匈牙利 Kürschák 竞赛

(1975－2007)

侯傑夫, 王琇, 尹顺

(湖南师范大学附属中学, 410006)

指导老师：汤礼达

匈牙利是数学竞赛的发源地, 其举办的 Kürschák 竞赛更是全球范围内历史最悠久的数学竞赛. Kürschák 竞赛的试题有着纯粹的数学风味, 常具有一定深入的背景.

在此前的一篇文章中, 我们给出了 Kürschák 竞赛从 2008 年至 2019 年的试题解答与评注. 本文继续给出 1975 年至 2007 年试题的解答与部分问题的评注, 其中许多问题与解法都已成为经典. 部分试题资料与好的解答参考自 KöMaL.

由于能力有限, 难免有不当疏漏之处, 敬请读者批评指正.

2007.1 把 $n \geq 3$ 张卡片正面朝下放在一个圆上, 每一步操作选择一张卡片称为 B, 然后在与其相邻的两张卡片中任取一张称为 A,另一张称为 C, 将 C 放在 A 的位置上, 并分别将 A, B 移到原来由 B, C 占据的位置上,同时把 A, B 翻面.是否可以用有限次操作(至少一次)使所有卡片都回到初始位置并且正面朝上?

解. 在任意一个状态下,对一张卡片 A. 记 $f(A)$ 为这张卡片从开始至此时的翻面次数, $g(A)$ 表示其运动路程和(例如, 若 A 顺或逆时针移动1个位置, 则 $g(A)$ 增加1).

如果 n 为奇数,考虑 $S = \sum f(A)$ 的变化. 开始时 $S = 0$,且每步操作 S 增加2, 故 S 恒为偶数.但在要求的状态下, S 为奇数,故这种状态不可能出现.

如果 n 为偶数, 对固定的一张卡片 A, 考虑 $T = g(A) + f(A)$ 的变化.同样地, 考虑每次的变化知 T 恒为偶数. 然而在要求的状态下, $g(A)$ 是偶数(注意共有偶数张牌), $f(A)$ 是奇数, 故 T 是奇数. 由此可见在 n 为偶数时这种状态也不可能出现. □

评注. 我们寻找不变量来说明某种状态不出现. 注意到题中的操作既改变了卡片的位置, 又改变了卡片的正反状态, 因此其中可能含有多组不变量, 将不同的不变量进行组合甚至可能得到更多信息. 在发掘出这些不变量后, 我们对 n 的每种奇偶性分别选择了适当, 有效的不变量. 本题对熟悉不变量的同学来说不算难题.

2007.2 已知从一个首项为 2 的无穷等差数列中任取连续 2007 项, 都可以找到一项与其余 2006 项互素. 证明: 在任意连续 2008 项中也存在一项与其余 2007 项互素.

证明. 称一些整数是好的, 若存在其中的一项与其他各项互素. 我们即要证明, 设 $d \in \mathbb{Z}$ 满足: 对于以2为首项, d 为公差的等差数列, 若其中任意连续2007项是好的, 则其中任意连续2008项是好的.

易知 $2 \nmid d$. 设这等差数列是 $\{a_i\}_{i\geq 0}$, 其中首项 $a_0 = 2$, 于是 $a_i = 2 + id$.

对 $i \geq 0$, 有 $i \not\equiv i + 2007 \pmod 2$. 在接下来证明"$a_i, \ldots, a_{i+2007}$ 是好的"时我们只要用到其中前2007项是好的以及后2007项是好的, 从而不妨设 $2 \mid i$.

设 $0 \leq j \leq 2006$ 满足 a_{i+j} 与 $a_{i+k}\,(0 \leq k \leq 2006, k \neq j)$ 互素. 注意到 $2 \mid a_{i+2l}, l = 0, 1, \ldots$, 故 j 是奇数.

下证 a_{i+j} 与 $a_{i+l}(0 \leq l \leq 2007, l \neq j)$ 互素, 为此只用证 $(a_{i+j}, a_{i+2007}) = 1$.

事实上, 易知 $2 + (i+j)\,d$ 与 $2, d$ 均互素, 故 $2 + (i+j)\,d$ 与 $2d$ 互素, 因此

$$\begin{aligned}(a_{i+j}, a_{i+2007}) &= (a_{i+j}, a_{i+2007} - a_{i+j}) \\ &= (2 + (i+j)\,d, (2007 - j)\,d) \\ &= \left(2 + (i+j)\,d, \frac{2007 - j}{2}\right). \qquad (*)\end{aligned}$$

对于 $l \in \{0, 1, \ldots, 2006\} \setminus \{j\}$, 由条件知 $1 = (a_{i+j}, a_{i+l}) = (2 + (i+j)\,d, |j - l|)$, 即对 $l = 1, 2, \ldots, \max\{j, 2006 - j\}$ 有 $(2 + (i+j)\,d, l) = 1$. 而显然

$$\max\{j, 2006 - j\} \geq \frac{2007 - j}{2},$$

故由 $(*)$ 可知 $(a_{i+j}, a_{i+2007}) = 1$, 证毕. □

评注. 我们注意到若 $a_i, \ldots, a_{i+2007}$ 中有一项与其他项互素, 那么该项要么在 $a_i, \ldots, a_{i+2006}$ 中与其余项互素, 要么在 $a_{i+1}, \ldots, a_{i+2007}$ 中与其余项互素, 这就给出了两个候选人, 再证明其中一个确乎满足要求即可.

2007.3 证明: 对坐标平面上的有限整点集 H, 存在 H 的子集 K 满足:

(1)每条与坐标轴之一平行的直线与 K 的交集至多含2个元素;

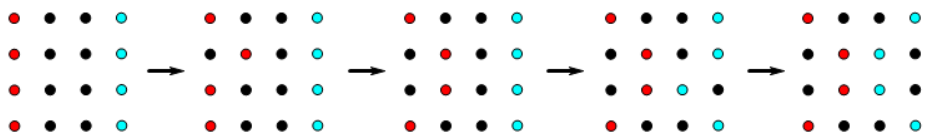
(2)集合 $H\backslash K$ 中的每个点都在以 K 中的点为端点的一条线段上.

证明. 如果一条水平直线与 H 的交集非空, 则将这个交集称为 H 的一行, 类似定义 H 的一列, 我们用如下的算法选取集合 K.

起初, 将 H 每行的横坐标最小的点染红, 横坐标最大的点染蓝(可能有点同时被染为两种颜色). 每次操作, 若 H 中某列至少有3个被染色的点, 任取这样的一列中3个染色点, 选择居中的那个点, 设为 p.

若 p 既被染红又被染蓝, 则将 p 的染色取消; 若 p 仅被染一种颜色, 则将 p 取消染色, 并将与 p 相邻的某个 H 中元素(如果存在)染同一种颜色.这里, 若 p 为红色, 选择右邻的元素; 若 p 为蓝色, 选择左邻的元素.

例如, 当 $H=\{0,1,2,3\}^2$ 时, 操作过程如下.



先证明操作过程中, 每个未染色的点都在一条以染色点为端点的水平或竖直的线段上. $(*)$

起初确乎如此. 注意操作过程中, 每行要么没有染色点, 要么恰有一个红点和一个蓝点(可能重合), 且红点横坐标不大于蓝点横坐标. 红点始终向右"移动", 蓝点始终向左"移动". 因此若某点被取消染色, 则其不会再被染色.

考虑操作过程中任意时刻的任意一个未染色的点, 若它未曾被染色, 则与它同行必有两染色点, 且它在这两点所连线段上; 若它曾被取消过染色, 则由操作规则知自它被取消染色那一刻起, 就在同列的两染色点所连线段上. 故 $(*)$ 成立.

注意到每次操作都取消了某点的染色, 由前面的分析知每个点至多被取消一次染色, 因此操作有限步后停止. 设最后得到的全体染色了的点的集合为 K, 则显然 K 满足条件(1). 由 $(*)$ 知 K 满足条件(2), 因此 K 即为所求的子集. □

评注. 将条件 (2) 的要求加强为水平竖直线段是自然想法, 但由于 H 的任意性要同时满足 (1),(2) 有些无从下手,因此想到先满足其中一个条件, 通过调整使得一个条件始终满足并且逐步靠近另一个条件, 上面的算法即是如此.直观上也就是先在行方向上确定"行边界", 再从列方向考虑那些不在"列边界"上的, 将它们向内收缩, 注意叙述的严谨即可.本解法参考自AoPS.

2006.1 证明或否定: 存在由空间中2006个点组成的集合 S,使得 S 的元素不全共面, 并且对任意一条连接 S 中两点的线段, 都存在另一条连接 S 中两点的线段与之平行.

解. 存在这样的集合 S.

考虑两个圆心重合但不在同一平面上的等圆, 设它们的公共圆心为 O, 分别取这两个圆周的1004等分点, 使得这两圆的交点在两个圆中均作为取出的等分点. 这样我们得到了 $1004 \times 2 - 2 = 2006$ 个不全共面的点, 设 S 是这2006个点的集合, 下证 S 满足要求.

对任意 $A, B \in S$, $A \neq B$, 若 A, B 在同一个已知圆上, 则显然此圆上还有另一条弦 $CD \parallel AB$; 若 A, B 不在同一个已知圆上, 则 A, B 均不是两圆交点. 设 A, B 关于 O 的对称点分别为 A', B', 因 A, B 不在同一个已知圆上, 故 $\{A', B'\} \neq \{A, B\}$. 显然 $\{A', B'\} \subseteq S, AB \parallel A'B'$.

故 S 符合要求. □

评注. 为满足 $CD \parallel AB$ 可以利用圆的平行弦, 也可利用中心对称, 将这两种办法结合即可满足不共面的要求.

2006.2 设 a, t, n 是正整数, $a \leq n$. 集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 的子集称为"好的", 如果其中任两个元素至少相差 t. 证明: 不含 a 的好子集数目不大于含 a 的好子集数目的 t^2 倍.

证明. 设 U 是不含 a 的好子集的全体, V 是含 a 的好子集的全体, 要证明 $|U| \leq t^2 |V|$.

设集合 $M = \{a - t + 1, \ldots, a - 1, a, a + 1, \ldots, a + t - 1\}$, 对任意 $A \in U$, 设

$$f(A) = (A \backslash M) \cup \{a\}.$$

显然 $f(A) \in V$, 因此 f 是 U 到 V 的映射.

此外对于 f 值域中的任意元素 B, B 的原像至多 t^2 个. 这是因为对于 $A \in U$, 由 A 是好的可知

$$|A \cap \{a - t + 1, \ldots, a - 1\}| \leq 1,$$

$$|A \cap \{a + 1, a + 2, \ldots, a + t - 1\}| \leq 1,$$

$$|A \cap \{a\}| = 0.$$

因此 $A\cap M$ 至多 t^2 种可能, 即 B 的原像至多 t^2 个.

综上即知 $|U|\le t^2|V|$. □

2006.3 n 个人坐在圆桌周围, 共持有 $n-1$ 张卡片. 一次操作,指一个持有至少2张卡片的人给其2个邻居每人一张卡片. 证明: 操作只能进行有限次.

证明. 按顺时针方向给圆周上的 n 个人标记为 $A_1,A_2,\ldots,A_n$.

考虑圆桌上相邻两个人, 当第一次有卡片在这两人之间传递时, 我们将这张卡片与这个相邻两人对绑定, 并说明可认为这卡片此后只在 A,B 之间传递. $(*)$

事实上, 某次操作前, 若与相邻两人对 (A,B) 绑定的卡片 c 在 A,B 之一手中, 不妨设其在 A 手中. 这次操作, 若是 A 以外的人分发卡片, 则 c 仍在 A 手中; 若是 A 分发卡片, 由于 c 之外的其他卡片不与 (A,B) 绑定, 故可认为 A 将 c 给了 B. 于是本次操作后, c 仍在 A,B 之一手中. 故 $(*)$ 得证.

由 $(*)$ 知, 每张卡片至多对应一个相邻两人对, 但卡片数少于人数, 从而存在一个相邻对未绑定任意一张卡片. 故存在圆桌上相邻两人, 不妨设为 A_1,A_n,他们之间未传递过卡片.

考虑每张卡片所在人的下标平方的和 f, 一次操作一定是两张卡片从某个 $A_i(2\le i\le n-1)$ 转移到 A_{i-1} 和 A_{i+1},则f 增加 $(i+1)^2+(i-1)^2-2i^2=2$.

另一方面, 显然 $f\le(n-1)n^2$, 故操作只能进行有限次. □

评注. 注意到分卡片的操作(在直线上)直观上使卡片更分散, 因此可以引入某种赋值来刻画这种分散, 但是圆周上的情况可能会不一样. 这里我们说明有2人间未传递卡片, 也就可以将这2人之间的圆周去掉从而化为直线的情形.

这是一道经典的题, 在[1]中有一道类似的习题:

一个圆被分成 n 个扇形, 在这 n 个扇形中共有 $n+1$ 只青蛙, 每一秒钟都有某两只同在一个扇形中的青蛙分别跳到两侧相邻的扇形中. 求证: 在某一时刻, 至少有一半扇形内落有青蛙.

其本质与2005年CMO第三题也是一致的.

2005.1 给定正整数 $N>1,a_1,\ldots,a_N$ 为非负实数且和至多为500. 证明: 存在整数 $k\ge1$ 及整数 $1=n_0<n_1<\cdots<n_k=N$, 使得 $\sum_{i=1}^k n_ia_{n_{i-1}}<2005$.

证明. 记 $n_0=1, n_k=N$, 令

$$S=\sum_I\left(\left(\prod_{i\in I}\frac{2}{i+1}\right)\cdot\left(\prod_{j\in\bar{I}}\left(1-\frac{2}{j+1}\right)\right)\left(\sum_{\substack{I=\{n_1,\ldots,n_{k-1}\}\\1\le i\le k}}n_ia_{n_{i-1}}\right)\right),$$

其中 $\sum\limits_I$ 表示对全体 $I\subseteq\{2,3,\ldots,N-1\}$ 求和, $\bar{I}=\{2,3,\ldots,N-1\}\setminus I$ (对指标集为空集的求和定义为0, 求积定义为1).

注意到

$$\sum_I\left(\prod_{i\in I}\frac{2}{i+1}\right)\left(\prod_{j\in\bar{I}}\left(1-\frac{2}{j+1}\right)\right)=\prod_{i\in\{2,3,\ldots,N-1\}}\left(\frac{2}{i+1}+1-\frac{2}{i+1}\right)=1,$$

且对每个 I 有 $\prod_{i\in I}\frac{2}{i+1}\prod_{j\in\bar{I}}\left(1-\frac{2}{j+1}\right)>0$. 因此由平均值原理, 只要证明 $S<2005$.

