的, 圆 Ω_2 与 BK, CK 相切, 与 Ω 切于点 N. 直线 LM 与 KN 交于点 P. 证明: $\angle KCE = \angle LCP$.



(第 5 题升级版配图)

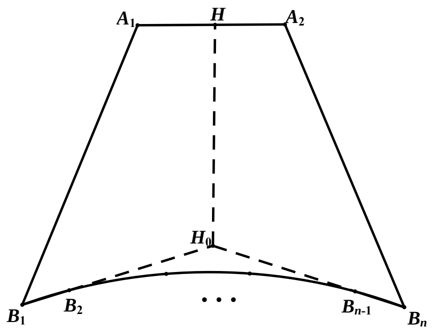
5. (升级版) 设 Ω 为锐角 $\angle ABC$ 外接圆, 在 $\triangle ACB$ 的平分线上选一点 D, 使得 D 和 C 在直线 AB 的两侧. 以 D 为圆心, 作圆 ω, 与 AB 切于点 E. 过 C 作 ω 的切线, 与线段 AB 跟别交于点 K, L, 其中 K 在线段 AL 上. 圆 Ω_1 与 AL, CL 相切, 与 Ω 切于点 M. 同样的, 圆 Ω_2 与 BK, CK 相切, 与 Ω 切于点 N. 直线 LM 与 KN 交于点 P. 证明: $\angle KCE = \angle LCP$.

6. 圆 I 内切于四边形 $ABCD$. 在四边形内取异于 I 的一点 P, 使得 $\triangle PAB, \triangle PBC, \triangle PCD, \triangle PDA$ 周长相等. 以 P 为圆心作圆 Γ, 与射线 PA, PB, PC, PD 分别交于点 A_1, B_1, C_1, D_1. 证明: 直线 PI, A_1C_1, B_1D_1 共点.

II. 解答与评注

1. 对任意正整数 n, 证明: 一定存在一个多边形 (不一定是凸的), 其任意三个顶点不共线, 且恰有 n 种方法对其进行三角剖分.

注: 三角剖分指, 用多边形的对角线将其分割为若干三角形, 这些三角形两两之间都没有公共的内部点, 也没有公共的原多边形的边.



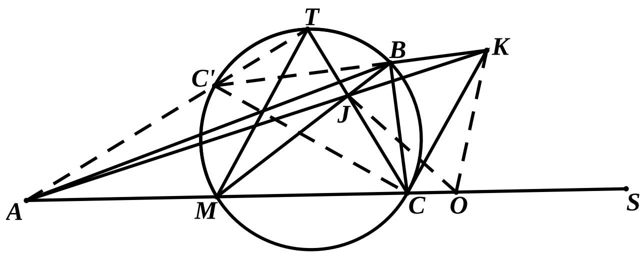
证明 在一个 $\odot O$ 上取一段劣弧 $\widehat{B_1B_n}$, 其 $(n-1)$ 等分点为 B_2, B_3, $\cdots$, B_{n-1},

$$B_1B_2 \cap B_{n-1}B_n = H_0.$$

在 B_1B_n 的中垂线上取一点 H, H 在 $\odot O$ 外, H 到 B_1B_n 的距离大于 H_0 到 B_1B_n 的距离. 过 H 作 B_1B_n 的平行线 A_1A_2, $HA_1 = HA_2 = d$, 可以使 d 充分小, 直线 B_1H_0, 直线 B_nH_0 都不与线段 A_1A_2 相交. 因此对 $i = 1, 2, \cdots, n$, $\triangle A_1A_2B_i$ 完全在多边形 $B_1B_2\cdots B_nA_2A_1$ 内. 我们证明: $B_1\cdots B_nA_2A_1$ 恰有 n 种三角剖分. 事实上, 对 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 若一个三角剖分含 $\triangle A_1A_2B_i$, 则剩下部分的三角剖分是存在且唯一的. 因此一共 n 种三角剖分, 证毕. $\square$

评注 本解法中的任一种剖分, 必含$\triangle A_1A_2B_i$.

