2020 年捷克–波兰–斯洛伐克数学竞赛试题解答与评析

刘家瑜

(湖南省雅礼中学, 410007)

指导教师: 申东

6 道试题整体难度合适, 层次感较好. 第 1 题和第 5 题与全国高中联赛第 1, 2 题的难度相当, 第 2 题和第 4 题与冬令营第 1, 4 题的难度相当, 第 6 题与冬令营第 2, 5 题难度相当, 第 3 题与冬令营第 3 题难度相当. 题型优美, 证法经典.

I. 试 题

1. 设 $ABCD$ 是一个平行四边形, P 是其两条对角线的交点, M 是 AB 边的中点, 点 Q 满足 QA 与 $\triangle MAD$ 的外接圆相切, 且 QB 与 $\triangle MBC$ 的外接圆也相切. 证明: Q, M, P 共线.

2. 给定一个正整数 n, 若对一个实数 x, 存在 n 个正整数 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 满足

$$x = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n},$$

则我们称 x 为 n–好的. 求所有正整数 k, 满足下述条件:

设 a, b 是两个实数, 满足闭区间 $[a, b]$ 中存在无数个 2020–好的实数, 则区间 $[a, b]$ 中至少存在一个 k–好的实数.

3. 黑板上写有 1, 2, $\cdots$, 2020 这些数字, 甲乙两个人在玩如下的游戏: 首先, 甲挑选两个有整除关系的数, 并用一条线段将这两个数连接起来; 接着乙也选两个有整除关系但是没有互相连接过的数, 并用一条线段将这两个数连接起来; 然后甲再继续这样的操作, 直到黑板上出现了一个三角形, 且 2020 是这个三

修订日期: 2020-11-04.

角形的一个顶点(即 2020 连接了两个本就相连的数). 这个游戏中, 画最后一条线段的人赢(即完成这个三角形的人赢), 请问甲乙两个人谁有必胜策略?

4. 给定一个实数 α, 求所有的函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 满足对任意 x, $y\in\mathbb{R}$ 都有

$$(x+y)(f(x)-f(y))=\alpha(x-y)f(x+y).$$

5. 对任意正整数 n, 我们记 $d(n)$ 为满足

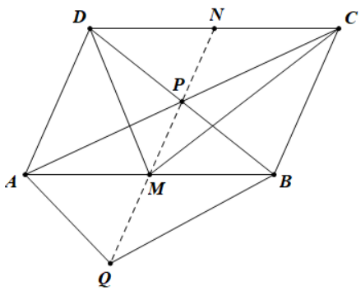
$$(x+1)^2-xy(2x-xy+2y)+(y+1)^2=n$$

的正整数对 (x,y) 的对数. 求最小的一个正整数 n 满足 $d(n)=61$.

6. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 点 P 满足 PB, PC 都与 $\triangle ABC$ 的外接圆相切. 设 X, Y 分别是 AB, AC 边上的两个动点, 满足 $\angle XPY=2\angle BAC$, 且 P 在 $\triangle AXY$ 内, 设 Z 是 A 关于 XY 的对称点. 证明: $\triangle XYZ$ 的外接圆过一个定点.

II. 解答与评注

1. 设 $ABCD$ 是一个平行四边形, P 是其两条对角线的交点, M 是 AB 边的中点, 点 Q 满足 QA 与 $\triangle MAD$ 的外接圆相切, 且 QB 与 $\triangle MBC$ 的外接圆也相切. 证明: Q, M, P 共线.



证明 1 在平行四边形 $ABCD$ 中, AC, BD 交点为 P, 故 P 为 AC, BD 中点. 又 M 为 AB 中点, 故MP 过 DC 中点 N, 且 $MN \mathrel{\underline{\parallel}} BC$. 又

$$AM=MB,\ \angle AMN=\angle ABC.$$

因此 $\triangle AMN\cong\triangle MBC$. 同理可证: $\triangle BMN\cong\triangle MAD$.

在直线 MN 上取点 Q', 使得 A, B, N, Q' 共圆 $Q'\neq N$. 则

$$\angle ABQ'=\angle ANM=\angle MCB.$$

故 $Q'B$ 与 $\triangle MBC$ 外接圆相切. 同理: $Q'A$ 与 $\triangle MAD$ 外接圆相切. 故 $Q'=Q$, 即 Q, M, P 共线. 证毕. □