考虑将 S 表达式展开后 a_n 的系数 $(1\le n<N)$. 注意到对 $1<n<m<N$, 含 ma_n 项的 $I=\{n_1,n_2,\ldots,n_{k-1}\}$ 中 $n_i=n, n_{i+1}=m$, 因此 ma_n 的系数为

$$\begin{aligned}&\frac{2}{n+1}\cdot\frac{2}{m+1}\cdot\prod_{n<l<m}\left(1-\frac{2}{l+1}\right)\cdot\sum_J\left(\prod_{i\in J}\frac{2}{i+1}\prod_{i\in\overline{J}}\left(1-\frac{2}{i+1}\right)\right)\\&=\frac{2}{n+1}\cdot\frac{2}{m+1}\cdot\prod_{n<l<m}\left(1-\frac{2}{l+1}\right)\\&=\frac{4n}{(m-1)\,m\,(m+1)}\\&<\frac{1}{m}\left(\frac{4n}{m-1}-\frac{4n}{m}\right),\end{aligned}$$

其中 $\sum\limits_J$ 表示对全体 $J\subseteq(\{2,3,\ldots,n-1\}\cup\{m+1,m+2,\ldots,N-1\})$ 求和,

$$\overline{J}=(\{2,3,\ldots,n-1\}\cup\{m+1,m+2,\ldots,N-1\})\setminus J.$$

而对 $2\le m<N$, ma_1 的系数为

$$\frac{2}{m+1}\cdot\prod_{1<l<m}\left(1-\frac{2}{l+1}\right)=\frac{4}{(m-1)\,m\,(m+1)},$$

因此上述对 $ma_n(1<n<m<N)$ 的系数计算和估计对于 $n=1$ 也成立.

此外,容易看出对 $1\le n<N$, Na_n 的系数为

$$\frac{2}{n+1}\cdot\frac{n}{n+2}\cdot\cdots\cdot\frac{N-2}{N}=\frac{2n}{N\,(N-1)},$$

因此对 $1\le n<N$, a_n 的系数小于

$$\sum_{m=n+1}^{N-1}m\cdot\frac{1}{m}\left(\frac{4n}{m-1}-\frac{4n}{m}\right)+N\cdot\frac{2n}{N\,(N-1)}=4-\frac{4n}{N}+\frac{2n}{N-1}\le 4.$$

故 $S<4\sum_{n=1}^{N}a_n\le 2000.$ □

评注. 运用更精细的分析手段可以证明, 存在 $k\ge 1$ 和 $1=n_0<n_1<\cdots<n_k=N$ 使得

$$\sum_{i=1}^{k}n_ia_{n_{i-1}}<3a_1+e\left(a_2+\cdots+a_{N-1}\right).$$

我们实际上是以概率 p_i 选出 a_{n_i} 然后计算 $\sum_{i=1}^{k}n_ia_{n_{i-1}}$ 的期望, 因此主要困难在于概率 p_i (加权系数)的选取. 本题有难度.

2005.2 A,B 两人打网球, 先得4分并比另一人高至少2分者胜. 已知每场比赛 A 的得分概率为 $p\le\frac{1}{2}$, 每场比赛都是独立的. 证明: A 胜的概率不大于 $2p^2$.

证明. 易知 A 以4比0, 4比1, 4比2获胜的概率分别为

$$p^4,\binom{4}{1}(1-p)p^4,\binom{5}{2}(1-p)^2p^4.$$

若 A 以 $k+2$ 比 $k(k\ge 3)$ 获胜, 则第6场比赛结束时两人比分为3平. 且从第7场起 A,B 总是其中一者先得一分, 另一者随即追平, 直到最后 A 连得两分取胜. 由此知这样的概率为

$$\binom{6}{3}(1-p)^3p^3\cdot\left(2(1-p)p\right)^{k-3}\cdot p^2.$$

因此 A 以大于4分取胜的概率为

$$\binom{6}{3}(1-p)^3p^5\sum_{k\ge 3}\left(2(1-p)p\right)^{k-3}=20(1-p)^3p^5\cdot\frac{1}{p^2+(1-p)^2}.$$

综上所述, A 获胜的概率为

$$\begin{aligned}&p^4+4\left(1-p\right)p^4+10(1-p)^2p^4+20(1-p)^3\left(\frac{p^5}{p^2+(1-p)^2}\right)\\=&\,p^2\left(10p^4-24p^3+15p^2+\frac{20p^3(1-p)^3}{p^2+(1-p)^2}\right),\end{aligned}$$

因此只要证明当 $p\le\frac{1}{2}$ 时,

$$f\left(p\right)=10p^4-24p^3+15p^2+\frac{20p^3(1-p)^3}{p^2+(1-p)^2}\le 2. \qquad (*)$$

事实上, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{11}{8}+\frac{5}{8}=2$. 而

$$f'\left(p\right)=p\left(40p^2-72p+30\right)+\frac{3p^2(1-p)^2\left(1-2p\right)}{p^2+(1-p)^2}+\frac{2p^3(1-p)^3\left(1-2p\right)}{p^2+(1-p)^2},$$

其右边每个单项在 $0\le p\le\frac{1}{2}$ 时均非负, 故 $f(p)(0\le p\le\frac{1}{2})$ 单调不减, 由此即知 $(*)$ 成立. □

2005.3 用 2×1 多米诺搭塔. 首先, 取 55 块多米诺放在桌上使它们覆盖一

个 10×11 矩形, 这是第一层. 新一层用 55 块多米诺在前一层之上覆盖同一个 10×11 矩形. 一座塔称为坚固的, 如果每个 10×11 矩形中的非格点可以找到一个多米诺以它为内点. 问: 一个坚固的塔至少有几层?

解. 至少5层.

先证不能少于5层. 我们称 10×11 矩形 T 中非 T 边界的单位格线为好线段, 一个好线段称为特别的, 若它的一个端点在 T 的边界. 显然, 题中多米诺塔坚固当且仅当每个好线段都能向竖直方向平移而将至少一个多米诺一分为二(这时称该好线段"切割"此多米诺).

假设层数不大于4. 对每个非特殊的好线段 a (显然这样的 a 存在), 可以找到一个 T 中的单位正方形 S 以 a 为边, 且 S 没有在 T 边界的边. 注意每一层中只有一个多米诺被 S 的四边之一切割(即为这层中覆盖 S 的多米诺), 故一定恰有4层, 且 S 的四个边每个恰切割一层中的一个多米诺. 特别地, a 只切割一个多米诺.

类似地, 对特殊的好线段 a, 也可以找到 T 的一个单位正方形 S 以 a 为边, 且 S 有(含 a 在内的) 3个边为好线段, 另两个边必分别有被其切割的多米诺, 因此 a 切割至多 $4-2=2$ 个多米诺. 进一步, 易见在一个单位正方形内互为对边的两个特殊的好线段中, 至多一个可以切割2个多米诺.

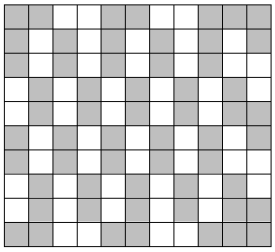
由上述, 每个好线段切割至多2个多米诺, 且切割2个多米诺的好线段数目不超过 $2 \times 5 + 2 \times 5 = 20$. 注意好线段共199个, 从而好线段切割多米诺的总次数 $n \leq 20 + 199 = 219$.

另一方面, 注意每层中有55个多米诺, 被切割55次, 故 $n = 4 \times 55 = 220$, 矛盾. 因此至少需要5层多米诺.

下面我们给出五层的例子:

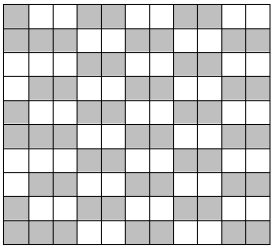
第一层, 放置多米诺使得每个多米诺平行于 T 的短边;

第二层:

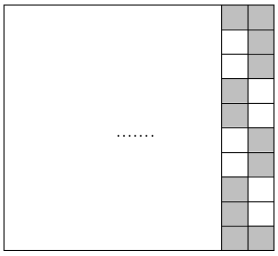


第三层:

第四层的摆法与第三层关于第6列对称;



第五层:

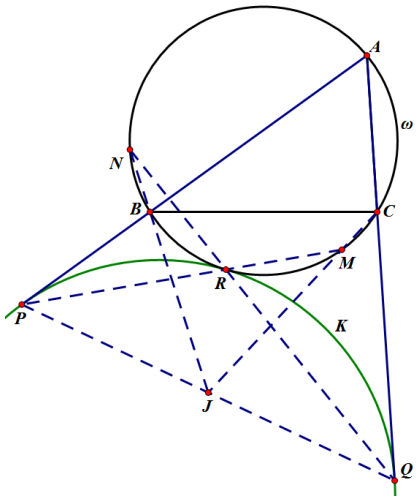


上图空白处多米诺可任意放置.

这样一来, 第一、二、五层多米诺的摆放使每个平行于 T 的长边的好线段均切割了多米诺; 第三、四层多米诺的摆放使每个平行于 T 的短边的好线段均切割了多米诺. 因此上面给出的多米诺塔是坚固的. □

评注. 我们当然只要考虑格线上的点, 由此自然将问题转化为格线"切割"多米诺. 考虑一个不在边界的单位正方形格, 注意到每层它的四边中恰有一条切割了多米诺, 由此看出至少4层. 构造4层的例子时遇到的阻碍导致我们在4层与5层之间抉择, 最终我们通过细节上的优化证明了至少需要5层.

2004.1 设 ω 为 $\triangle ABC$ 的外接圆, 圆 K 与 ω 外切并分别与线段 AB, AC 的延长线相切于 P, Q. 证明: $\triangle ABC$ 中 A 所对的旁心是线段 PQ 的中点.



数学新星网

解. 设 ω与 K 的切点为 R. 由相切圆的位似性质知, PR 过弧 ACB 中点 M, QR 过弧 ABC 中点 N.

对圆内接六边形 $ABNRMC$ 应用Pascal定理知

$$P = AB \cap RM, Q = NR \cap AC, J = BN \cap CM$$

三点共线.

显然 J 是 $\triangle ABC$ 中 A 所对的旁心. 又 $AP = AQ$, 且 AJ 平分 $\angle PAQ$, 故 J 是 PQ 中点. 结论得证. □

评注. 本题结论是伪旁切圆(即题中的圆 K)的一个最基本的性质,可与伪内切圆的性质类比.

2004.2 求最小的正整数 $n \neq 2004$, 满足: 存在整系数多项式 f 使得方程 $f(x) = 2004$ 至少有一个整数解, 且 $f(x) = n$ 至少有 2004 个不同的整数解.

解. 由条件我们可设存在整系数多项式 $A(x)$ 及互异整数 $x_1, \ldots, x_{2004}$, 使得

$$f(x) = A(x)(x - x_1)\cdots(x - x_{2004}) + n.$$

现要求方程

$$A(x)(x - x_1)\cdots(x - x_{2004}) = 2004 - n\,(\neq 0)$$

有至少一个整根 x_0, 则 $A(x_0) \neq 0$. 又 $A(x_0)$ 是整数, 故 $|A(x_0)| \geq 1$.

注意到 $x_0 - x_1, \ldots, x_0 - x_{2004}$ 是互异的非零整数, 故

$$|A(x_0)(x_0 - x_1)\cdots(x_0 - x_{2004})| \geq (1002!)^2,$$

由此得 $|n - 2004| \geq (1002!)^2$ 从而 $n \geq (1002!)^2 + 2004$.

现取 $A(x)$ 为常数 -1,而 $x_0, x_1, \ldots, x_{2004}$ 分别为 $0, 1, 2, \ldots, 1002, -1, -2, \ldots, -1002$, 代入即知 $n = (1002!)^2 + 2004$ 满足条件, 故此即 n 的最小值. □

评注. 本题在进行等价转换之后, 只要利用整数的离散性即可得到估计.

2004.3 在圆上放置了一些红点和蓝点, 允许进行下列操作:

(a)在圆上某处加入一个红点并且改变其左右邻居的颜色;

(b)去掉一个红点并改变其左右邻居的颜色.

初始时圆上恰有2个蓝点, 是否可用有限次操作得到恰有2个红点, 而没有蓝点的状态?

解. 不可以.

不难验证每次操作蓝点的数目奇偶性不变, 故蓝点总是偶数个.

设全体蓝点将圆周分为若干段圆弧, 则可以将这些圆弧相间染为 a, b 两色. 设状态 A 对应的函数 $f(A)$ 定义为

$$f(A) = a \text{ 色弧上红点数} - b \text{ 色弧上红点数}.$$

设在点 Q, R 之间添加点 P, 先假设弧 QR 是 a 色的.结合红点两侧弧的颜色相同, 蓝点两侧弧的颜色不同可如下进行分类讨论.

1. Q, R 均为红色.添入 P 之后 Q, R 都变成蓝色, 弧 QR 变成 b 色, f 减少3.

2. Q, R 一红一蓝.添入 P 之后 Q, R 颜色互换, 弧 QR 变成 b 色, f 减少 3.

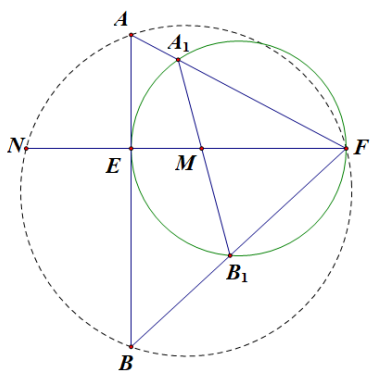
3. Q, R 均为蓝色.添入 P 之后 Q, R 都变成红色, 弧 QR 变成 b 色, f 减少 3.

如果弧 QR 是 b 色的, 类似可知 f 总是增加3. 因为去点是添点的逆过程, 故每次去点时 f 变化量为 ± 3.

由于初始时 $f = 0$, 故 f 恒为3的倍数, 而题述状态对应的 $f = \pm 2$, 不能达到. □

2003.1设圆 k 以线段 EF 为直径, 其在 E 处切线为 e, 考虑 e 上所有的点对 (A, B), 使 E 在 A, B 之间, 且 $AE \cdot EB$ 是一个固定常数. 设 AF 与 k 交于点 A_1, BF 与 k 交于点 B_1.

证明: 在点对 (A, B) 变化时, A_1B_1 过一个定点.



证明. 设 $M = A_1B_1 \cap EF$, 考虑以 EF 为半径, F 为圆心的 $\odot F$.

注意到以 $\odot F$ 为基圆的反演 φ交换 A, A_1 及 B, B_1, 故

$$\varphi(A_1B_1) = \odot(ABF),$$

$$\varphi(M) = EF \cap \odot(ABF) = N,$$

从而有 $EN = \frac{EA \cdot EB}{EF}$ 为定值.

故 N 为定点, 从而 $M=\varphi(N)$ 也是定点, 即证. □

评注. 由对称性, 所证的定点必在 EF 上, 即 $A_1B_1\cap EF$, 作简单的反演让其位置更为明显了.

2003.2 证明: 若简单图 G 有 $n\geq 3$ 个顶点且可以唯一3染色, 则 G 至少有 $2n-3$ 条边. (简单图 G 称为可以3染色的, 若存在 G 的顶点的3染色使任两个相邻顶点不同色.图可以唯一3染色是指不存在顶点 u,v, 在一种3染色中异色, 在另一种3染色中同色.)

证明. 设三种颜色分别为 a,b,c, 用 G_{ab} 表示 G 的 a 色顶点, b 色顶点, 以及 a,b 色顶点之间的边所构成的子图. 先证明一个引理.

引理. G_{ab} 是连通的.

若不然, 任取 G_{ab} 的一个连通分支, 将其中各顶点染色反转(a 色改为 b 色, b 色改为 a 色), 易知得到了一个3染色, 并且由 G_{ab} 至少两个连通分支可知, 这是一个不同的3染色. 矛盾!