2. 锐角 $\triangle ABC$ 中, BM 为中线. 过 C 作 $\triangle BMC$ 外接圆的切线, 并在其上取一点 K, 使得 $\angle KBC=90^\circ$. 线段 AK 与 BM 交于 J. 证明: $\triangle BJK$ 的外心在直线 AC 上.



证明 设 C 在 $\odot(BMC)$ 中的对径点为 C', AC' 再次与 $\odot(BMC)$ 交于点 T, 则 $\triangle ATC$ 为直角三角形. 又 M 为 AC 的中点, 因此 $MT=MC$.

$$\angle C'BC=\angle KBC=90^\circ \Rightarrow C',\ B,\ K \text{ 共线}$$

对 $C'BMCCT$ 应用 Pascal 定理可知 AK, BM, CT 交于一点. 此交点为 J. 因此

$$\angle MCJ=\angle MTC=\angle KCS(\ S \text{ 为 } AC \text{ 延长线上一点 }).$$

设 $\odot(JCK)$ 与 AC 第二个交点为 O, 则

$$\angle OJK=\angle OCK=\angle ACJ=\angle OKJ \Rightarrow OJ=OK.$$

故

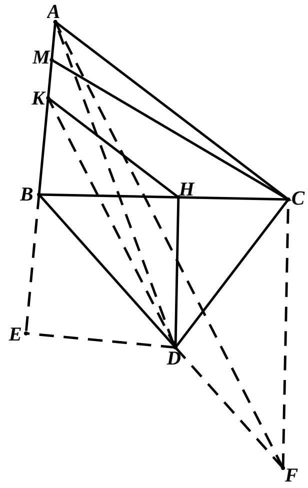
$$\begin{aligned}\angle JOK=\angle JCK=\angle TMC&=2\angle ATM\\&=2\angle C'CM=2\angle C'BM\\&=2(180^\circ-\angle JBK).\end{aligned}$$

因此 B 在以 O 为圆心, OJ 为半径的圆上. 所以 O 即为 $\triangle BJK$ 的外心, 且在直线 AC 上. 证毕. □

评注 本题首先观察到 CM 是 $\angle JCK$ 的外角平分线, 然后由 M 是 AC 的中点, 可以考虑构造 Rt$\triangle ATC$, 再用 Pascal 定理证出 C, J, T 共线.

3. 锐角 $\triangle ABC$ 中, 过 C 作直线 AC 的垂线, 与 $\angle ABC$ 的外角平分线交于点 D. 过 D 作 BC 垂线, 垂足为 H, 过 H 作 AC 平行线, 交 AB 于 K. 若 M 为 AK 中点, 证明: $MC=MB+BH$.

证明 设 D 在 AB 上的射影为 E, 则 $\angle DBH=\angle DBE$. 又由于 $\angle DHB=\angle DEB=90^\circ$, 所以 $\triangle DBH\cong\triangle DBE$. 只需证明: $MC=ME$. 设 K, M, A 在



EC 上的射影分别为 K_1, M_1, A_1, 由于 M 为 AK 中点, 则 $K_1M_1 = A_1M_1$. 欲证 $MC = ME$, 只需证 $EK_1 = CA_1$, 即 $KE \cdot \cos\angle AEC = AC \cdot \cos\angle ACE$. 注意到 $\angle AED = \angle ACD = 90°$, 所以 A, E, D, C 共圆.

$$\cos\angle AEC = \cos\angle ADC = \frac{DC}{AD},\ \cos\angle ACE = \cos\angle ADE = \frac{DE}{AD}.$$

只要证: $KE \cdot DC = AC \cdot DE$, 即证

$$\frac{KE}{DE} = \frac{AC}{DC}.$$

这只需证 $\triangle KED \sim \triangle ACD$. 只需证 $\angle BKD = \angle CAD$ 即可.