证明 2 在 PM 延长线上取 Q', 使得

$$MQ' \cdot DA = AM^2. \tag{$*$}$$

则

$$\angle DAM = \angle AMQ',\ \frac{AM}{MQ'} = \frac{DA}{AM}.$$

故 $\triangle AMQ' \triangle DAM$. 因此 $\angle ADM = \angle MAQ'$. 从而 $Q'A$ 与 $\triangle MAD$ 外接圆相切. 注意到

$$(*) \Leftrightarrow MQ' \cdot BC = BM^2,$$

同理可得 $Q'B$ 与 $\triangle MBC$ 外接圆相切. 故 $Q' = Q$, 即 Q, M, P 共线. 证毕. □

评注 两种证法都是同一法. 当直接证明比较困难时, 我们不妨尝试转换视角, 本题中先得到 $Q(Q')$ 相关性质, 再从这些性质出发, 证明直线与圆相切相对容易, 最后利用两直线交点的唯一性得证.

2. 给定一个正整数 n, 若对一个实数 x, 存在 n 个正整数 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 满足

$$x = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n},$$

则我们称 x 为 $n-$好的. 求所有正整数 k, 满足下述条件:

设 a, b 是两个实数, 满足闭区间 $[a,\ b]$ 中存在无数个 2020−好的实数, 则区间 $[a,\ b]$ 中至少存在一个 $k-$好的实数.

解 若闭区间 $[a,b]$ 中存在无数个 $n-$好的实数, 则称该区间具有性质 $P_n(n \in \mathbb{N}_+)$. 先证明: 正整数 $k \leq 2018$ 不满足题设条件. 注意到

$$x_i = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{2019} + \frac{1}{i} \quad (i \in \mathbb{N}_+)$$

均为 2020−好的实数, 令 $a = 2019, b = 2020$, 则闭区间 $[2019, 2020]$ 具有性质 P_{2020}. 而对任意 $k-$好的 $(k \leq 2018)$ 实数 x' 有

$$x' \leq \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{2018} = 2018 < 2019,$$

从而 $x' \notin [2019, 2020]$, 故满足条件的正整数 $k \geq 2019$.

再证明: 对任意正整数 $k \geq 2019$, 具有性质 P_{2020} 的闭区间 $[a,b]$ 中均存在 $k-$好的实数. 注意到, 对任意 $a_l \in \mathbb{N}_+$, 都有

$$\frac{1}{a_l} = \frac{1}{a_l + 1} + \frac{1}{a_l(a_l + 1)}.$$

所以当

$$x=\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_{l-1}}+\frac{1}{a_l}$$

为 $l-$好的实数时, 它一定也是 $l+1-$好的实数.

故只需证明: 具有性质 P_{2020} 的闭区间 $[a,b]$ 均存在 2019−好的实数. ①

为方便记, 我们将具有性质 P_{2020} 的闭区间 $[a,b]$ 记为 $[a_{2020},b_{2020}]$. 该区间中存在 2020−好的实数, 显然有 $b_{2020}>0$. 当 $a_{2020}\le 0<b_{2020}$ 时, 令

$$x=\underbrace{\frac{1}{2019n}+\cdots+\frac{1}{2019n}}_{2019}=\frac{1}{n},\ (\text{其中 } n>\frac{1}{b_{2020}}),$$

则 $x\in[a_{2020},\ b_{2020}]$ 且为 2019−好的实数, 命题 ① 成立.

当 $0<a_{2020}<b_{2020}$ 时, 闭区间 $[a_{2020},b_{2020}]$ 中任一个 2020−好的实数 x 均可以表示为

$$x=\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\cdots+\frac{1}{c_{2020}}(c_1\le c_2\le\cdots\le c_{2020},\ c_i\in\mathbb{N}_+,\ 1\le i\le 2020),\quad ②$$

于是, 有

$$\frac{1}{b_{2020}}<c_1\le\frac{2020}{a_{2020}}\quad(\text{因为 } \frac{1}{c_1}<x\le b_{2020},\ \frac{2020}{c_1}\ge x\ge a_{2020}).$$

故 c_1 只能取有限的几个正整数值, 而形如②的实数 x 有无穷多个, 故存在一个正整数 $t_{2020}\in(\frac{1}{b_{2020}},\ \frac{2020}{a_{2020}}]$, 使得满足 $c_1=t_{2020}$ 对应的实数 x 有无穷多个.

令

$$a_{2019}=a_{2020}-\frac{1}{t_{2020}},\ b_{2019}=b_{2020}-\frac{1}{t_{2020}}.$$

可知闭区间 $[a_{2019},b_{2019}]$ 具有性质 P_{2019}. 显然也有 $b_{2019}>0$. 当 $a_{2019}\le 0<b_{2019}$ 时, 类似地, 存在 $x\in[a_{2019},b_{2019}]$ 且为 2018−好的实数, 从而对应地有

$$\left(x+\frac{1}{t_{2020}}\right)\in[a_{2020},b_{2020}]$$

且为 2019−好的实数, 命题①成立.