由引理, 设 V_a 为 a 色顶点的集合,类似定义 V_b,V_c 以及 G_{bc},G_{ca}, 则

$$|E(G_{ab})|\geq |V_a|+|V_b|-1,$$

同理

$$|E(G_{bc})|\geq |V_b|+|V_c|-1,$$

$$|E(G_{ca})|\geq |V_c|+|V_a|-1.$$

注意 G_{ab},G_{bc},G_{ca} 的边两两不同, 故求和得

$$|E(G)|=\sum|E(G_{ab})|\geq 2(|V_a|+|V_b|+|V_c|)-3=2n-3.$$

结论得证. □

评注. 在边数较少时, 我们需要寻找办法构造出不同的3染色, 新的3染色当然需要在原有染色的基础上进行更改. 注意到 $2n-3$ 其实是相对较小的值, 这或许会引导我们考虑2色子图的连通性, 进而意识到可以直接在单个的连通分支中进行.

2003.3 证明: 除有限个正整数之外, 下列不等式对所有正整数 n 成立:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\gcd(i,j)>4n^2.$$

证明. 注意到 $\sum_{d|n}\varphi(d)=n$, 其中 φ 为Euler函数, 则

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\gcd(i,j)&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{d|i,d|j}\varphi(d)=\sum_{d=1}^{n}\varphi(d)\sum_{\substack{1\le i,j\le n\\ d|i,d|j}}1=\sum_{d=1}^{n}\varphi(d)\left[\frac{n}{d}\right]^2\\&>\sum_{d=1}^{n}\varphi(d)\cdot\left(\frac{n}{d}-1\right)^2>\left(\sum_{d=1}^{n}\frac{\varphi(d)}{d^2}\right)n^2-2n\sum_{d=1}^{n}\frac{\varphi(d)}{d}\\&\ge\left(\sum_{d=1}^{n}\frac{\varphi(d)}{d^2}\right)n^2-2n^2.\end{aligned}$$

注意到

$$\left(\sum_{d=1}^{n}\frac{\varphi(d)}{d^2}\right)\left(\sum_{d=1}^{n}\frac{1}{d^2}\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\varphi(i)}{i^2\cdot j^2}\ge\sum_{\substack{1\le i,j\le n\\ ij\le n}}\frac{\varphi(i)}{(i\cdot j)^2}=\sum_{d=1}^{n}\sum_{k|d}\frac{\varphi(k)}{d^2}=\sum_{d=1}^{n}\frac{1}{d},$$

且有

$$\sum_{d=1}^{n}\frac{1}{d^2}\le 1+\sum_{d=2}^{n}\frac{1}{d(d-1)}=2-\frac{1}{n}<2.$$

又熟知级数 $\sum\limits_{d=1}^{\infty}\frac{1}{d}$ 发散, 从而存在正整数 N, 当 $n>N$ 时, 有

$$\sum_{d=1}^{n}\frac{1}{d}>12,$$

此时就有

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\gcd(i,j)>4n^2,$$

即证.

□

评注. 这是一个公因子和函数问题, 主要应用 $\sum_{d|n}\varphi(d)=n$ 进行和式变形以及估计 $\sum_{d=1}^{n}\frac{\varphi(d)}{d^2}$. 后者是注意到形式上有

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{d|n}\varphi(d)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s-1}}.$$

可以求出 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\gcd(i,j)$ 更精确的界, 有兴趣的同学可以参见[2]. 关于公因子和函数的更多问题, 可以看[3],[4].

2002.1 一个锐角不等边三角形的垂心,外心,内心分别为 H,O,I. 证明: 若该三角形有一个顶点在 $\odot(HOI)$ 上, 则必存在另一个顶点也在 $\odot(HOI)$ 上.

证明. 先证明一个引理.

引理.设 K,X,Y,T 是平面上无三点共线的四点, $KX=KY$, $TX\neq TY$, KT 平分 $\angle XTY$, 则 K,X,T,Y 共圆.

事实上, 由正弦定理

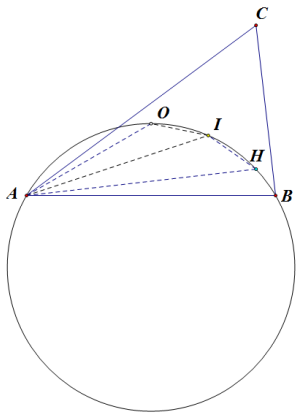
$$\frac{KX}{\sin\angle XTK}=\frac{KT}{\sin\angle KXT},$$
$$\frac{KY}{\sin\angle YTK}=\frac{KT}{\sin\angle KYT}.$$

因 $KX=KY,\angle XTK=\angle YTK$, 故 $\sin\angle KXT=\sin\angle KYT$.

若 $\angle KXT=\angle KYT$, 则 $\triangle KXT\cong\triangle KYT$, 导致 $TX=TY$, 与条件矛盾.

故 $\angle KXT+\angle KYT=\pi$, 进而由 X,Y 在 KT 两侧知引理成立.

回到原题, 设题述三角形的三个顶点分别为 A,B,C.



不妨设 H,I,O,A 共圆, 则由 AI 平分 $\angle HAO$ 的内角知 $HI=OI$. 因 BI 平分 $\angle HBO$, 故若 $BH\neq BO$, 则由引理, B,H,I,O 共圆.

而若 $BH=BO$, 则由

$$\cos B=\frac{d\left(O,AC\right)}{OC}=\frac{\frac{1}{2}BH}{OB}=\frac{1}{2},$$

知 $B=\frac{\pi}{3}$, 这时熟知 H,I,O,A,C 共圆. $(*)$

因此 B,C 之一在 $\odot(HIOA)$ 上, 证毕. □

评注. 本题基于一个熟知的命题即 $(*)$. 本题引理是角平分线基本性质之一的逆命题, 是应用较广泛的结构. 如果稍微依赖于图形, 引理还可以通过反证法, 或是将 X 关于 KT 反射来证明.

2002.2 斐波那契数列定义为 $f_1=f_2=1, f_{n+2}=f_{n+1}+f_n\,(n\in\mathbb{N}^*)$.设 a,b 是正整数使得 $\frac{a}{b}$ 在 $\frac{f_n}{f_{n-1}}$ 与 $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ 之间, 即

$$\min\left\{\frac{f_n}{f_{n-1}},\frac{f_{n+1}}{f_n}\right\}<\frac{a}{b}<\max\left\{\frac{f_n}{f_{n-1}},\frac{f_{n+1}}{f_n}\right\}.$$

证明: $b \geq f_{n+1}$.

证明. 首先证明对任意整数 $n \geq 2$, 有 $f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n$. $(*)$

对 n 归纳, $n = 2$ 时验证成立. 设 $a_n = f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2$, 则

$$\begin{aligned} a_n + a_{n+1} &= f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2 + f_n f_{n+2} - f_{n+1}^2 \\ &= f_{n+1}\left(f_{n-1} - f_{n+1}\right) + f_n\left(f_{n+2} - f_n\right) \\ &= f_{n+1}\left(-f_n\right) + f_n f_{n+1} = 0. \end{aligned}$$

故由 $a_n = (-1)^n$ 可推出 $a_{n+1} = (-1)^{n+1}$, 归纳证毕.

回到原题, 若 n 为偶数, 由 $(*)$ 知 $f_{n-1}f_{n+1} > f_n^2$, 于是由条件知

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} < \frac{a}{b} < \frac{f_{n+1}}{f_n}.$$

此即

$$\begin{aligned} bf_{n+1} - af_n > 0, \\ af_{n-1} - bf_n > 0. \end{aligned}$$

故

$$bf_{n+1} - af_n \geq 1, \tag{1}$$

$$af_{n-1} - bf_n \geq 1. \tag{2}$$

将 $(1) \times f_{n-1}$ 与 $(2) \times f_n$ 相加得

$$b\left(f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2\right) \geq f_n + f_{n-1},$$

由 $(*)$ 知此式即 $b \geq f_{n+1}$.

若 n 为奇数, 证明完全类似. □

评注. 条件需要考虑 $\frac{f_n}{f_{n-1}}$ 与 $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ 之间的大小关系, 分为两类, 任取一类利用整数离散性可得到(1),(2)再解出 b, 就会自然地考虑 $f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2$,而实际上熟知其绝对值为1. 类似地.由(1),(2)可得 $a \geq f_{n+2}$, 因为 $\frac{f_{n+2}}{f_{n+1}}$ 在 $\frac{f_n}{f_{n-1}}$ 与 $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ 之间, 所以这是最优估计.

事实上, 对既约分数 $\frac{q}{p}$ 和 $\frac{q'}{p'}$, 若 $|qp' - pq'| = 1$, 则它们称作一对共轭分数. 此时对它们之间的分数 $\frac{t}{s}$ 均有 $s \geq p + p'$.

2002.3 设 n 是正整数, 证明: 3^n 个顶点的完全图可划分成长为3的圈的不交并(两个圈不交, 是指它们没有公共的边).

证明. 对 n 归纳, $n = 1$ 时显然成立, 设 n 时成立. $n+1$ 时, 将 3^{n+1} 个顶点均分为集合 V_1, V_2, V_3, 设 $V_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_{3^n}\}$, $V_2 = \{y_1, y_2, \ldots, y_{3^n}\}$,

$V_3=\{z_1,z_2,\ldots,z_{3^n}\}$. 由归纳假设知可将 $G[V_1]$, $G[V_2]$, $G[V_3]$ 划分成若干长为3的圈的不交并. $(*)$

再取三角形集合

$$S=\left\{(x_i,y_j,z_k)\,\middle|\,3^n\text{整除 }i+j+k\right\},$$

于是对任一个 V_1,V_2,V_3 之间的边 e, e 恰在一个三角形中, 从而 S 和 $(*)$ 给出了 3^{n+1} 个顶点的完全图 G 的划分, 归纳证毕. □

评注. 命题等价于将 3^n 元子集划分成3元集, 使得任两个3元集的交集元素个数不大于1. 要满足这一点, 容易想到只要能够使得每个3元集只有2个自由变量即可, 即令3个元素满足某个方程. 但此时会产生可能有2个元素相等的问题, 为避免这一局面, 将 3^n 个元素分成3部分, 再使用这一方法即可, 这样就进行了化归. 控制自由变量的组合构造方法是应用比较广泛的.

2001.1 设 n 是正整数, 平面上 $3n-1$ 个点中任3点不共线. 证明: 可以从中取出 $2n$ 个点使其凸包不是三角形.

证明. $n=1$ 时结论平凡, 不妨设 $n\geq 2$. 用反证法, 假设命题不成立, 即任意 $2n$ 个给定点的凸包均是三角形, 从而任意不少于 $2n$ 个给定点的凸包是三角形. 这是因为我们可以按如下方式删去若干点使得剩下恰好 $2n$ 个点: 首先尽可能地删去凸包内部的点, 若凸包内部无已知点时还有多于 $2n$ 个点, 再删去若干凸包顶点. 无论如何, 在还剩下 $2n$ 个点时其凸包仍非三角形.

记 X 是所有 $3n-1$ 个点的集合, 由上述知 X 的凸包是一个三角形, 设其顶点分别是 A,B,C. 令 $A_1=A,B_1=B,C_1=C$. 对 $i=1,2,\ldots,n-1$, 假设 $A_1,\ldots,A_i$ 已取定, 记集合 $P_i=X\setminus\{A_1,\ldots,A_i\}$, 因 $|P_i|\geq 2n$, 故 P_i 的凸包为三角形. 容易知道 B,C 都是这三角形的顶点, 将余下的一个顶点记为 A_{i+1}.

这样我们归纳地定义出顶点 $A_1,\ldots,A_n$, 类似定义出 $B_1,\ldots,B_n$ 与 $C_1,\ldots,C_n$.

因 $|X|=3n-1<3n$, 诸 A_i,B_j,C_k 中必有相同的点. 不妨设 $A_p=B_q$, 于是由定义知 $X\setminus\{A_1,\ldots,A_{p-1},B_1,\ldots,B_{q-1}\}$ 中的点均在 $\triangle B_1C_1A_p\cap\triangle A_1C_1B_q$ 中, 即线段 A_pC_1 上(这里, $\triangle UVW$ 表示点 U,V,W 的凸包).

这样得到至少 $3n-1-(p-1)-(q-1)\geq 3$ 个点共线, 矛盾! □

评注. 我们注意到 $3n-2$ 个点时结论不一定成立. 事实上, 只要在 $\triangle ABC$ 内沿三条角平分线各取 $n-1,n-1,n$ 个点, 再将它移动少许使任意三点不共线即可. 在这个反例中任取 $2n$ 个点一定会在三个方向上均有点被取出, 从而凸包

为三角形. 正是注意到这个反例, 我们将三个方向上的点还原出来, 最后利用点数关系得到两个内部不交的三角形, 从而导致矛盾. 本题有一定难度.

2001.2 设整数 $k \geq 3, n > \binom{k}{3}$. 证明: 对任意 $3n$ 个两两不同的实数 $a_i, b_i, c_i\,(1 \leq i \leq n)$, 在实数 $a_i + b_i, a_i + c_i, b_i + c_i\,(1 \leq i \leq n)$ 中, 可以找到至少 $k+1$ 个两两不同的数.

并说明 $n = \binom{k}{3}$ 时, 结论不成立.

解. 设 $A_i = \{a_i + b_i, b_i + c_i, c_i + a_i\}, i = 1, 2, \ldots, n$, 则由

$$a_i = \frac{(a_i + b_i) + (c_i + a_i) - (b_i + c_i)}{2}$$

以及类似的两个式子, 知集合 $\{a_i, b_i, c_i\}$ 由 A_i 唯一确定.

因为 n 个集合 $\{a_i, b_i, c_i\}$ 两两不同, 故 $A_i\,(1 \leq i \leq n)$ 为 $\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i$ 的 $n > \binom{k}{3}$ 个两两不同的三元子集, 因此 $\left|\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i\right| > k$.

现构造 $n = \binom{k}{3}$ 时的反例. 待定 k 个实数组成集合 X, 对 X 的每个三元子集 $A = \{u, v, w\}$, 令

$$a_A = \frac{u + v - w}{2},\ b_A = \frac{w + u - v}{2},\ c_A = \frac{v + w - u}{2}.$$

容易知道存在这样的 X 使得 $3n$ 个数 $a_A, b_A, c_A (A \subseteq X, |A| = 3)$ 两两不同(只要 X 的元素在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关), 这就给出了 $n = \binom{k}{3}$ 时的反例. □

评注. 注意到每个 A_i 对应的 $\{a_i, b_i, c_i\}$ 间不交, 因此我们需要从 $\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i$ 生成 $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$; $c_1, c_2, \ldots, c_n$. 注意到 $\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i$ 的任意一个三元子集均对应三个元素后就能够得到数量关系.

2001.3 若存在坐标平面上的一个整点三角形, 满足它是所有与它相似的整点三角形中面积最小的, 证明: 这个三角形的外心不是整点.

证明. 用反证法, 假设存在所说的三角形 ABC,其外心 O 是整点. 不妨设 $A\,(0, 0)$, 设 $B\,(b_1, b_2)$, $C\,(c_1, c_2)$, $O\,(o_1, o_2)$, 则由 $AO = BO$ 知

$$o_1^2 + o_2^2 = (b_1 - o_1)^2 + (b_2 - o_2)^2.$$

从而

$$b_1^2 + b_2^2 = 2\,(b_1 o_1 + b_2 o_2)\,,$$

知

$$(b_1 - b_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 = 4\,(b_1 o_1 + b_2 o_2) \equiv 0 (\mathrm{mod} 4).$$

因此必有 $2 \mid b_1-b_2, 2 \mid b_1+b_2$. 同理 $2 \mid c_1-c_2, 2 \mid c_1+c_2$.