过 C 作 BC 垂线与 BD 交于点 F, 则 $\triangle KHD$, $\triangle ACF$ 位似, 位似中心为点 B, $\angle BKD = \angle BAF$. 只需证 AD, AF 为关于 $\angle BAC$ 的一对等角线即可. $(*)$

$$\frac{\sin BAD}{\sin CAD} = \frac{BD}{CD} \cdot \frac{\sin ABD}{\sin ACD} = \frac{\sin(90° - C)}{\sin(90° - \frac{1}{2}B)} \cdot \frac{\sin(90° + \frac{1}{2}B)}{\sin 90°} = \cos C,$$

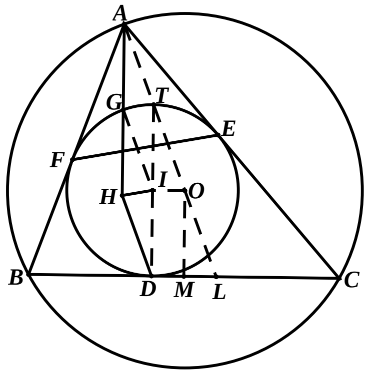
$$\frac{\sin FAC}{\sin FAB} = \frac{FC}{FB} \cdot \frac{\sin FCA}{\sin FBA} = \sin(90° - \frac{1}{2}B) \cdot \frac{\sin(90° + C)}{\sin(90° + \frac{1}{2}B)} = \cos C.$$

因此 $(*)$ 成立, 从而 $\angle BKD = \angle BAF = \angle CAD$. 证毕. □

评注 本题中 M 是 AK 的中点, 比较自然地考虑转化成三角函数去计算.

4. 锐角 $\triangle ABC$ 中, $AB \neq AC$, I 和 O 分别为其内心和外心. 其内切圆与 BC, CA, AB 分别切于点 D, E, F, 过 I 作 EF 平行线, 过 D 作 AO 平行线, 两者交于点 H. 若 $AH \perp BC$, 证明: H 为 $\triangle ABC$ 垂心.

证明 因为 AH, AO, EF 构成一个等腰三角形, 所以 $\triangle DHI$ 为等腰三角形, $DH = DI$. 记 D 关于 HI 的对称点为 G, 则 $IG = ID$, G 在内切圆 $\odot I$ 上, 而 $GHDI$ 构成一个菱形, 所以 $HG \parallel ID$, 结合 $AH \parallel ID$, 知 A, H, G 共线. 所以 G



为 AH 与内切圆的交点. 由于 $HI \parallel EF \Rightarrow \angle AIH = 90°$. 结合 $GH = GI$, 可知 G 为 AH 的中点.

延长 DI 与 $\odot O$ 交于点 T, 则

$$\begin{aligned} AG = GH = ID = IT \Rightarrow & ATIG \text{ 为菱形} \\ \Rightarrow & AT \parallel GI \parallel HD \parallel AO, \end{aligned}$$

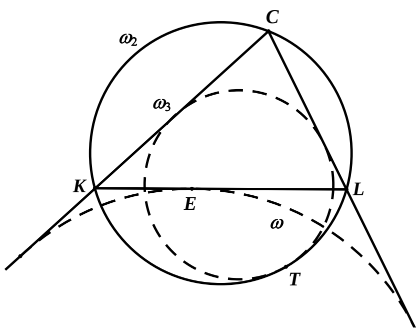
故 A, T, O 三点共线. 记 $\triangle ABC$ 的点 A 所对旁切圆在 BC 边上的切点为 L, 则 D, L 关于 BC 中点 M 对称. 熟知 A, T, L 共线, 因此 A, T, O, L 共线, 由于 M 为 DL 的中点, 所以 O 为 TL 的中点. 因此 OI, DM 为平行四边形, 有

$$AH = 2HG = 2ID = 2OM.$$

结合 $AH \perp BC$ 可知, H 为 $\triangle ABC$ 垂心. 证毕. □

评注 本题中 A, T, L 共线可由位似变换得出.