当 $0<a_{2019}<b_{2019}$ 时, 同上讨论, 存在一个正整数

$$t_{2019}\in\left(\frac{1}{b_{2019}},\ \frac{2019}{a_{2019}}\right],$$

可类似地定义

$$a_{2018}=a_{2019}-\frac{1}{t_{2019}},\ b_{2018}=b_{2019}-\frac{1}{t_{2019}}\cdots.$$

重复上述讨论, 并依次定义 $a_i,b_i,t_i(i=2020,2019,\cdots,2)$ 及 $a_1,b_1(t_i\in\mathbb{N}_+)$. 由定义知, 闭区间 $[a_1,b_1]$ 具有性质 P_1, 显然有 $b_1>0$. 又闭区间 $[a_1,b_1]$ 中有无穷多个 1−好的实数, 这些实数均可表示为 $x=\frac{1}{n}(n\in\mathbb{N}_+)$, 故可取 n 为任意大的正

整数, 由 $a_1 \le \frac{1}{n}$ 恒成立得, $a_1 \le 0$. 即 $a_1 \le 0 < b_1$, 从而对应地有

$$\left(\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}+\cdots+\frac{1}{t_{2020}}\right) \in [a_{2020},\ b_{2020}]$$

且为 2019−好的实数, 命题①成立.

综上所述, 命题①成立. 故所求的 k 为一切不小于 2019 的正整数. □

评注 本题中我们依次取出符合条件的子区间, 相当于递降的手法.

3. 黑板上写有 1, 2, $\cdots$, 2020 这些数字, 甲乙两个人在玩如下的游戏: 首先, 甲挑选两个有整除关系的数, 并用一条线段将这两个数连接起来; 接着乙也选两个有整除关系但是没有互相连接过的数, 并用一条线段将这两个数连接起来; 然后甲再继续这样的操作, 直到黑板上出现了一个三角形, 且 2020 是这个三角形的一个顶点(即 2020 连接了两个本就相连的数). 这个游戏中, 画最后一条线段的人赢(即完成这个三角形的人赢), 请问甲乙两个人谁有必胜策略?

解 甲有必胜策略.

我们将数字 $i,\ j$ 为端点的线段记为边 $(i,\ j)$ (不考虑顺序), 由题可知, $i \mid j$ 或 $j \mid i$. 若 $i,\ j$ 都整除 2020, 则称边 $(i,\ j)$ 为“好边”, 否则, 称其为“闲边”. 连接所有顶点间的好边和闲边, 得到图 G. 注意到, 以 2020 为顶点的任一三角形的三边均为好边. 首先证明如下引理:

引理 1 图 G 中的闲边有偶数条.

证明 不妨设边 (i,j) 满足: $1 \le i < j \le 2020$, 则 $i \mid j$. 图 G 中边数之和等于

$$\sum_{j=1}^{2020}(d(j)-1) \equiv \sum_{j=1}^{2020}(d(j)) \equiv 44 \equiv 0 \pmod 2, \qquad ①$$

其中 $d(n)$ 表示 n 的正约数的个数. 注意到 $44^2 < 2020 < 45^2$, 且 $2 \nmid d(n) \Leftrightarrow n$ 为完全平方数. 又边 $(i,\ j)\,(1 \le i < j \le 2020)$ 为好边当且仅当 $j \mid 2020$, 所以, 图 G 中好边数之和等于

$$\sum_{j \mid 2020}(d(j)-1) = 42, \qquad ②$$

其中, ②式左边的 j 可取 1, 2, 4, 5, 10, 20, 101, 202, 404, 505, 1010, 2020. 结合①, ②可得, 图 G 中的闲边有偶数条. 引理 1 得证.

游戏过程中, 在符合条件的两个顶点间连接线段的操作相当于在图 G 中选择(不允许重复)一条边. 若某次操作中乙选择了一条闲边, 轮到甲时, 他选择另一条闲边, 即当且仅当乙选闲边时甲才选闲边, 由引理 1 知, 甲可以确保其总能选到闲边.

设图 G 的所有好边及相关顶点构成的子图为 $G'(E,\ V)$ (其中边数 $E=42$, 顶点集合 $V=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 10,\ 20,\ 101,\ 202,\ 404,\ 505,\ 1010,\ 2020\}$). 由上可知, 只需考虑在图 G' 中, 甲、乙两人进行选边操作(甲先手)的情形.

两人在图 G' 中选边操作时, 有如下引理 2.