考虑以 A 为中心将 $\triangle ABC$ 逆时针旋转 $\frac{\pi}{4}$, 边长缩小 $\sqrt{2}$ 倍所得的三角形, 其与 $\triangle ABC$ 相似. 由

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{b_1-b_2}{2} & \frac{c_1-c_2}{2} \\ 0 & \frac{b_1+b_2}{2} & \frac{c_1+c_2}{2} \end{bmatrix}$$

可知该三角形三个顶点的坐标分别为 $(0,0), \left(\frac{b_1-b_2}{2}, \frac{b_1+b_2}{2}\right), \left(\frac{c_1-c_2}{2}, \frac{c_1+c_2}{2}\right)$, 均为整点. 但显然该三角形面积更小, 与假设矛盾! □

评注. 反证法是自然的, 之后得到 $b_1 \equiv b_2 (\mathrm{mod} 2), c_1 \equiv c_2 (\mathrm{mod} 2)$, 为通过旋转伸缩变换得到更小面积的三角形提供了条件. 旋转伸缩变换过程的可行性可以通过一定的试验想到.

2000.1 设 n 是正整数, 对集合 $L=\{0,1,2,\ldots,n\}^2$ 中的点红绿二染色, 使得 L 中任意单位正方形的四个顶点中恰有2个红点. 求满足上述条件的染色种数.

解. 对集合 $\{(0,0),(1,0),\ldots,(n,0)\}$ 中各点的染色情况分类.

1.如果 $(0,0),(1,0),\ldots,(n,0)$ 红绿相间, 则归纳易证每行的点都红绿相间, 且由该行最左边的格点染色唯一确定, 此时一共 2^{n+1} 种.

2.存在 $0 \leq i \leq n-1$, $(i,0)$ 与 $(i+1,0)$ 同色. 那么对任意 j, (i,j) 与 $(i+1,j)$ 同色, 且 $(i,0),(i,1),\ldots,(i,n)$ 相间地染红、绿.

类似情形1归纳可证此时每列都红绿相间且由该列最下面的格点染色唯一确定, 从而共 $2^{n+1}-2$ 种染法(这里减2是去掉了 $(0,1),\ldots,(n,0)$ 中红绿相间的两种情况).

综上, 共有 $2^{n+2}-2$ 种满足条件的染色方法. □

2000.2 设 $\triangle ABC$ 是平面上的不等边三角形, 对平面上任意异于其顶点的一点 T, 将直线 AT, BT, CT 与 $\odot(ABC)$ 的另外一个交点分别记为 A_T, B_T, C_T.

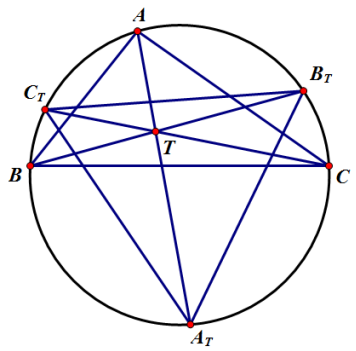
证明: 恰好存在两点 P, Q 使 $\triangle A_P B_P C_P$ 与 $\triangle A_Q B_Q C_Q$ 是等边三角形, 并证明 PQ 过 $\triangle ABC$ 外心.

证明. 假设一个点 T 满足条件, 则由 $\triangle ATB \sim \triangle B_T T A_T$ 可知

$$\frac{AB}{BT} = \frac{B_T A_T}{A_T T},$$

同理

$$\frac{AC}{CT} = \frac{C_T A_T}{A_T T}.$$



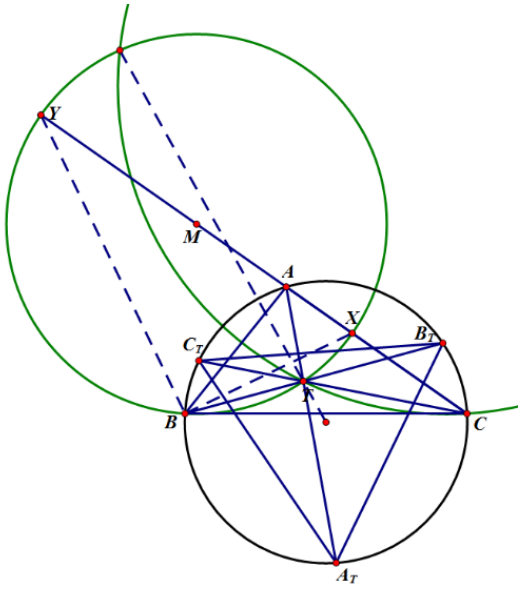
两式相除, 结合已知 $B_TA_T = C_TA_T$ 可知

$$\frac{BT}{CT} = \frac{AB}{AC}.$$

同理可得

$$\frac{CT}{AT} = \frac{BC}{BA}, \ \frac{AT}{BT} = \frac{CA}{CB}. \qquad (*)$$

由于这三式中任意两式可以推出第三式, 故三式均成立当且仅当其中两式成立. 这样我们给出了 $\triangle A_TB_TC_T$ 为等边三角形的一个必要条件(即 $(*)$). 反之不难看出这条件也是充分的.



设以 A, B 为定点, $\frac{CA}{CB}$ 为定比的Apollonius圆为 Γ_C ; 设以 A, C 为定点, $\frac{BA}{BC}$ 为定比的Apollonius圆为 Γ_B. 由 $\triangle ABC$ 不等边知 Γ_B, Γ_C 存在, 而 $(*)$ 等价于 T 为 Γ_B, Γ_C 的交点.

易知 $\triangle ABC$ 的内心在 Γ_B, Γ_C 的内部, 点 C 在 Γ_C 上却在 Γ_B 外部, 点 B 在 Γ_B 上却在 Γ_C 外部, 由此可知 Γ_B, Γ_C 必然相交于两点, 故此即题述两点 P, Q.

设 $\angle ABC$ 的内、外角平分线分别与直线 AC 相交于点 X, Y, 则由角平分线

的性质知 X,Y 在 Γ_B 上, 且线段 XY 的中点 M 是 Γ_B 的圆心. 熟知 A,C,X,Y 成调和点列, 故有

$$MB^2 = MX^2 = MA \cdot MC,$$

由此知 Γ_B 与 $\odot(ABC)$ 正交. 同理 Γ_C 与 $\odot(ABC)$ 正交.

考虑以 $\odot(ABC)$ 为基圆的反演, 由上面所述知 Γ_B,Γ_C 在该反演下自反. 因此 P,Q 两点互反, 从而 PQ 过反演中心, 也即 $\triangle ABC$ 外心. □

评注. 本题中的 P,Q 称为 $\triangle ABC$ 的等力点, 可以参考[5]进一步了解.

2000.3 给定正整数 n 和非负整数 k, 整数 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 关于模 $(n+k)$ 至少有 $2k$ 个不同的余数. 证明: 可从 $a_1,\ldots,a_n$ 中选出若干个数(至少一个), 它们的和为 $(n+k)$ 的倍数.

证明. 记 $M=n+k$, 考虑 $a_1,\ldots,a_n$ 的排列 $b_1,\ldots,b_n$,满足对每个 $i\in\{2,\ldots,k+1\}$,有$b_j\not\equiv b_i\,(\mathrm{mod}M)\,(1\le j\le i-1)$, 且

$$b_i\not\equiv b_1+\cdots+b_j\,(\mathrm{mod}M)\,,\ 2\le j\le i-1.$$

这样的排列是存在的, 因为我们可以依次取出 $b_1,b_2,\ldots,b_{k+1}$ (注意对每个 $i\le k+1,b_i$ 的限制至多使其无法取模 M 的 $2k-1$ 个剩余类), 在取出 $b_1,\ldots,b_{k+1}$ 后, 余下的 a_i 任意排为 $b_{k+2},\ldots,b_n$ 就满足要求.

现在考虑 M 个值

$$b_1,b_1+b_2,\ldots,b_1+\cdots+b_n,b_2,b_3,\ldots,b_{k+1},$$

假设命题不成立, 则这些值模 M 均非零.

于是由抽屉原理, 其中有两个值模 M 相等, 由诸 b_i 的定义知要么存在两个下标 $j>i$, 使得

$$b_1+\cdots+b_j\equiv b_1+\cdots+b_i\,(\mathrm{mod}M)\,,$$

要么存在 $i\le k+1<j$, 使得

$$b_i\equiv b_1+\cdots+b_j\,(\mathrm{mod}M)\,,$$

那么 $M\mid b_{i+1}+\cdots+b_j$ 或 $M\mid b_1+\cdots+b_{i-1}+b_{i+1}+\cdots+b_j$,总与假设矛盾, 证毕. □

评注. 在 $k=1$ 时这是一个经典的问题.回顾其处理方法, 我们发现它在前面若干项中要求较高, 这样就能保证构造抽屉之后同余的项下标不会太小,

$b_1, \ldots, b_k$ 的选择即基于此.

事实上, 题中的 $2k$ 可以用类似的办法改进为 $k+1$.

1999.1 对任意正整数 m, 用 $d_i(m)$ 表示 m 的模2余 i 的正约数个数 $(i = 0, 1)$. 证明: 对每个正整数 n, 有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\left(d_0(k)-d_1(k)\right)\right| \leq n.$$

证明. 我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{1\leq k\leq n}\left(d_0(k)-d_1(k)\right)\\
=&\sum_{1\leq k\leq n}\sum_{d|k}(-1)^d\\
=&\sum_{1\leq d\leq n}\sum_{\substack{1\leq k\leq n\\ d|k}}(-1)^d\\
=&\sum_{1\leq d\leq n}(-1)^d\left[\frac{n}{d}\right]\\
=&-\left(\left[\frac{n}{1}\right]-\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]-\cdots\right),
\end{aligned}$$

注意最后一行实际上是一个有限和. 又因为

$$\left[\frac{n}{1}\right]-\left(\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n}{3}\right]\right)-\left(\left[\frac{n}{4}\right]-\left[\frac{n}{5}\right]\right)-\cdots\leq n-\sum 0=n,$$
$$\left(\left[\frac{n}{1}\right]-\left[\frac{n}{2}\right]\right)+\left(\left[\frac{n}{3}\right]-\left[\frac{n}{4}\right]\right)+\cdots\geq\sum 0=0,$$

故 $\left|\sum_{1\leq k\leq n}\left(d_0(k)-d_1(k)\right)\right| \leq n$ 成立. □

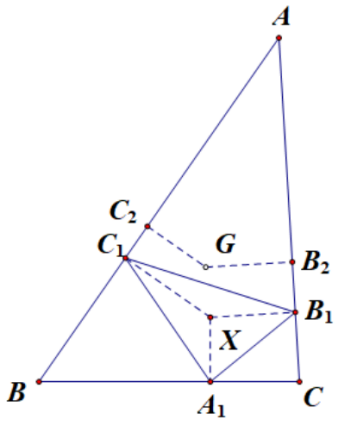
评注. 若用 $d(m)$ 表示正整数 m 的正约数个数, 则我们熟知有以下优美结果:

$$\sum_{k=1}^{n} d(k)=\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\cdots.$$

其证明是将 $d(k)$ 写成 $\sum_{d|k} 1$ 并交换和号. 注意到本题形式与上述结论如出一辙, 因此我们可以类似地通过重写和式来证明本题.

1999.2 给定平面上一个三角形, 试构造三角形内一点 P,使得由 P 在三角形三边上投影构成的三角形的重心恰为 P.

解. 设 $\triangle ABC$ 的重心为 G, 而 G 对 $\triangle ABC$ 的等角共轭点为 X. 下证此 X 即为满足条件的点 P.



如图, 设 X 到三边的投影分别为 A_1, B_1, C_1, 而 G 到三边的投影分别为 A_2, B_2, C_2. 用 $[UVW]$ 表示三角形 UVW 的面积, 注意到

$$\begin{aligned}\frac{[A_1XC_1]}{[A_1XB_1]} &= \frac{C_1X}{B_1X}\cdot\frac{\sin\angle C_1XA_1}{\sin\angle B_1XA_1}\\ &= \frac{\sin\angle BAX}{\sin\angle CAX}\cdot\frac{\sin B}{\sin C}\\ &= \frac{\sin\angle CAG}{\sin\angle BAG}\cdot\frac{AC}{AB}\\ &= \frac{[CAG]}{[BAG]} = 1,\end{aligned}$$

故 A_1X 平分 B_1C_1, 同理 B_1X 平分 A_1C_1, 故 X 是 $\triangle A_1B_1C_1$ 的重心. □

1999.3 设 k 是非负整数, S 是由多于 2^k 个整数构成的集合. 证明: 存在 S 的 $k+2$ 元子集 T, 使得对任意正整数 $m\,(1\le m\le k+2)$, T 中各个 m 元子集的元素和两两不同.

证明. 对 k 归纳, $k=1$ 时结论平凡, 假设结论对 k 成立, 考虑 $k+1$ 的情形.

注意若 S 满足需求, 则 S 的伸缩平移所得集合仍然满足要求(因为只要求 S 的相同元素个数的子集元素和不同), 于是可不妨设 S 的所有元素均为正整数. 进一步可不妨设这些数中既有奇数也有偶数. 这是因为若不然, 则可将它们同时加上0或1使得它们全变为偶数, 然后同时除以2.

注意到

$$\frac{x}{2} < \frac{x+1}{2} \le x,$$

且等号在 x 为 S 的最大元时不成立, 故这过程有限步内必终止, 得到的数中有奇数也有偶数.

如果 S 中有多于 2^k 个偶数, 对它们由归纳假设得到满足条件的 T, 则 T 中元素均为偶数. 在 T 中任意加入一个 S 中的奇数 a (由前面所述知 a 存在), 得

到集合 T'. 此时若有 m 及

$$x_1 < \cdots < x_m \in T',\ y_1 < \cdots < y_m \in T'$$

使得 $x_1 + \cdots + x_m = y_1 + \cdots + y_m$, 考虑该等式取值的奇偶性可知, 要么等号两边各项均属于 T ; 要么两边均有 a, 且去掉 a 后剩余项均属于 T. 由归纳假设知两边属于 T 的项相同, 故 $x_i = y_i, i = 1, 2, \ldots, m$. 于是 T' 是满足条件的子集.

类似地, 如果 S 中有多于 2^k 个奇数, 对归纳所得的集合加入任意一个 S 中的偶数即可. 由于多于 2^{k+1} 个整数中, 奇数或偶数必有一种多于 2^k 个, 由上述讨论可知 $k+1$ 时的结论成立. 证毕. □

评注. 利用奇偶性来说明子集元素和两两不同进行化归, 这里的手法是经典的. 用类似手法可以解决下面两个问题:

1.已知 $2n+1$ 个整数满足:任意去掉其中一个数, 剩下的 $2n$ 个数都可分为两组, 每组 n 个数,且两组数之和相等.证明: 这 $2n+1$ 个整数全相等.

2.证明:对任意若干个两两不同的正整数, 总是可以将它们按照某种次序排为一列, 使得不存在从左至右的(不一定连续)三项成等差数列.

此外, 注意对数组变换的前提是变换之后不影响结论.

1998.1 是否存在无穷正整数数列满足其任两项之间不互素, 无倍数关系, 且不存在大于1的整数整除这数列的每一项?

解. 存在这样的数列. 我们考虑数列

$$a_1 = 2 \times 3,\ a_2 = 2 \times 5,\ a_n = 3 \times 5 \times (2^{2^n} + 1)\ (n \geq 3).$$

由于 $\gcd(a_1, a_2, a_3) = \gcd(6, 10, 15 \times (2^8 + 1)) = 1$, 故没有大于1的整数整除数列中每一项.