5. 设 Ω 为锐角 $\angle ABC$ 外接圆, 在 $\triangle ACB$ 的平分线上选一点 D, 使得 D 和 C 在直线 AB 的两侧. 以 D 为圆心, 作圆 ω, 与 AB 切于点 E. 过 C 作 ω 的切线, 与线段 AB 跟别交于点 K, L, 其中 K 在线段 AL 上. 圆 Ω_1 与 AL, CL 相切, 与 Ω 切于点 M. 同样的, 圆 Ω_2 与 BK, CK 相切, 与 Ω 切于点 N. 直线 LM 与 KN 交于点 P. 证明: $\angle KCE = \angle LCP$.



证明 设 $\triangle CKL$ 的内切圆为 ω_1, 外接圆为 ω_2. 注意到 CK, CL 为关于 $\angle ACB$ 的等角线, CK, CL 两次交 $\odot(ABC)$ 于 X, Y. 则由 $\widehat{AX}=\widehat{BY}$, 可知 $AB \parallel XY$, 即 $XY \parallel KL$. 因此 $\odot(CXY)$ 于 $\odot(CKL)$ 相切于 C 点, 故 Ω 与 ω_2 相切于点 C, M 为 Ω, Ω_1 的外位似中心, L 为 ω_1, Ω_1 的外位似中心. 因此 LM 过 Ω, ω_1 的外位似中心, 同理 KN 过 Ω, ω_1 的外位似中心. 因此 P 即为 ω_1, Ω 的外位似中心. 设在 $\triangle CKL$ 中, C 所对的伪内切圆为 ω_3, 即 ω_3 与 CK, CL 相切, 并与 ω_2 内切. 由于 C 为 Ω, ω_2 的外位似中心, 所以 CP 过 ω_1, ω_3 的外位似中心. 又因为 C 为 ω_1, ω_3 的外位似中心, 所以 CP 过 ω_2, ω_3 的外位似中心, 即 ω_2, ω_3 的切点 T.

下面只需证: CT, CE 是关于 $\angle KCL$ 的等角线.

考虑以 C 为反演中心, $\sqrt{CK\cdot Cl}$ 为反演半径的反演变换与关于 $\angle KCL$ 的平分线的对称变换的复合变换 φ, 则在 φF, $\omega_2 \leftrightarrow KL$, ω_3 的像仍与 CK, CL, KL 相切. 因此 $\omega_3 \leftrightarrow \omega$, ω_2 与 ω_3 的切点 T 变为 ω 与 KL 的切点 E. 因此

$$\angle KCE = \angle LCT = \angle LCP.$$

证毕! □

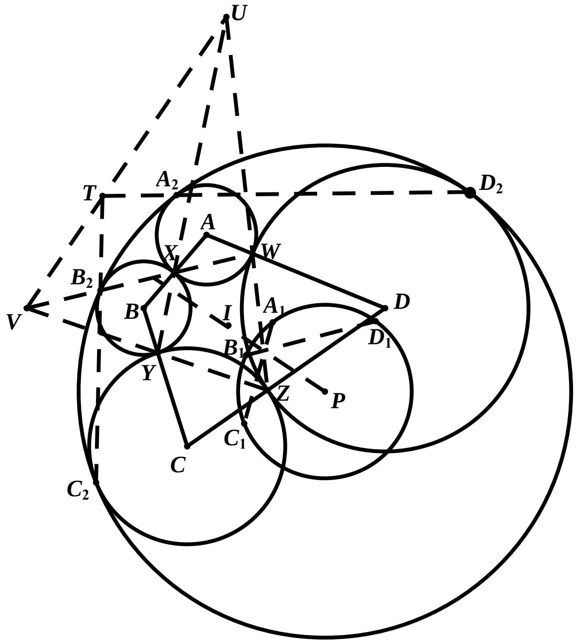
评注 本题有一定难度, 用到了十分有用的蒙日定理: 任意三个圆, 它们两两的外位似中心共线. 可自行用 Menelaus 定理一步证出. 由此得 P 是 ω_1, Ω 的外位似中心, 这一步十分关键. 之后利用伪内切圆证明了等角线, T, E 是 φ 下的互反点这一性质也应熟记于心.