引理 2　后手某次操作后(双方都未获胜), 若

$$(1,\ 2020)\,(4,\ 2020),\ (505,\ 2020)$$

这三条边中恰被选择了 2 条或 0 条, 则先手有该轮不败(双方按先后各操作一次称为一轮)的选边方法.

证明　后手某次操作后(双方都未获胜), 设顶点 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_s$ (设这些顶点构成集合 A, $2020\notin A$)与顶点 2020 间的边均已经被选择(由引理的条件知, 1, 4, 505 中恰有 2 个或 0 个属于 A), 而顶点 $B_1,\ B_2,\ \cdots,\ B_t$ (设这些顶点构成集合 B, $2020\notin B$)与顶点 2020 间的边都没有被选择, 显然有 $s+t=11$.

(1) 若顶点 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_s$ 间存在好边, 先手选择其中一条即可获胜;

(2) 若 A, B 之间某条好边如 $(A_1,\ B_1)$ 已经被选, 先手选择 $(B_1,\ 2020)$ 即可获胜;

(3) 否则, 注意到 B 与顶点2020间好边的条数为 $t(=11-s)$, AB 之间好边的条数为

$$\sum_{m=1}^{s}\Big(\sum_{\substack{l\mid A_m\\ l\neq A_m}}1+\sum_{\substack{A_m\mid l\\ l\mid 2020\\ l\neq A_m,\ 2020}}1\Big)=\sum_{m=1}^{s}\left(d(A_m)+d\left(\frac{2020}{A_m}\right)-3\right)$$

$$=-3s+\sum_{m=1}^{s}\left(d(A_m)+d\left(\frac{2020}{A_m}\right)\right).$$

所以这两类好边的条数总和等于

$$11-4s+\sum_{m=1}^{s}\left(d(A_m)+d\left(\frac{2020}{A_m}\right)\right)\equiv 1\pmod 2.$$

(这是因为, $2\nmid d(A_m)+d(\frac{2020}{A_m})\Leftrightarrow A_m=1,\ 4,\ 505$, 但 1, 4, 505 中恰有 2 个或 0 个属于 A). 结合 $E=42$ 可得, 图 G' 中上述两类以外的边(即 A 与顶点 2020 间的边和 B 内部顶点之间好边)条数也为奇数. 而操作过程中, 后手总是选择第偶数条边, 先手选第奇数条边, 从而, 先手总能在 $B_1,\ B_2,\ \cdots,\ B_t$ 之间选边, 确保其该轮不败(因为集合 B 与顶点 2020 间的边都没有被选择).

引理 2 得证.

最后说明: 甲有必胜策略. (下面只需考虑在图 G' 中进行操作即可) 第一步, 甲选边 $(1,\ 2)$. 接下来, 两人显然都不会选择边 $(1,\ 2020)$ 和 $(2,\ 2020)$ 之一(否则,

另一人选这两边中余下的一条即可获胜).

(1) 若乙始终不选择以 4 或 505 为顶点的边, 则甲也始终不选择这些边. 从而, 甲, 乙操作均不会涉及到 (1, 2020) 以及 4 或 505 为顶点的边, 这可以视为 (4, 2020) 和 (505, 2020) 两条边都已经被选出, 即相当于 4, $505 \in A$, 且$1 \in B$ 的情形, 由引理2知, 甲有策略确保其不败;

(2) 否则, 可分下列三种情形:

(i) 若某轮中乙首次选择了边 (4, 2020) , (505, 2020) 之一, 甲接着选择这两边中余下的一条, 注意到 4 与 505 互不整除, 且以 4 或 505 为顶点的其它好边均未被选出, 所以乙在接下来的一次操作中无法获胜, 且乙操作之后, 有 4, $505 \in A$, $1 \in B$, 由引理 2 知, 甲有策略确保其不败;

(ii) 若某轮中乙首次选择了好边 (4, k) ($k \in \{1, 2, 20, 404\}$), 甲接着选择边 (1, 505), 此后的操作中, 若乙始终不选择边 (4, 2020), 和 (505, 2020), 有 1, 4, $505 \in B$, 由引理 2 知, 甲有策略确保其不败;若乙选择边 (4, 2020), 或 (505, 2020), 甲对应的选择边 (k, 2020) , (1, 2020) 即可获胜.

(iii) 若某轮中乙首次选择了好边 (505, n) ($n \in \{1, 5, 101, 1010\}$), 类似 (ii) 可知, 甲有策略确保其不败.

综上所述, 每轮甲均有不败的策略. 而操作的次数有限, 最终必分出胜负, 故甲必胜. 证毕. □

评注 本题为游戏操作问题, 困难较大. 难以直接给出“取胜”具体的操作, 正难则反, 找到“不败”策略, 再结合“操作次数有穷”亦可获得最终胜利.