对 $n > m > 2$, 显然 $\gcd(a_m, a_n) \neq 1$,且由于

$$2^{2^n} + 1 = \left(2^{2^m}\right)^{2^{n-m}} + 1 \equiv 2 \not\equiv 0 (\mathrm{mod} 2^{2^m} + 1),$$

故 a_m, a_n 无倍数关系.

对 $m \in \{1, 2\}, n > 2$, a_m, a_n 有公因子3或5. 又因为 $2 \nmid a_n, 2 \mid a_m, a_n > a_m$, 故它们之间无倍数关系.

又显然 a_1, a_2 不互素也无倍数关系, 故此数列满足条件. □

评注. 我们实际上是逐步地添加限制以满足三个条件, 每个条件都容易满足. 另外将解答中费马数 $2^{2^n} + 1$ 换为合适形式的素数, 亦可得到满足题设的构

造.

1998.2 证明: 对任意正整数 n, 存在一个整系数多项式在点 $1,2,\ldots,n$ 处的值为两两不同的2的幂.

证明. 设 $n!$ 的素因数分解中2的幂次为 α, 则 $k=\frac{n!}{2^\alpha}$ 是奇数.

设 φ是欧拉函数, 考虑多项式

$$\begin{aligned}P(x)&=2^\alpha\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{x}{j}\left(2^{\varphi(k)}-1\right)^j\right)\\&=\sum_{j=0}^{n}\left(n!\binom{x}{j}\cdot\frac{2^\alpha}{n!}\left(2^{\varphi(k)}-1\right)^j\right),\end{aligned}$$

注意到当 $j=0$ 时, $2^\alpha\binom{x}{j}\left(2^{\varphi(k)}-1\right)^j=2^\alpha$; 当 $j\geq 1$ 时, 由欧拉定理知 $k\mid 2^{\varphi(k)}-1$, 故

$$n!=2^\alpha k\left|2^\alpha\left(2^{\varphi(k)}-1\right)^j\right.$$

因此 $P(x)$ 是 $n!\binom{x}{j}$ $(0\leq j\leq n)$ 的整系数线性组合, 从而是整系数多项式.

同时, 对 $1\leq i\leq n$, 有

$$\begin{aligned}P(i)&=2^\alpha\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{i}{j}\left(2^{\varphi(k)}-1\right)^j\right)\\&=2^\alpha\left(\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\left(2^{\varphi(k)}-1\right)^j\right)\\&=2^{\alpha+i\varphi(k)},\end{aligned}$$

所以 $P(i)$ 是2的方幂, 证毕. □

评注. 恒等式 $\sum_{j=0}^{n}\binom{i}{j}=2^i(i=1,2,\ldots,n)$ 可为本题提供思路, 但左边并不总是关于 i 的整系数多项式, 因此需仿照该形式进行构造的调整.本题也可用Lagrange插值的方法解, 难度中等.

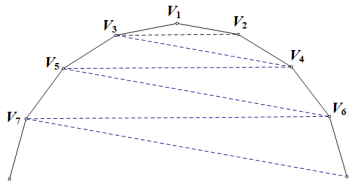
1998.3 对哪些整数 $N(N\geq 3)$ 可以找到平面上 N 个点, 使得其中任3个点不共线, 并且任意一个由其凸包上3个点构成的三角形中恰有一个给定点?

解. 所求的 N 为全体不小于4的偶数, 亦即所有形如 $N=2n-2(n\geq 3)$ 的整数.

一方面, 设所有 N 个点的凸包是一个凸 n 边形 $G,n\geq 3$. 熟知 G 可由对角线划分为 $n-2$ 个三角形, 由已知, 每个这样的三角形内恰含有一个给定点, 故 $N=n+n-2=2n-2$.

另一方面, 下证对每个 $n \geq 3$, 均存在满足条件的 $N = 2n - 2$ 个点.

考虑一个正 n 边形 G, 如图给 G 的顶点标号.



这样 G 被划分成 $n-2$ 个三角形 $T_i = \triangle v_{i-1}v_iv_{i+1}\,(2 \leq i \leq n-1)$. 对每个 i, 在 T_i 内部距离 v_i 充分近之处取点 u_i, 得 $u_2, \ldots, u_{n-1}$. 下面证明 $2n-2$ 个点 $v_1, \ldots, v_n$, $u_2, \ldots, u_{n-1}$ 满足要求.

事实上, 这 $2n-2$ 个点的凸包显然是 G, 对任一个三角形 $\triangle v_av_bv_c\,(a < b < c)$, 由 u_i 的取法知只可能 u_a, u_b, u_c 在这三角形中, 但 u_a 必不在 $\triangle v_av_bv_c$ 中, 否则 $a \geq 2$, 则点 u_a 与 $\triangle v_av_bv_c$ (的内部)在直线 v_av_{a+1} 两侧, 矛盾! 同理 u_c 不在 $\triangle v_av_bv_c$ 中, 结论得证. □

评注. 做本题时要意识到 N 其实可以相当一般, 要做的事情只是构造. 构造的想法是将内部点与边界顶点对应, 并且将内部点取得特殊使得易于判定每个内部点在哪些三角形中.

1997.1 设 $p > 2$ 为素数, L 为坐标平面上横纵坐标均为小于 p 的非负整数的点组成的集合. 证明: 存在 L 中 p 个点, 其中任意三点不共线.

证明. 考虑点 $(x, y) \in L$, 其中 $0 \leq x \leq p-1$, $y \equiv x^2 \,(\mathrm{mod} p)$. 我们证明这样取出的 p 个点满足要求.

若有其中三点 $(x_i, y_i)\,(1 \leq i \leq 3)$ 共线, 则

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}.$$

模 p 得

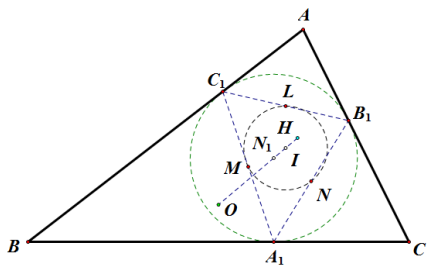
$$\frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} \equiv \frac{x_2^2 - x_2^2}{x_2 - x_3} \,(\mathrm{mod} p)\,,$$

即 $x_1 + x_2 \equiv x_2 + x_3 \,(\mathrm{mod} p) \Rightarrow x_1 \equiv x_3 \,(\mathrm{mod} p) \Rightarrow x_1 = x_3$,进而 $y_1 = y_3$, 矛盾.

因此所取出的任三点不共线, 满足要求. □

评注. $\mathbb{F}_p$ 是域, 因此可以将其类比为平面考虑. 平面中抛物线上任意三点不共线, 这是本题构造的来源.

1997.2 设 $\triangle ABC$ 外心为 O, 内心为 I, 内切圆的切点三角形为 $\triangle A_1B_1C_1$. 又设H 是 $\triangle A_1B_1C_1$ 的垂心, 证明: O, I, H 共线.



证明. 设线段 B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 的中点分别为 L, M, N, 又设 N_1 为 $\triangle LMN$ 的外心, 则 N_1 是 $\triangle A_1B_1C_1$ 的九点圆圆心, 故 I, H, N_1 共线(即 $\triangle A_1B_1C_1$ 的欧拉线).

考虑以内切圆 $\odot I$ 为基圆的反演, 则 A, L 互反, B, M 互反, C, N 互反, 故 $\odot(ABC)$ 与 $\odot(LMN)$ 互反.

从而这两圆的圆心连线 ON_1 通过反演中心 I. 故 O, I, N_1, H 共线, 结论得证. □

评注. 本题的关键是注意到 IH 是 $\triangle A_1B_1C_1$ 的Euler线, 并考虑反演. 本题是经典题.

1997.3 设简单图 G 是一个平面图, 证明: 可以将 G 的顶点染为3种颜色, 使得其中不存在顶点同色的圈.

证明. 设 V, E, F 分别为 G 的顶点, 边, 面的集合, 对顶点数 $|V|$ 来归纳证明存在这样的染色方法. $|V| = 1$ 时平凡, 假设 $|V| - 1$ 时成立, 考虑 $|V|$ 时的情形.

首先证明存在一点 x, $\deg x \leq 5$. $(*)$

考虑集合

$$S = \left\{(f, e) \,\middle|\, f, e \text{ 分别为 } G \text{ 的面和边}, e \text{ 是 } f \text{ 的边}\right\},$$

分别由面、边这两个角度对 $|S|$ 计数有

$$2\,|E| = |S| \geq 3\,|F|,$$

而由Euler公式知

$$|F| = |E| - |V| + 2,$$

故

$$2|E| \geq 6 + 3|E| - 3|V|,$$

由此知$3|V| > |E|$, 因此有一点 x_0 的度数

$$\deg x_0 \leq \frac{\sum_{x\in V} \deg x}{|V|} = \frac{2|E|}{|V|} < 6,$$

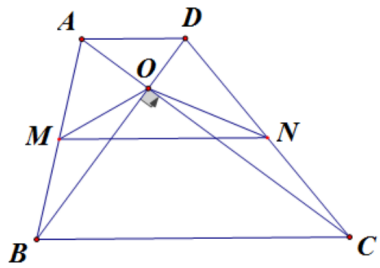
从而 $(*)$ 成立.

现在对 G 的满足 $(*)$ 的一顶点 x, 考虑从 G 中删去 x (及其相邻的边)得到图 G'. 显然 G' 也是平面图, 顶点数为 $|V|-1$, 因此由归纳假设可对 G' 的顶点进行染色, 使得其中不存在单色圈. 对 G 染色时, 除 x 以外顶点的染色可完全按 G' 的染色进行.

现考虑 x 的染色. 由 $\deg x \leq 5$ 可知 x 的某一色 c 的邻居数至多只有一个, 给 x 染上 c, 易验证得到的染色符合要求. 综上所述, 归纳证毕. □

评注. 我们常常归纳地(删去顶点)以得到图的染色, 这种办法可以得到图的色数不大于顶点的最大度数加1等经典结果. 如果要求不存在同色圈, 稍加思考知也可利用这种办法. 由题中的数据推断出 $(*)$ 可能成立, 而关于平面图我们有Euler公式等技术支持, 这使得 $(*)$ 的证明并不难.

1996.1 证明: 在一个对角线相互垂直的梯形中, 两腰长度之积不小于两底边长度之积.



证明. 设该梯形为 $ABCD$, $AD \parallel BC$, 对角线交点为 O. 设边 AB 和 CD 的中点分别为 M 和 N, 则

$$AB^2 + CD^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = AD^2 + BC^2. \tag{1}$$

又由于

$$\begin{aligned} AB + CD &= 2(OM + ON) \\ &\geq 2MN \\ &= AD + BC, \end{aligned} \tag{2}$$

故将 (2) 两边平方减去 (1) 得 $AB \cdot CD \geq AD \cdot BC$, 此即要证的结论. □

1996.2 A, B 两国召开会议, 两国各邀请了相同数目的与会者, 其中一些在此之前已认识. 证明: 存在 A 国与会者的非空子集 C 使下列叙述之一成立:

(1) B 国每个与会者认识 C 中偶数个人;

(2) B 国每个与会者认识 C 中奇数个人.

证明. 设 A, B 两国与会者人数均为 n. 对任意 $C \subseteq A$, 设 $f(C) = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, 其中 c_i 为 B 中第 i 位与会者在 C 中认识的人数模2的余数.

则 f 是 A 的非空子集族到 $\{0,1\}^n$ 的函数, 假定不存在 C 使 $f(C) = \overrightarrow{0}$ 或 $(1, 1, \ldots, 1)$, 则 f 的值域有不超过 $2^n - 2$ 个元素. 因为 f 的定义域有 $2^n - 1$ 个元素, 故由抽屉原理知存在 $C_1, C_2 \subseteq A, C_1 \neq C_2$ 使 $f(C_1) = f(C_2)$.

取 $C = C_1 \Delta C_2 \neq \emptyset$, 即 C 是恰属于 C_1, C_2 之一的全体与会者的集合, 则有

$$f(C) = f(C_1 \Delta C_2) \equiv f(C_1) + f(C_2) \equiv \overrightarrow{0} \pmod{2},$$

即 $f(C) = \overrightarrow{0}$,与假设矛盾, 原命题得证. □

评注. 将认识关系用向量表示出来, 实现了某种代数化,更加直观和易于理解. 反证法结合抽屉原理进行构造的思路也是经典的.

1996.3 设 n, k 是任意非负整数, 假设已在一个凸 n 边形内作出 $2kn + 1$ 条不同对角线, 证明: 可从中取出 $2k + 1$ 条对角线, 它们形成一条经过每个点至多一次的折线. 并说明只作出 kn 条对角线时结论不一定成立.

解. 先证明稍强的结论: 作出 $2kn + 1$ 条不同对角线时可以从中取出 $2k + 1$ 条形成不封闭, 且经过每个点至多一次的折线, 称这样的折线为"好的".

对 k 归纳, $k = 0$ 时结论显然成立. 假设在 $k - 1 (k > 0)$ 时结论成立, 考虑 k 时的情形. 对每个连有对角线的顶点, 选取其连出的两条对角线使它们的夹角最大, 并将这两条对角线染红(如果该顶点仅连出一条对角线, 则将这一条对角线染红.允许将对角线重复染红). 于是一共至多染红了 $2n$ 条对角线, 剩余至少有

$$2kn + 1 - 2n = 2(k - 1)n + 1$$

条对角线未被染红.

由归纳假设, 存在 $2k - 1$ 条未被染红的对角线形成好的折线 $A_1 A_2 \ldots A_{2k}$. 由于该折线经过每个点至多一次, 且 $A_1 A_2$ 为凸多边形的对角线, 故该折线落

在 A_1A_2 的一侧.

于是由染色方式可知存在一条以 A_1 为端点染红的对角线 A_0A_1, 其与折线分处 A_1A_2 两侧. 类似地, 存在对角线 $A_{2k}A_{2k+1}$, 其与折线分处 $A_{2k-1}A_{2k}$ 两侧.

因为 $A_1A_2\ldots A_{2k}$ 不封闭, 故 $A_1\neq A_{2k}$, 从而易知 A_0A_1 和 $A_{2k}A_{2k+1}$ 无公共点(内点或端点). 因此 $A_0A_1A_2\ldots A_{2k}A_{2k+1}$ 是由 $2k+1$ 条对角线组成的好的折线. 归纳得证.

再证明只作出 kn 条对角线时结论不一定成立.

不妨设凸多边形为正 n 边形. 称一条对角线长度为 l, 如果其将凸多边形分成两部分, 边数较少的那一部分恰好有凸多边形的 l 条边.

当 n 为奇数时, 对每个顶点, 作出以其为端点且长度最大的 $2k$ 条对角线; 当 n 为偶数时, 对每个顶点, 作出以其为端点除了直径之外长度最大的 $2k$ 条对角线. 这样一共作出 kn 条对角线, 若选取其中某些组成不自交的的折线 $A_0A_1\ldots A_t$, 只要证明 $t\leq 2k$.

若 n 为奇数, 设 $n=2m+1$. 由于折线落在 A_0A_1 的一侧, 也落在 $A_{t-1}A_t$ 的一侧, 这两条对角线不相交, 因此折线落在这两条对角线之间的凸多边形区域内(含边界). 后者至多有

$$n-2(m-k)=2k+1$$

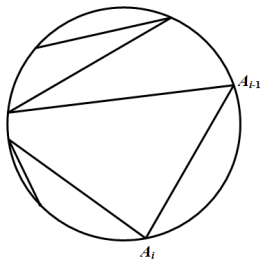
个顶点, 因此 $t\leq 2k$.