6. 圆 I 内切于四边形 $ABCD$. 在四边形内取异于 I 的一点 P, 使得 $\triangle PAB, \triangle PBC$, $\triangle PCD$, $\triangle PDA$ 周长相等. 以 P 为圆心作圆 Γ, 与射线 PA, PB, PC, PD 分别交于点 A_1, B_1, C_1, D_1. 证明: 直线 PI, A_1C_1, B_1D_1 共点.

证明 首先, 易见可在线段 AB 上取 X 使 $PA+AX=PB+BX$ (取 X 为 P 一旁切圆切点即可). 在 BC, CD, DA 上依次截 $BY=BX$, $CZ=CY$, $DW=DZ$, 则由 $\odot I$ 为四边形 $ABCD$ 内切圆知 $AB+CD=AD+BC$, 进而 $AW=AX$. 由 $\triangle PAB$ 与 $\triangle PBC$ 周长相等知 $PA+AB=PC+CB$, 进而 $PA+AX=PC+CZ$. 进而有

$$PA+AX=PB+BY=PC+CZ=PD+DW \overset{\text{记为}}{=} R. \qquad ①$$

分别以 A, B, C, D, P 为圆心, AX, BY, CZ, DW, R 为半径作圆, 则 $\odot A$, $\odot B$



相切, $\odot A$, $\odot P$ 相切. 设后者切点为 A_2, 类似定义 B_2, C_2, D_2.

由于 $\angle XAT = \angle WAI$, $AX = AW$, $AI = AI \Rightarrow \triangle XAI \cong \triangle WAI \Rightarrow IX = IW$. 进而同理有

$$IX = IY = IZ = IW. \tag{②}$$

故 X, Y, Z, W 共圆于 ω.

现设 $XY \cap ZW = U$, $XW \cap YZ = V$, 我们有:

断言 1 U 为 $\odot A$, $\odot C$ 外位似中心.

证明 对 $\odot A$, $\odot C$, $\odot D$ 用蒙日定理, $\odot A$, $\odot C$ 外位似中心 U', $\odot A$, $\odot D$ 内位似中心 W, $\odot C$, $\odot D$ 内位似中心 Z 共线. 同理 U', X, Y 共线. 故

$$U' = XY \cap ZW = U.$$

断言 2 UB_2 与 $\odot P$ 相切

证明 由于 $\odot P$, $\odot A$, $\odot C$ 两两的外位似中心共线, 故 $U \in A_2C_2$. 进而由于 U 为外位似中心, 故

$$UX \cdot UY = UA_2 \cdot UC_2.$$

这表明 U 到 $\odot B$, $\odot P$ 等幂, 即在根轴—过 B_2 的公切线上, 故 UB_2 与 $\odot P$ 相切.

现在, 设 $B_2D_2 \cap A_2C_2 = T$, 则由断言 2 (及同理的结论)知: B_2D_2 为 U 关于 $\odot P$ 的极线, 故 T 在 U 关于 $\odot P$ 的极线上, 同理也在 V 的极线上, 故 T 的极线为 $UV \Rightarrow PT \perp UV$.

又由于 $UX \cdot UY = UA_2 \cdot UC_1$, 故 U 在 ω 与 $\odot P$ 根轴上, 同理 V 也在两圆

的根轴上,

$$l \equiv UV \Rightarrow UV \perp PI.$$

综上, P, I, T 共线.

最后, 由于 Γ 与上述 $\odot P$ 同心, 由 P, A_1, A_2 共线, 对 B, C, D 类似, 故四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 与 $A_2B_2C_2D_2$ 关于 P 位似. 故 PI, A_2C_2, B_2D_2 共点 T, 即 PI, A_1C_1, B_1, D_1 共点. □

评注 本题难度大, 解题关键是用周长相等这个条件构造 5 个圆, 得到一个多圆相切的问题, 本解法中多次用到蒙日定理与极线理论.