4. 给定一个实数 α, 求所有的函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 满足对任意 x, $y \in \mathbb{R}$ 都有

$$(x+y)(f(x)-f(y))=\alpha(x-y)f(x+y).$$

解 记 $(x+y)(f(x)-f(y))=\alpha(x-y)f(x+y)$ 为 $(*)$ 式.

(1) 当 $\alpha=0$ 时, $(x+y)\left(f(x)-f(y)\right)=0$ 有 $x+y\neq 0$, $f(x)=f(y)$. 故

$$f(0)=f(x)(x\neq 0)\Rightarrow f(x)\equiv c(c\text{ 为常数 },\ x\in\mathbb{R}),$$

代入 $(*)$ 式检验知, 其为原方程的解.

(2) 当 $\alpha\neq 0$, 1 时, 在 $(*)$ 式中, 令 $x+y=0(x\neq 0)$, 得 $\alpha\cdot(2x)\cdot f(0)=0$ 故 $f(0)=0$. 再在 $(*)$ 式中令 $y=0$ 有$xf(x)=\alpha xf(x)$. 而 $\alpha\neq 1$, 故 $xf(x)=0$. 令 $x\neq 0$ 有 $f(x)=0$, 因此 $f(x)\equiv 0(x\in\mathbb{R})$. 代入 $(*)$ 式检验知, 其为原方程的解.

(3) 当 $\alpha=1$ 时, 考虑到方程组 $a+b=f(1)$, $4a+2b=f(2)$ 必存在解 (a, b).

记 $g(x)=f(x)-ax^2-bx$, 则 $g(1)=g(2)=0$. 在 $(*)$ 式中代入 $f(x)=g(x)+ax^2+bx$ 得:

$$(x+y)\left(g(x)-g(y)\right)=(x-y)g(x+y). \tag{①}$$

在①中令 $x+y=0,\ x\neq 0$ 有 $g(0)=0$. 又在①中分别令 $y=1,\ 2$ 得:

$$(x+1)g(x)=(x-1)g(x+1), \tag{②}$$

$$(x+2)g(x)=(x-2)g(x+2), \tag{③}$$

在②中以 $x+1$ 代替 x 得:

$$(x+2)g(x+1)=xg(x+2). \tag{④}$$

由②, ③, ④知:

$$\big((x+1)g(x)\big)\big((x-2)g(x+2)\big)\big((x+2)g(x+1)\big)=\big(xg(x+2)\big)\big((x+2)g(x)\big)\big(x-1)g(x+1)\big),$$

整理得:

$$2(x+2)g(x)g(x+1)g(x+2)=0.$$

在上式中分别取 $x\neq -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$ 知, $g(x)g(x+1)g(x+2)$ 中必有一个为 0. 又由②, ③, ④有

$$\begin{aligned}&g(x)=g(x+1)=g(x+2)=0(x\neq -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2)\\ \Rightarrow&g(x)=0(x\neq 0,\ 1,\ 2)(\text{注意}x=-3\text{则}g(-3)=g(-2)=g(-1)=0).\end{aligned}$$

结合 $g(0)=g(1)=g(2)=0$ 知 $g(x)\equiv 0(x\in\mathbb{R})$. 故

$$f(x)=ax^2+bx(ab\in\mathbb{R})(x\in\mathbb{R}).$$

经检验, 这组解满足 $(*)$ 式. 故综上所述, 当 $\alpha=0,\ f(x)\equiv c(c\in\mathbb{R}\text{为常数},\ x\in\mathbb{R})$;

当 $\alpha\neq 0,\ 1,\ f(x)\equiv 0(x\in\mathbb{R})$;

当 $\alpha=1,\ f(x)=ax^2+bx(a,\ b\in\mathbb{R}\text{为常数},\ x\in\mathbb{R})$.

当 $\alpha=1$ 时另法: $(*)$ 式中以 $x+y$ 代替 x, $-y$ 代替 y 有:

$$x\left(f(x+y)-f(-y)\right)=(x+2y)f(x). \tag{⑤}$$

⑤与 $(*)$ 相加有

$$x\left(f(x+y)-f(-y)\right)+(x+y)\left(f(x)-f(y)\right)=(x+2y)f(x)+(x-y)f(x+y),$$