若 n 为偶数, 设 $n=2m$. 因为 $kn\leq\binom{n}{2}-n$, 故 $k\leq\left[\frac{n-3}{2}\right]=m-2$. 易知仅有如下两种情形.

1. 存在 $i\neq 1,t$ 使得折线在对角线 $A_{i-1}A_i$ 的一侧, 则类似上述分析知

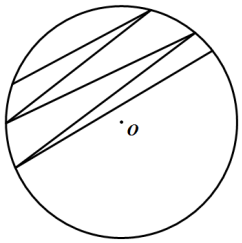
$$t\leq n-3(m-1-k)-1=2k+2-(m-k)\leq 2k,$$

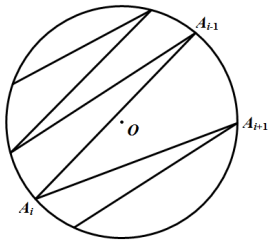
结论成立.



2. 折线 $A_0A_1\ldots A_t$ 如图呈“之”字形.

若正多边形的中心 O 在 $A_0A_1, A_{t-1}A_t$ 之间的凸多边形区域外, 则该区域至





多有

$$m-(m-1-k)=k+1$$

个顶点, 故 $t \le k \le 2k$.

若 O 在 $A_0A_1, A_{t-1}A_t$ 之间的凸多边形区域内部或边界上, 因选取的对角线均不是直径, 故存在 $1 \le i \le t-1$ 使得 O 在 $\triangle A_{i-1}A_iA_{i+1}$ 内部. 从而 A_i 的对径点不是折线的顶点, 类似地有,

$$t \le n-2(m-1-k)-1-1=2k,$$

结论得证. □

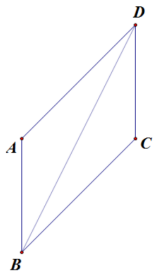
评注. 将命题加强为不封闭的折线以进行归纳过渡, 折线不自交这一条件本身为研究其形状提供了好的条件. 反例的构造则相对自然, 但要说明其可行需要细致的讨论分析, 有一定难度.

1995.1 给定平面格点网络上的一个格点矩形, 其边平行于方格边, 将该矩形划分为若干个面积为 $\frac{1}{2}$ 的格点三角形.

证明: 其中直角三角形的个数至少是矩形短边长度的两倍.

证明. 先证明一个引理.

引理.如果格点三角形 $\triangle ABD, \triangle CBD$ 的面积均为 $\frac{1}{2}$, A, C 在 BD 两侧,且 BD 在这两个三角形中均为最长边, 则 $ABCD$ 是平行四边形, 且 $AC \le BD$. 等号成立当且仅当 $ABCD$ 是一个正方形.



事实上, 由Pick定理知凸四边形 $ABCD$ 内部和边界上没有异于顶点的格

点. 设 C 关于 BC 中点的对称点为 C, 若 $C' \neq A$, 则 C' 为格点, 且 $AC' \parallel BD$. 由 BD 最长知 A, C' 在 BD 上的投影在线段 BD 内部, 故存在线段 BD 内一点 T, 使 B, T, C', A 构成平行四边形的四个顶点. 于是 T 为格点, 与边 BD 内部无格点矛盾. 因此 $C' = A$, 即 $ABCD$ 是平行四边形.

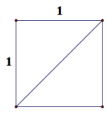
另一方面, 假设 $AC \geq BD$, 则由 $ABCD$ 是平行四边形可知 $\angle BAD \leq 90°$. 由于 BD 是 $\triangle ABD$ 的最长边, 故 $\angle BAD \geq 60°$. 因此若 AB, AD 不全为 1, 则它们之一至少为 $\sqrt{2}$, 导致

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin \angle BAD \geq \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{2},$$

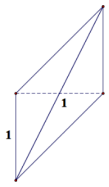
矛盾. 因此必有 $AB = AD = 1$, 易知这时 $ABCD$ 是正方形, 等号成立. 引理得证.

结合引理可以看出, 如果分划中两个三角形满足引理的条件, 将它们的公共边更换为所成平行四边形的另外一条对角线, 则在除了1,2两种例外下, 都得到同样多直角三角形的划分, 且三角形周长和减小.

例外1:



例外2:



其中标记了长度1的边相互垂直.

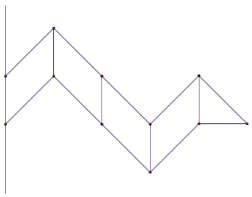
于是, 每次选取当前划分中不属于例外 1, 2 所示的对角线, 且不在原长方形边界上的最长线段(如果存在). 考虑以其为公共边的两个三角形, 由其最长可知能够对其按上述方法更改分划方式. 直角三角形个数不增, 所有三角形的周长和减小.

因周长和显然取值有限, 因此有限步后停止, 划分中只剩例外2以及直角三角形.

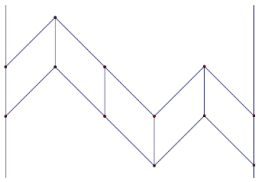
对长方形边界上每一条长为1的格线, 有一个直角三角形或例外2中的平行四边形以其为一边. 若为后者, 则以该格线在平行四边形中的对边代替该格线

讨论. 以此类推最终得到一系列的例外2中的平行四边形, 直到在一个直角三角形处停止(情形1), 或抵达另一边(情形2).

情形1:



情形2:



若长方形短边上的所有格线均为情形1, 显然不同短边上格线对应的直角三角形互异, 结论成立.

若存在短边上一条格线为情形2, 考虑长方形长边上的格线, 它们必均为情形1 (因被情形2中平行四边形链所阻挡), 同上结论成立.

□

评注. 只出现例外1,2所述的结构时是理想的分割.这时结合题目要求, 想从每条在原长方形边界上的单位线段找到与之对应的直角三角形. 对于一般的情况, 通过改变划分方式发现可化归到前述情形.本题有一定难度.

1995.2 考虑一个实系数 n 元多项式, 已知在所有变量取 ± 1 时, 多项式的值在 -1 的个数为偶数时是正的, 在 -1 的个数为奇数时是负的.

证明: 该多项式的次数至少是 n (n 元多项式的次数是指合并同类项之后, 各单项式变量指数之和的最大值).

证明. 对 n 归纳, $n=1$ 平凡, 设 $n-1$ 时成立, 考虑 n 的情形: 设 $x_1,\ldots,x_n$ 的多项式 f 在 $x_1,\ldots,x_n$ 取 ± 1 时, f 的值在 -1 的个数为偶数时是正的, 在 -1 个数为奇数时是负的, 来证明 $\deg f \geq n$.

不难看出 f 可以表示为 $f = x_n f_1 + f_2$, 其中 f_1, f_2 是 $x_1,\ldots,x_n$ 的多项式, 满足其每个单项式中 x_n 的次数为偶数, 用 m 表示 $x_1,\ldots,x_{n-1} \in \{-1,1\}$ 时 -1 的个数.

当 m 为偶数, 由 $f_i(x_1,\ldots,x_{n-1},1) = f_i(x_1,\ldots,x_{n-1},-1)$, 可将这值记作 $g_i, i=1,2$. 于是由条件

$$1\cdot g_1+g_2>0,$$

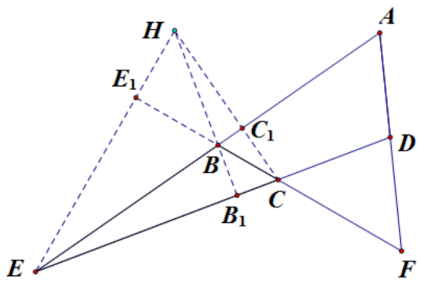
$$(-1)\cdot g_1+g_2<0,$$

知 $g_1>0$, 类似可知当 m 为奇数有 $g_1<0$, 于是由归纳假设多项式 $f_1(x_1,\ldots,x_{n-1},1)$ 至少有 $n-1$ 次, 这导出 $f=x_nf_1+f_2$ 至少有 n 次, 归纳证毕. □

评注. 多元多项式的不少结论都是归纳证明的, 这样可以每次只处理一元情况.在这里我们利用条件能够自然过渡.

1995.3 四点 A,B,C,D 中任3点不共线, $E=AB\cap CD, F=BC\cap DA$. 用 k_1,k_2,k_3 分别表示以线段 AC,BD,EF 为直径的圆.

证明: k_1,k_2,k_3 三圆共点或者两两无公共点.



证明. 我们只用证明 k_1,k_2,k_3 是共轴圆.

首先注意到由牛顿线定理, k_1,k_2,k_3 圆心(即 AC,BD,EF 的中点)共线, 故若 k_1,k_2,k_3 不共轴, 则它们两两的三条根轴互相平行, k_1,k_2,k_3 的根心(即到这三圆等幂的点)不存在.

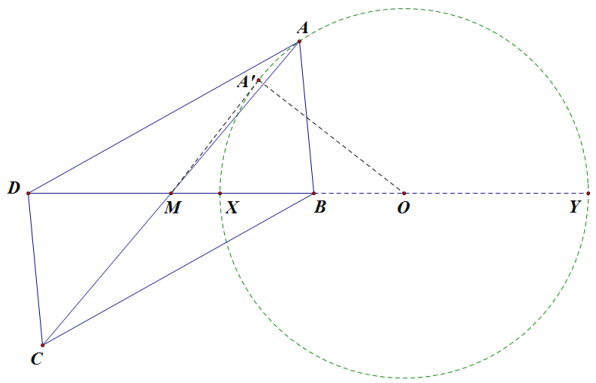
另一方面, 考虑 $\triangle BEC$ 的垂心 H, H 到这三角形三边对应的投影分别是 B_1,E_1,C_1. 熟知

$$\overline{HB_1}\cdot\overline{HB}=\overline{HE_1}\cdot\overline{HE}=\overline{HC_1}\cdot\overline{HC},$$

这表明 H 是 k_1,k_2,k_3 的根心, 矛盾, 证毕. □

评注. 我们知道 $\triangle AED,\triangle EBC,\triangle ABF,\triangle CDF$ 的垂心共线, 即题述三圆的根轴.这个结构偶尔会用到.

1994.1 给定实数 $\lambda>1$, 已知一个平行四边形的相邻边长度之比为 λ, 求其对角线夹角的最大值.



解. 不妨设在平行四边形 $ABCD$ 中, $AB=1, AD=\lambda>1, BC$ 中点为 M, 我们求 $\angle BMA$ 最大值.

注意到 $\frac{AD}{AB}=\lambda>1$, 从而 A 在以 B,D 为定点, $\frac{AD}{AB}=\lambda$的Apollonius圆上, 且若设该圆圆心为 O, 则 O 在 DB 延长线上.

设圆 O 与直线 DB 交于点 X,Y, 其中 X 在 DB 内部. 设 $BD=a$, 则

$$BX=\frac{a}{\lambda+1},\ BY=\frac{a}{\lambda-1},$$

从而圆 O 半径

$$R=\frac{1}{2}XY=\frac{1}{2}(BX+BY)=\frac{\lambda a}{\lambda^2-1},$$

故

$$OM=OX+XM=\frac{\lambda a}{\lambda^2-1}+\frac{a}{2}-\frac{a}{\lambda+1}=\frac{\lambda^2+1}{2(\lambda^2-1)}a.$$

显然在 AM 与圆O相切时, $\angle BMA$ 最大, 此时 $\sin\angle BMA=\frac{R}{OM}=\frac{2\lambda}{\lambda^2+1}$, 即 $\angle BMA=\arcsin\frac{2\lambda}{\lambda^2+1}=2\arctan\frac{1}{\lambda}$, 从而两对角线夹角的最大值为 $2\arctan\frac{1}{\lambda}$. □

评注. 将 A 视为动点, A 的轨迹是圆, 从而夹角最大即相切的情形. 这样利用 Apollonius 圆进行处理规避了过多的三角计算.

1994.2 证明: 若擦去正 n 边形中的 $n-3$ 条对角线, 仍然存在剩下的对角线中的 $n-3$ 条两两内部不交, 但可以擦去其中 $n-2$ 条对角线使上述结论不成立.

解. 对 n 归纳证明, 删去不超过 $n-3$ 条对角线时可找到余下对角线中的 $n-3$ 条两两内部不交.

$n=3$ 时命题平凡, 设 $n\geq 4$, 且命题对 $n-1$ 成立.

考虑 n 边形 $A_1\cdots A_n$, 称形如 A_iA_{i+2} 的对角线为"小的", 并将 A_{i+1} 与之对

应. 小的对角线显然共 n 条, 故其中必有未被删去的, 进一步, 我们说明存在 i 使得 A_iA_{i+2} 未被删去且 A_{i+1} 是某条被删去的对角线的一个端点.

若不存在这样的 i,任取 j 使得 A_jA_{j+2} 未被删去, 于是 A_{j+1} 相连的对角线均未删去. 特别地, $A_{j+1}A_{j+3}$ 未被删去, 于是与 A_{j+2} 相连的对角线均未删去, $\ldots$, 如是推理可知无对角线被删去, 矛盾.

不妨设 A_2A_n 未被删去且 A_1A_x 被删去, 故在 $A_1\cdots A_n$ 被删去的 $n-3$ 条对角线中, 落在凸多边形 $A_2\cdots A_n$ 中的至多有 $n-4$ 条, 对 $A_2\cdots A_n$ 用归纳假设, 从余下的对角线中取出 $n-4$ 条不交的, 再添上 A_2A_n, 即得 $A_1\cdots A_n$ 的 $n-3$ 条两两不交的未删去的对角线.

下面给出 $n-2$ 的构造, 首先对 k 归纳容易证明下述引理.

引理. 对任意整数 $k\geq 3$ 及一个 k 边形, 至多可在这个 k 边形中取出 $k-3$ 个不交的对角线.

现在删除与 A_2 相连的所有对角线, 再删去 A_1A_3,共 $n-2$ 条对角线.于是未被删去的对角线均是 $n-1$ 边形 $A_1A_3A_4\cdots A_n$ 的对角线.由引理, 从这些对角线中, 至多选出 $(n-1)-3=n-4$ 个两两不相交, 即证. □

1994.3 给定集合 $A_1,\ldots,A_n$, 其中 A_k 是实轴上 k 个不交区间的并($k=1,2,\ldots,n$).

证明: 从这些区间中, 可以选取 $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ 个使它们在两两不同的 A_k 中, 并且这些区间两两不交.

证明. 先证明一个引理.

引理. 设 $L_1,\ldots,L_m$ 满足各 L_i 均为至少 m (但有限)个两两不交区间之并, 则可从每个 L_i 中选出一个区间 I_i, 使 $I_i\,(1\leq i\leq m)$ 两两不交.

对 m 归纳证明引理, $m=1$ 时显然, 假设 $m\geq 2$ 且命题对 $m-1$ 成立.

考虑每个 L_i 中各区间右端点的最小者 a_i, 不妨设 $a_m=\min\limits_{1\leq i\leq m}a_i$, 且 a_m 是 L_m 中区间 I_m 的右端点. 现在从 $L_i\,(1\leq i\leq m-1)$ 中把上面取出 a_i 的区间去掉得到 $L_i{}'$, 则 $L_i{}'$ 中各至少 $m-1$ 个区间, 满足 $m-1$ 时的条件, 由归纳假设, 存在 $L_i{}'$ 的区间 $J_i(1\leq i\leq m-1)$, 使 $J_1,J_2,\ldots,J_{m-1}$ 两两不交. 由 I_m 的定义, 对 $1\leq i\leq m-1$, J_i 的左端点大于 $a_i\geq a_m$. 因此 $J_i\cap I_m=\emptyset$, 故 $J_1,\ldots,J_{m-1},I_m$ 即为要找的 m 个两两不交的区间, 引理证毕.