故

$$yf(x+y)-yf(x)-yf(y)=x\left(f(y)+f(-y)\right). \tag{⑥}$$

在⑥中交换 x, y 有:

$$x\left(f(x+y)-f(x)-f(y)\right)=y\left(f(x)+f(-x)\right). \tag{⑦}$$

令 $xy\neq 0$, 利用⑥⑦可得

$$\frac{y\left(f(x)+f(-x)\right)}{x}=\frac{x\left(f(y)+f(-y)\right)}{y}\left(=f(x+y)-f(x)-f(y)\right),$$

故

$$\frac{f(x)+f(-x)}{x^2}=\frac{f(y)+f(-y)}{y^2},(\text{若}xy\neq 0).$$

因此可设 $\frac{f(x)+f(-x)}{x^2}=t(t\text{为常值}, t\in\mathbb{R})(x\neq 0)$. 代入⑥有

$$f(x+y)-f(x)-f(y)=xyt(y\neq 0) \tag{⑧}$$

⑧再代回 $(*)$ 有

$$(x+y)\left(f(x)-f(y)\right)=(x-y)\left(f(x)+f(y)+xyt\right)(y\neq 0).$$

展开有

$$2yf(x)=2xf(y)+(x-y)xyt,$$

故

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{f(y)}{y}+\frac{(x-y)t}{2}(xy\neq 0),$$

即

$$\frac{f(x)}{x}-\frac{xt}{2}=\frac{f(y)}{y}-\frac{yt}{2}(xy\neq 0).$$

设

$$\frac{f(x)}{x}-\frac{xt}{2}=c(c)(x\neq 0),$$

有

$$f(x)=\frac{t}{2}x^2+cx(x\neq 0).$$

又在 $(*)$ 式中代入 $x+y=0$, $x\neq 0$, 有 $f(0)=0$. 因此 $f(x)=\frac{tx^2}{2}+cx(x\in\mathbb{R})$. 经检验, 这是 $(*)$ 的解. □

评注 本题对于函数方程基本功较好的同学难度不大, $\alpha=1$ 的情形即为 2012 年新加坡数学奥林匹克(第二轮)试题.

5. 对任意正整数 n, 我们记 $d(n)$ 为满足

$$(x+1)^2-xy(2x-xy+2y)+(y+1)^2=n$$

的正整数对 (x,y) 的对数. 求最小的一个正整数 n 满足 $d(n)=61$.

解 注意到

$$(x+1)^2 - xy(2x - xy + 2y) + (y+1)^2 = (xy - x - y - 1)^2 + 1,$$

所以 $(xy - x - y - 1)^2 = n - 1$, 于是, 可设 $n - 1 = k^2 (k \in \mathbb{N})$.

若 $k = 0$, 则

$$xy - x - y - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(y-1) = 2,$$

仅有正整数解 $(x,\ y) = (2,\ 3)(3,\ 2)$, 与 $d(n) = 61$ 相违.

若 $k = 1$, 则 $xy - x - y - 1 = 1$ 或 -1, 类似可得 $(x,\ y) = (2,\ 2),\ (2,\ 4),\ (4,\ 2)$ 也与 $d(n) = 61$ 相违.

若 $k = 2$, 则 $(1,\ x),\ x \in N_+$ 均为该方程的解, 这与 $d(n)$ 有限矛盾.

因此可设 $k > 2$, 而

$$xy - x - y - 1 = (x-1)(y-1) - 2 \geq -2 > -k,$$

故 $xy - x - y - 1 = k$. 因此 $(x-1)(y-1) = k + 2$, 即

$$x = 1 + \frac{k+2}{y-1}.$$

所以 $y - 1$ 为 $k + 2$ 的正因子, 且对每个 $k + 2$ 的正因子 a, $y - 1 = a$, $x - 1 = \frac{k+2}{a}$ 均为满足要求的解, 故 $(x,\ y)$ 解的个数等于 $k + 2$ 的正因子数 $(= 61)$.

注意到 61 为奇质数, 因此

$$k + 2 = P_1^{\alpha_1} \cdots P_t^{\alpha_t},$$

其中 $P_1 \ldots P_t$ 为互异素数, $\alpha_1 \ldots,\ \alpha_t \in \mathbb{N}_+$. 此时

$$(\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_t + 1) = 61 \Rightarrow t = 1,\ \alpha_1 = 60.$$

因此 $k + 2 = P^{60}$ (P 为素数). 故 $k + 2 \geq 2^{60}$, 则

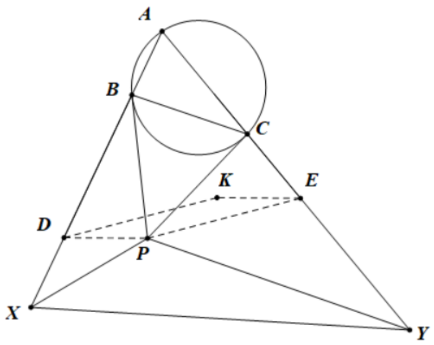
$$n = k^2 + 1 \geq (2^{60} - 2)^2 + 1.$$

$n = (2^{60} - 2)^2 + 1$ 时, $k + 2 = 2^{60}$. 此时 $d(n) = 61$, 故 $n_{\min} = (2^{60} - 2)^2 + 1$. 证毕. □

评注 本题难度不大. 题设左式的配方是解决问题的关键.

6. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 点 P 满足 $PB,\ PC$ 都与 $\triangle ABC$ 的外接圆相切. 设 $X,\ Y$ 分别是 $AB,\ AC$ 边上的两个动点, 满足 $\angle XPY = 2\angle BAC$, 且 P 在 $\triangle AXY$ 内, 设 Z 是 A 关于 XY 的对称点. 证明: $\triangle XYZ$ 的外接圆过一个定点.

证明 1 由于 BP 与 $\odot ABC$ 相切, 故 $\angle XBP = 180° - \angle ABP = \angle ACB$. 于



是, 可在 BX 上取点 D, 使得 $\triangle DPB \sim \triangle ABC$. 同理, 可在 CY 上选点 E, 使得 $\triangle ECP \sim \triangle ABC$. 因为 $DB = AC \cdot \frac{PB}{BC}$ 为定值, 所以 D 为定直线 AX 上一个定点, 同理可证, E 为定直线 AY 上一个定点.

作平行四边形 $DPEK$, 则 K 也为定点, 下证: K 在 $\odot XYZ$ 上.

由于 $\angle XPY = 2\angle BAC$, 而 $\angle BPC = 180^\circ - 2\angle BAC$. 故

$$\angle DPX + \angle EPY = 360^\circ - \angle BPD - \angle BPC - \angle CPE - \angle XPY = \angle BAC.$$

又 $\angle DPX + \angle DXP = \angle BDP = \angle BAC$, 故 $\angle DXP = \angle EPY$.

同理 $\angle DPX = \angle EYP$. 因此

$$\triangle DXP \sim \triangle EPY. \tag{$**$}$$

有

$$\frac{DP}{DX} = \frac{EY}{EP} \Rightarrow \frac{EK}{DX} = \frac{EY}{DK}.$$

又 $\angle KDP = \angle KEP$(因为 $DPEK$ 为平行四边形), $\angle PDX = \angle PEY$ $\big($由$(**)\big)$. 所以

$$\angle XDK = \angle KEK \Rightarrow \triangle XDK \sim \triangle KEY. \tag{$***$}$$

注意

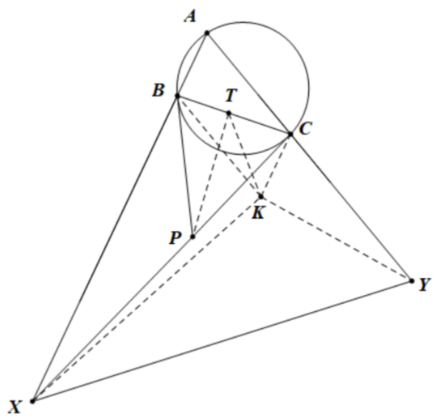
$$\angle DKE = \angle DPE = \angle BPD + \angle BPC + \angle CPE = 360^\circ - 3\angle BAC,$$

$$\begin{aligned}\angle BDK &= 180^\circ - \angle BAC - \angle AEP(\text{ 由 } DK \mathbin{/\!/} EP)\\ &= 180^\circ - \angle BAC - \angle BAC = 180^\circ - 2\angle BAC.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\angle XKY = \angle DKE - \angle DKX - \angle EKY &= \angle DPE - \angle DKX - \angle DXK(\text{由}(***))\\ &= \angle DPE - \angle BDK = 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ - \angle XZY.\end{aligned}$$

故 K 在 $\odot XYZ$ 上, 证毕. $\square$



证明 2 取点 K 满足 $ABKC$ 为平行四边形, 下证: 此定点 K 在 $\odot XYZ$ 上. 注意

$$\angle XBP = \angle ACB,\ \angle YCP = \angle ABC,\ \angle XPY = 2\angle BAC = 180^\circ - \angle BPC,$$

故

$$\angle BPX + \angle CPY = 360^\circ - \angle XPY - \angle BPC = 180^\circ.$$

因此

$$\begin{aligned}\angle BXP + \angle CYP &= 360^\circ - \angle XBP - \angle BPX - \angle PCY - \angle YPC \qquad ① \\ &= \angle BAC = \angle BKC.\end{aligned}$$