回到原题. 取 $m=\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil$(即不小于 $\frac{n+1}{2}$ 的最小整数), 对 $A_n,A_{n-1},\ldots,A_{\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil}$ 应用引理即证原题. □

评注. 容易看到如果归纳地选右端最小者似乎能奏效, 但是区间少的集合对此又有阻碍, 所以去掉这些集合再考虑引理即可. 原题的叙述稍微掩盖了这一本质.

1993.1 给定正整数 a,b, 证明: 至多有有限个整数 n, 使得 an^2+b 与 $a(n+1)^2+b$ 均为平方数.

证明. 记 $t=an\,(n+1)+b>0$, 则

$$t^2=a^2n^2(n+1)^2+ab\left(2n^2+2n\right)+b^2.$$

而

$$\left(an^2+b\right)\left(a(n+1)^2+b\right)=a^2n^2(n+1)^2+ab\left((n+1)^2+n^2\right)+b^2=t^2+ab,$$

因此当 $|n|$充分大, 使得 $ab<2t+1$ 时, 有

$$t^2<\left(an^2+b\right)\cdot\left(a(n+1)^2+b\right)<(t+1)^2,$$

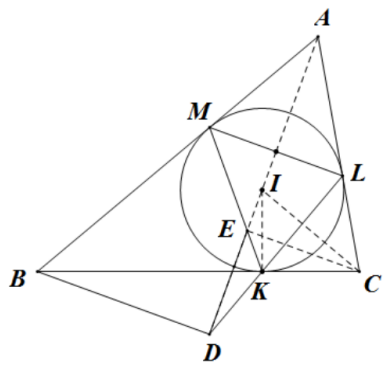
故 (an^2+b) 与 $\left(a(n+1)^2+b\right)$ 之积不是完全平方数, 从而它们之一不是完全平方数, 结论即证. □

评注. 令 $p(x)=ax^2+b$, 由条件我们考虑 $p(x)p(x+1)$, 此时它是一个最高项系数为完全平方数的偶数次多项式.因此我们希望用一个多项式的平方来拟合它, 以便于利用完全平方数的性质.

一般地, 可以证明:对整系数多项式 $Q(x)$,存在无穷多个整数 n 使得 $Q(n),Q(n+1)$ 均为平方数当且仅当 $Q(x)$ 是一个整系数多项式的平方.

1993.2 设 $\triangle ABC$ 为不等边三角形, 其内切圆分别切边 BC,CA,AB 于点 K,L,M.过 B 作 LM 的平行线与 KL 交于 D, 过 C 作 LM 的平行线交 KM 于 E.

证明: DE 过线段 LM 中点.



证明. 设 I 是 $\triangle ABC$ 的内心, 注意到

$$\angle KEC = \angle KML = \angle KIC,$$

故 E, I, C, K 共圆.

于是

$$\angle EIC = \angle MKB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle B = 180^\circ - \angle AIC,$$

因此 A, I, E 共线, 同理 A, I, D 共线.

故 DE 即为 $\angle BAC$ 的平分线, 原命题成立. □

评注. 如果使用别的手段(如Menelaus定理),本题也可以做, 但那样则错失了 A, I, D 共线这一优美且现在常常用到的构型.

1993.3 给定正整数 n, 设 x 是实数,求 $f(x) = \sum_{t=0}^{2n} (2n+1-t)\, x^t$ 的最小值.

解. 注意到

$$\begin{aligned} f &= x^{2n} + 2x^{2n-1} + \cdots + (2n)\, x + (2n+1) \\ &= \left(x^n + x^{n-1}\right)^2 + 2\left(x^{n-1} + x^{n-2}\right)^2 + \cdots + n(x+1)^2 + (n+1) \\ &\geq n+1, \end{aligned}$$

且 $x = -1$ 时 $f = n+1$,故 $f_{\min} = n+1$. □

评注. 可通过 n 较小的情况猜测出答案, 并且看到 f 的最小值似乎均在 -1 处取到, 围绕此进行配方即可.

1992.1对 n 个给定的正实数, 定义其奇异平均值为这 n 个数的平方和除以这 n 个数之和. 对 $n = 2$, 验证下面结论是正确的还是错误的.

(1)奇异平均值不小于 3 次幂平均值.

(2)奇异平均值不大于 3 次幂平均值.

(3)奇异平均值可能大于 3 次幂平均值, 也可能小于 3 次幂平均值, 这依赖于所给的数.

进一步考虑 $n = 3$ 时这些结论的正确性.

解. 对 $n = 2$, 第二个结论正确, 即对 $a, b > 0$ 恒有

$$\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}\right)^3 \geq \frac{a^3+b^3}{2}.$$

事实上, 由齐次性, 不妨设 $b=1$, 展开后知不等式等价于

$$(a-1)^4\left(a^2+a+1\right)\geq 0,$$

这显然成立.

对 $n=3$, 第三个结论正确, 为此只用考虑

$$(a,b,c)=(1,1,2),(a,b,c)=(2,2,3)$$

分别代入验算即可. □

评注. $n=2$ 时可化为一元情况容易验证; $n=3$ 时我们构造例子, 为求简化也可令两个变量相等, 从而化为一元情况再讨论.

1992.2 对任意正整数 k, 定义 $f_1(k)$ 是 k 在 10 进制下的数码和的平方, 且对任意整数 $n>1$,定义$f_n(k)=f_1(f_{n-1}(k))$.

求 $f_{1992}(2^{1991})$.

解. 首先注意到一个正整数的数码和与其本身模 9 同余, 故对 $k\geq 1$ 归纳易知

$$\begin{cases} f_{2k-1}(2^{1991})\equiv 7\,(\mathrm{mod}9), \\ f_{2k}(2^{1991})\equiv 4\,(\mathrm{mod}9). \end{cases} \qquad (*)$$

下证 $f_{1992}(2^{1991})=256$.

注意到 $f_1(2^{1991})=f(4^{995}\times 2)<(1000\times 9)^2<10^8$,

$$\begin{aligned} &\Rightarrow f_2\left(2^{1991}\right)<f_1(99999999)=72^2<9999, \\ &\Rightarrow f_3\left(2^{1991}\right)<36^2<1999, \\ &\Rightarrow f_4\left(2^{1991}\right)<28^2<900, \\ &\Rightarrow f_5\left(2^{1991}\right)<900. \end{aligned}$$

由 $f_6(2^{1991})=(9t+7)^2$, 其中 $9t+7$ 是一个平方数的数码和, 可知 $f_6(2^{1992})\in\{49,256,625\}$,

$$\begin{aligned} &\Rightarrow f_7\left(2^{1991}\right)=13^2=169, f_8\left(2^{1991}\right)=256, \\ &\Rightarrow f_9\left(2^{1991}\right)=169, \\ &\vdots \\ &\Rightarrow f_{1992}\left(2^{1991}\right)=256. \end{aligned}$$

□

评注. 本题是对数码和的考虑, 运用了最基本的估计和同余的手法.

1992.3 给定平面上无三点共线的有限个点. 证明: 可以给这些点二染色, 使得不存在一个半平面恰含其中三个点并且它们同色.

证明. 设所有给定点的集合为 S, 将 S 的凸包的顶点集合记为 U.

将 $S\backslash U$ 中各点染红, U 中各点染蓝, 接下来有次序地调整染色: 首先 $S\backslash U$ 中的点始终保持红色.

称 U 中任一时刻染色状态下的一点 B 是差的, 如果

1. $\triangle ABC$ 内无 S 中的点;

2. A, B, C 均为蓝色.

其中 A, C 是 B 在以 U 为顶点集合的凸多边形中的邻点.

现在假设染色调整进行到任一时刻, 若不再有差点, 则终止过程, 否则选取(当前状态下)一个差点, 将它染红.

由于红点数每次调整后增加, 故这过程必终止,下证终止状态满足要求.

假设存在半平面 Γ, Γ与 S 恰有三个公共点 A, B, C, 且 A, B, C 同色. 容易知道 A, B, C 中至少一个属于 U, 不妨 $B \in U$.

1. A, B, C 同为蓝色, 则 A, B, C 必为 U 上连续三点. 注意到 $\triangle ABC$ 含于 Γ内, 故 $\triangle ABC$ 内无 S 中的点, 这导致 A, B, C 中有差点, 矛盾!

2. A, B, C 同为红色, 设 B 在 U 中的邻点为 D, E. 由 B 为红色知 B 是调整染色到某一时刻的差点, 因此 $\triangle BDE$ 内无 S 中的点. 故 A, C 与 B 在 DE 两侧, 不难看出这导致 D, E 之一属于 Γ, 矛盾!

综上, 所说染色可行. □

评注. 考虑到半平面恰含三点时这三点所在位置的分类, 我们考虑差点, 逐步去掉差点, 最后就达到题目的要求.本题有一定难度.

1991.1 设 n 是正整数, 实数 a, b, c 满足 $a, b \geq 1, c > 0$. 证明:

$$\frac{(ab+c)^n - c}{(b+c)^n - c} \leq a^n.$$

证明. $n = 1$ 时, 欲证不等式是等式.

$n \geq 2$ 时, 注意到 $(b+c)^n \geq 1 + c^n > c$, 将原不等式通分整理, 知其等价于

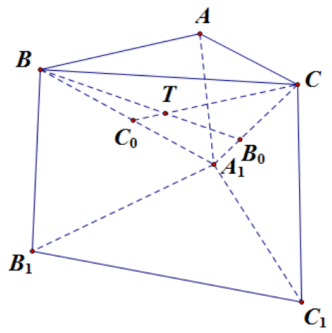
$$c\left(a^n - 1\right) \leq (ab+ac)^n - (ab+c)^n.$$

注意到 $c(a-1)=(ab+ac)-(ab+c)\geq 0$, 故只用证

$$(ab+ac)^{n-1}+(ab+ac)^{n-2}(ab+c)+\cdots+(ab+c)^{n-1}\geq a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+1,$$

显然上式左边每项不小于右边的对应项, 即证. □

1991.2 一个凸多面体的表面由2个三角形和3个四边形构成. 连接其中一个三角形的每个顶点和与之相对的四边形对角线交点, 证明: 这三线共点.



证明. 易知满足条件的多面体为下图的结构, 类似于三棱锥.

如图标记该多面体的各个顶点. 并设 $AB_1\cap BA_1=C_0$, 类似定义 B_0,A_0, 则要证明 AA_0,BB_0,CC_0 共点.

事实上, 注意 BB_0 与 CC_0 均在平面 A_1BC 上, 且 C_0 在线段 A_1B 上, B_0 在线段 A_1C 上, 故 BB_0 与 CC_0 相交, 设交点为 T.

类似知 AA_0,BB_0,CC_0 两两相交. 故若 AA_0 不通过 T, 则 $AA_0\subset$ 平面 A_1BC. 这显然不可能, 命题得证. □

评注. 注意到空间中两两相交的三条直线要么三线共面, 要么三线共点. 本题的解答即是基于这一点得出的.

1991.3 给定平面上 998 个红点, 其中无三点共线. 我们希望取 k 个蓝点满足: 在每个以红点为顶点的三角形内部都有一个蓝点. 求 k 的最小值使得对任意无三点共线的 998 个红点都存在满足要求的蓝点的选取方法.

解. 记 $n=998$, 先证明至少要 $2n-5=1991$ 个蓝点.

一方面, 取一个红点三角形 $P_1P_2P_3$, 再依次取出红点 $P_4,\ldots,P_n$, 使得 P_i 在 $\triangle P_1P_2P_{i-1}$ 内部, $4\leq i\leq n$. 将 P_i 与 P_{i+1} 相连, $3\leq i\leq n-1$, 再将 P_i 与 P_1,P_2 相连, $4\leq i\leq n$.我们看到，连出的线段一共将 $\triangle P_1P_2P_3$ 剖分成了 $(n+1-4)\times 2+1=2n-5$ 个内部两两不交的三角形, 每个三角形内至少有一个蓝点, 共 $2n-5$ 个蓝点.

另一方面, 我们说明 $2n-5$ 个蓝点是足够的.设所有红点为 $P_1,\ldots,P_n$, 其凸包顶点形成凸多边形 Ω的全部顶点. 任取一条直线 l, 使之不与任两点之间连线平行. 过各点 P_i 作 l 的平行线 l_i, 不妨设 Ω夹在 l_1 与 l_2 之间, 显然 P_1,P_2 在 Ω上.

现对 Ω上除 P_1,P_2 的任一点 P_i, 在 l_i 上, Ω的内部, 靠 P_i 很近处取一个蓝点; 对 Ω内部任一点 P_i, 在 l_i 上, Ω的内部, 靠 P_i 很近的两侧各取一个蓝点. 这样我们取出的蓝点数为

$$2n-2-\Omega\text{上点数}\le 2n-2-3=2n-5.$$

而对任一个红点三角形 $P_iP_jP_k$, 显然存在 $u\in\{i,j,k\}$, 使 l_u 通过 $\triangle P_iP_jP_k$ 的内部.根据取点方法知由 P_u 取出的某个蓝点在 $\triangle P_iP_jP_k$ 内, 满足要求.

综上, k 的最小值为1991. □

评注. 构造中的 k 其实是一个相对较大的值, 这表明证明时可“不计成本”地在较多的已知点附近放置蓝点.凸包的选取是为了明确变量进行估计.支撑线实际上是在为省下最后两个蓝点所做的优化.本题难度中等.

1990.1 设 p 为奇素数, n 是正整数. 证明: pn^2 至多只有一个正因子 d 满足 n^2+d 是完全平方数.

证明. 假设 $n^2+d=m^2$, m 是正整数, 我们证明$m=\frac{p+1}{p-1}n$. $(*)$

注意到若正整数 t 整除 m,n, 则 $t^2\mid d$, 从而可用 $\frac{n}{t},\frac{m}{t},\frac{d}{t^2}$ 代替 n,m,d 来讨论. 故为证 $(*)$ 不妨设 $(m,n)=1$, 于是 $(m^2-n^2,n^2)=1$. 由此及 $(m^2-n^2)\mid pn^2$ 可知 $(m^2-n^2)\mid p$, 故 $m^2-n^2=1$ 或 p.

若 $m^2-n^2=1$, 显然这无正整数解;

若 $m^2-n^2=p$, 即 $(m+n)(m-n)=p$. 由 p 是素数知

$$m+n=p,\ m-n=1,$$

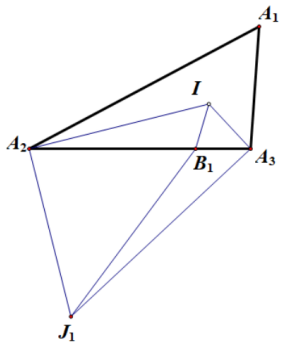
这推出 $(*)$ 成立.

因此 m 至多有一个取值, 对应的 $d=m^2-n^2$ 也至多一个. □

评注. 设出 m 后利用公因数定义推出 $m^2-n^2=(m,n)^2, m^2-n^2=p(m,n)^2$ 这两种情况, 再注意到可利用平方差公式将左边分解, 而右边分解唯一, 从而必对应相等, 解出 m 即可.