所以可在线段 BC 上取点 T, 使得 $\angle BKT = \angle BXP$, 则有 $\angle CYP = \angle CKT$ (用到①). 又注意到

$$\angle TBK = \angle ACB = \angle PBX,\ \angle TCK = \angle ABC = \angle PCY.$$

因此

$$\triangle BXP \sim \triangle BKT,\ \triangle CKT \sim \triangle CYP.$$

进一步可得 $\triangle BXK \sim \triangle BPT$, $\triangle CYK \sim \triangle CPT$. 因此

$$\angle BXK + \angle CYK = \angle BPT + \angle CPT = \angle BPC,$$

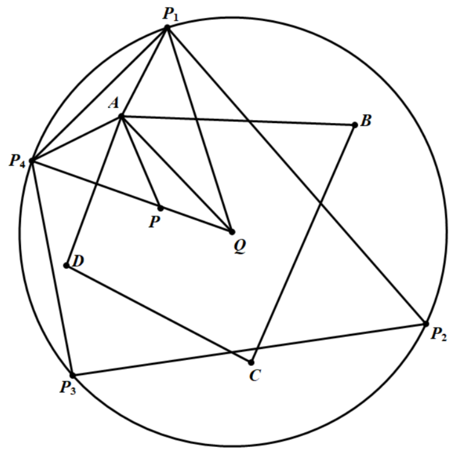
故

$$\begin{aligned}\angle XKY &= \angle AXK + \angle AYK + \angle BAC \\ &= \angle BPC + \angle BAC \\ &= 180^\circ - \angle BAC \\ &= 180^\circ - \angle XZY.\end{aligned}$$

因此 K 在 $\odot XYZ$ 上, 证毕. □

证明 3 我们先证如下引理.

引理 在凸四边形 $ABCD$ 中(字母与原题无关), 点 P 存在等角共轭点 Q 的充要条件为 $\angle APD+\angle CPB=180^\circ$.



证明 设 P 关于 AB, BC, CD, DA 的对称点分别为 P_1, P_2, P_3, P_4.

(1) 必要性: 由点 P, Q 互为等角共轭点, 可得

$$\angle P_4AQ=\angle PAD+\angle QAD=\angle BAD,$$

同理可得 $\angle P_1AQ=\angle BAD$, 故 $\angle P_1AQ=\angle P_4AQ$. 又 $AP_1=AP=AP_4$, 因此 $\triangle P_4AQ\cong\triangle P_1AQ$, 有 $QP_4=QP_1$. 同理

$$QP_1=QP_2,\ QP_2=QP_3,\ QP_3=QP_4.$$

因此 P_1, P_2, P_3, P_4 共圆 Q. 故 $\angle P_4P_1P_2+\angle P_2P_3P_4=180^\circ$. 考虑到

$$\angle P_4P_1P_2=\angle P_4P_1P+\angle PP_1P_2=\frac{1}{2}\left(\angle PAP_4+\angle PBP_2\right)=\angle PAD+\angle PBC.$$

同理 $\angle P_2P_3P_4=\angle PDA+\angle PCB$. 因此

$$\angle P_4P_1P_2+\angle P_2P_3P_4=360^\circ-\angle APD-\angle BPC,$$

即 $\angle APD+\angle BPC=180^\circ$.

(2) 充分性: 由 $\angle APD+\angle BPC=180^\circ$, 同 (1) 可得 $\angle P_4P_1P_2+\angle P_2P_3P_4=180^\circ$, 故 P_1, P_2, P_3, P_4 共圆. 取此圆圆心 Q, 也有 $\triangle AP_4Q\cong\triangle AP_1Q$. 因此

$$\begin{aligned}\angle P_4AQ=\angle P_1AQ&\Rightarrow\angle PAD+\angle QAD=\angle PAB+\angle QAB\\&\Rightarrow AP,\ AQ\text{ 为 }\angle BAD\text{ 中一对等角共轭线}.\end{aligned}$$

对 $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$ 类似考虑, 知 Q 为 P 的等角共轨点.

综合(1)(2)知引理得证.

回到原题. 注意到 $\angle XPY=2\angle BAC=180^\circ-\angle BPC$, 故在凸四边形

$BCYX$ 中对点 P 使用引理可得,

$$\angle XKY = 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ - \angle XZY$$

其中, K, P 互为等角共轭点. 因此 K 在 $\odot XYZ$ 上, 证毕. □

评注 本题为动点问题, 一般策略是寻求变化中的不变量, 如线段的相关代数关系或恒成立的相似. 当然, 对某些特殊点的性质 (如证法 3) 进行研究也常常能够得到一些妙解.