1990.2 设 I 是 $\triangle A_1A_2A_3$ 的内心, J_i 是该三角形的 A_i 所对旁心, B_i 是边 $A_{i+1}A_{i+2}$ 与 $\angle A_{i+1}IA_{i+2}$ 的平分线的交点, $i=1,2,3$, 下标模3考虑. 证明: 三

线 $B_iJ_i(i=1,2,3)$ 共点.



证明. 注意 $A_i \in J_{i+1}J_{i+2}$, 且 $\triangle J_iA_{i+1}A_{i+2} \sim \triangle J_iJ_{i+2}J_{i+1}$, 从而有

$$\begin{aligned}\prod_{1\le i\le 3}\frac{\sin\angle A_{i+1}J_iB_i}{\sin\angle B_iJ_iA_{i+2}} &= \prod_{1\le i\le 3}\frac{B_iA_{i+1}}{B_iA_{i+2}}\cdot\frac{A_{i+2}J_i}{A_{i+1}J_i}\\ &= \left(\prod_{1\le i\le 3}\frac{IA_{i+1}}{IA_{i+2}}\right)\left(\prod_{1\le i\le 3}\frac{J_iJ_{i+1}}{J_iJ_{i+2}}\right)\\ &= 1\times 1 = 1,\end{aligned}$$

故由Ceva定理, $B_iJ_i\,(i=1,2,3)$ 共点. □

1990.3 我们有一个重心偏移的硬币, 将其抛掷正面朝上的概率为 p. 将这枚硬币抛掷 k 次有 2^k 种可能结果, 把这 2^k 种结果分配给100个孩子, 每种结果恰分给一个孩子. 在真正地完成 k 次抛掷后, 分配到抛掷结果的孩子获胜.

证明: 可以适当地选取 $p\in(0,1)$ 以及正整数 k, 使得每个孩子有相同的获胜概率.

证明. 即要证明存在 $p\in(0,1)$ 和正整数 k 使得可将以下 2^k 个数:

$$\binom{k}{j}\text{ 个 } p^j(1-p^{k-j}),\ j=0,1,\ldots,k$$

分成100组, 使得每组数和相等.

取 $k=199$, p 待定, 我们证明可以将 2^{199} 个数:

$$\binom{199}{j}\text{ 个 } p^j(1-p^{199-j}),\ j=0,1,\ldots,199$$

分成200组, 每组和相等.

由199为质数知 $199\left|\binom{199}{j}\right.$, $j=1,2,\ldots,198$, 因此可以将这 $2^{199}-2$ 个数均分为199组, 每组中 $p^j(1-p)^{199-j}$ 各 $\frac{1}{199}\binom{199}{j}$ 个 $(j=1,\ldots,198)$.

余下两数 $(1-p)^{199}$ 和 p^{199}, 将它们另作为一组, 一共200组. 这200组数满足

条件当且仅当

$$(1-p)^{199}+p^{199}=\frac{1}{199}\left(1-(1-p)^{199}-p^{199}\right),$$

亦即

$$(1-p)^{199}+p^{199}=\frac{1}{200}. \qquad (*)$$

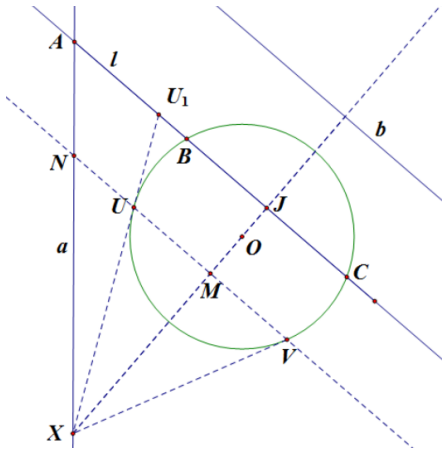
记 $(*)$ 左边为 $f(p)$, 则 $f(0)=1$,而

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{199}<\frac{1}{200},$$

因此由连续介值原理, 存在 $p\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 满足 $(*)$, 证毕. □

评注. 直接将数目 $\binom{199}{j}$ 进行拆分是本题的关建想法, 这样可摆脱按别的方法杂乱分配各数时对未知量 p 的诸多限制.本题需要一定巧思.

1989.1 给定平面上两条相交直线 a,b 和一个与 a,b 无公共点的圆 ω. 对与 b 平行且与 ω 相交于两点的直线 l, 设 A 是 l 与 a 的交点, B,C 是 l 与 ω的交点, 使得 B 在线段 AC 上. 试构造直线 l 使得 $\frac{BC}{AB}$ 取到最大值.



解. 如果 $b\perp a$, 显然令 l 过 ω圆心 O 时 $\frac{BC}{AB}$ 最大.

下设 b 与 a 不垂直, 过 O 作 b 的垂线, 交 a 于点 X. 过点 X 作 $\odot O$ 的两条切线 x_U,x_V, 切点分别为 U,V, U 更靠近 a. 往证 UV 为所求的 l.

对一般的与 b 平行且与 ω 相交于两点的直线 l, 设 BC 中点为 J, $U_1=l\cap x_U$, $UV\cap a=N$, UV 中点为 M. 由于 ω整个地位于 U_1X 一侧, 可知 B 在线段 U_1J 上. 从而有

$$\frac{MU}{UN}=\frac{JU_1}{U_1A}\geq\frac{JB}{BA},$$

即 $\frac{UV}{UN}\geq\frac{BC}{BA}$. 由此知直线 UV 即为所求的 l. □

评注. 在本题中直线 l 截圆 ω得到的弦的中点有良好性质(在定直线上移动), 把 $\frac{BC}{BA}$ 向这转化之后, 将定点 X 取出可便于比较, 这样就不难发现使 $\frac{BC}{BA}$ 取极值的 l 的有关性质.

1989.2 对正整数 n, 用 $S(n)$ 表示 n 在十进制表示下的数码和. 求所有的正整数 M 使得 $S(Mk)=S(M)$ 对所有整数 $1\le k\le M$ 成立.

解. 所求为 $M=1$ 或 $M=10^t-1\,(t\ge 1)$. 当 $M=1$ 时结论平凡. 下设 $M>1$, 则存在 $t\ge 0$ 使得 $10^t-1<M\le 10^{t+1}-1$. 又显然 $M\ne 10^t$, 故 $M\ge 10^t+1$.

取 $k=10^t+1$, 又设 $M=\overline{m_tm_{t-1}\cdots m_1m_0}$, 则

$$kM=10^tM+M=\overline{m'_{2t+1}\cdots m'_tm_{t-1}m_{t-2}\cdots m_0}, \tag{1}$$

其中 $\overline{m'_{2t+1}\cdots m'_{t+1}m'_t}=\overline{m_t\cdots m_1m_0}+m_t, m'_{2t+1}\ge 0$. 故由已知,

$$0=S(kM)-S(M)=m'_{2t+1}+\cdots+m'_t-m_t. \tag{2}$$

从而必有 $m'_{2t}\le m_t$.

若 $m'_{2t}=m_t$, 则 $m_{2t+1}=m'_{2t-1}=m'_{2t-2}=\cdots=m'_t=0$, 导致

$$\overline{m'_{2t+1}m'_{2t}\cdots m'_{t+1}m'_t}<\overline{m_tm_{t-1}\cdots m_1m_0}+m_t,$$

与 (1) 矛盾.

故 $m'_{2t}<m_t$, 则 $m'_{2t},\ldots,m'_t$ 上均有进位, 从而必有

$$m_t=\cdots=m_1=9, m_t+m_0\ge 10,$$

$$m'_{2t+1}=1, m'_{2t}=\cdots=m'_{t+1}=0, m'_t=m_t+m_0-10.$$

结合(2)可知 $m_0=9$, 故 $M=10^{t+1}-1$.

另一方面, 若 $M=10^t-1\,(t\ge 1)$, 对 $1\le k\le M$, 可设

$$k=\overline{k_{t-1}\cdots k_1k_0},\ k_0=\cdots=k_{i-1}=0,\ k_i\ne 0,$$

这里 i 可为0, 表示 k 的末尾非零. 则

$$kM=\overline{k_{t-1}\cdots(k_i-1)\underbrace{9\ldots9}_{i}(9-k_{t-1})\ldots(9-k_i)\underbrace{0\ldots0}_{i}},$$

由此可看出 $S(kM)=9t=S(M)$. □

评注. 对较小的情况试验容易发现规律, 证明时取一个 k 使得 kM 与 M 有很多相同的数码,便于分析 $S(kM)$ 和 $S(M)$, 所以想到 10^t+1 形式. $M=10^t-1$ 时满足要求是经典结论.

1989.3 在直角坐标平面上进行如下游戏. 在任意一步, 可以由 (x,y) 移动到点 $(x,y\pm 2x)$ 或者点 $(x\pm 2y,y)$,但是不允许走两步回到同一点(即后退).

证明: 从点 $\left(1,\sqrt{2}\right)$ 开始, 不能由有限步(至少一步)回到该点.

证明. 注意到每次移动可以看成 $\mathbb{R}^2$ 上的一个线性变换, 假设在这些变换的复合 F 下有 $F\left(1,\sqrt{2}\right)=\left(1,\sqrt{2}\right)$. 注意 F 必形如 $F\left(x,y\right)\to\left(ax+by,cx+dy\right),a,b,c,d\in\mathbb{Z}$, 故必有

$$\begin{cases} a+\sqrt{2}b=1 \\ c+\sqrt{2}d=\sqrt{2} \end{cases}\Rightarrow\left(a,b,c,d\right)=\left(1,0,0,1\right),$$

因此 F 为恒等变换. 故我们不再考虑点 $(1,\sqrt{2})$, 而是取而代之地考虑 $(1,0)$ 在这些变换下的像, 它的像仍然是 $(1,0)$.

无妨设第一步是 $(x,y)\to(x,y+2x)$, 则 $(1,0)\to(1,2)$. 然而我们证明, 在题述操作下, 若由点 (x,y) 经一步变换为 (u,v), 则必有 $\max\left\{|u|,|v|\right\}>\max\left\{|x|,|y|\right\}$, 这样由已有绝对值为2的分量知不可能由 $(1,0)$ 回到自身, 与假设矛盾.

事实上, 不妨 $|x|>|y|$ (注意到两分量奇偶性总不相同, 故 $x\neq y$), $x\geq 0$. 并可仅讨论 $y\geq 0$ 情形($y\leq 0$ 类似). 假设某一步首次有 $\max\left\{|u|,|v|\right\}\leq\max\left\{|x|,|y|\right\}$. $(*)$

设 (x,y) 上一步在 (r,s), 由 (x,y) 的定义知 $|x|>\max\left\{|r|,|s|\right\}$, 故必有

$$\begin{cases} x=r+2s, \\ \quad y=s. \end{cases}$$

于是 $s\neq 0$, 故 $y>0$.

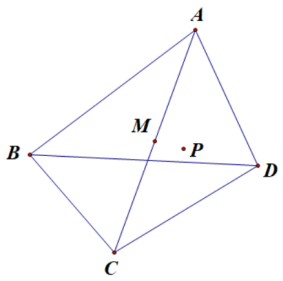
而由 $(*)$ 及 $|y+2x|>|x|,|y-2x|>|x|,|x+2y|>x$ 知有

$$\begin{cases} u=x-2y, \\ \quad v=y, \end{cases}$$

导致 $(u,v)=(r,s)$, 与不能后退矛盾! □

评注. 无理数 $\sqrt{2}$ 促使我们发现 F 实际上可以看作对整个平面的恒等变换.因此可以不再考虑题目中所给的点 $\left(1,\sqrt{2}\right)$, 而选择性质更好的整点 $(1,0)$ 来研究. 这为之后应用偏组合一些的处理手段提供了条件.本题有一定难度.

1988.1 证明: 如果在凸四边形 $ABCD$ 内存在一点 P 使 $\triangle PAB,\triangle PBC,\triangle PCD,\triangle PDA$ 的面积相同, 那么 $ABCD$ 的一条对角线平分该四边形的面积.



证明. 如果 $P \notin AC$, 则 P 与 AC 中点 M 不重合. 由

$$S_{\triangle APD} = S_{\triangle CPD}$$

知 D, P, M 共线, 由

$$S_{\triangle APB} = S_{\triangle CPB}$$

知 B, P, M 共线. 故 B, M, P, D 四点共线, 即 $P \in BD$.

上述讨论表明 P 一定在四边形的某条对角线上，由此易得命题成立. □

1988.2 已知集合 $T \subset \{1, 2 \ldots, n\}^3$ 具有如下性质: 对 T 中任意不同两点 (a, b, c) 与 (x, y, z),均有 $a < b < c$,且 $a = x, b = y, c = z$ 中至多一个等式成立. 求 $|T|$ 的最大值.

解. 对 $(a, b, c) \in T$, 我们考虑固定 b 时这样的对子有多少组.

由条件可知 $a \in \{1, 2, \ldots, b-1\}$, $c \in \{b+1, \ldots, n\}$, 且对每个 $a \in \{1, 2, \ldots, b-1\}$, 至多有一个 c 使得 $(a, b, c) \in T$. 同样地对每个 $c \in \{b+1, \ldots, n\}$, 至多有一个 a 使 $(a, b, c) \in T$. 故固定 b 时, 对子 $(a, b, c) \in T$ 不多于 $\min\{b-1, n-b\}$ 个. $(*)$

从而

$$\begin{aligned} |T| \leq \sum_{b=2}^{n-1} \min\{b-1, n-b\} &= \begin{cases} \frac{n(n-2)}{4}, & 2 \mid n, \\ \left(\frac{n-1}{2}\right)^2, & 2 \nmid n, \end{cases} \\ &= \left[\frac{(n-1)^2}{4}\right]. \end{aligned}$$

我们给出取到等号的例子如下: 令

$$T = \{(a, b, a+b) \,|\, 1 \leq a, b, a+b \leq n\},$$

易知 T 满足题述性质. 注意这时 $(*)$ 对每个 $2 \leq b \leq n-1$ 都成立等号, 故 $|T| = \left[\frac{(n-1)^2}{4}\right]$. □

评注. 对 T 中的元素分类计数, 出于对称性, 我们取 b 作为分类标准. 例子的构造使用了和本文2002.3相类似的想法, 让每个取出的点的三个分量满足某

个方程, 以便于控制不同点之间的公共分量.

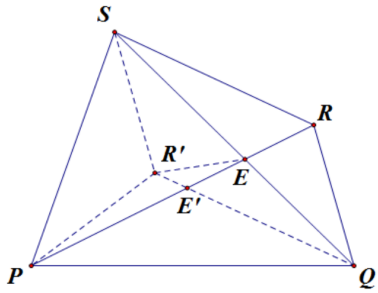
本题的一个特例是2011年联赛第3题:

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n (n \geq 4)$ 是给定的正实数, $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.对任意正实数 r, 将满足

$$\frac{a_j - a_i}{a_k - a_j} = r \ \ (1 \leq i < j < k \leq n)$$

的三元数组 (i, j, k) 的个数记为 $f_n(r)$. 证明: $f_n(r) < \frac{n^2}{4}$.

1988.3 设四边形 $PQRS$ 是格点凸四边形, 对角线相交于点 E. 证明: 若 $\angle P + \angle Q < 180^\circ$, 那么在 $\triangle PQE$ 内部或其一边上含有一个异于 P, Q 的格点.



证明. 用反证法, 假设存在面积最小的题述凸四边形 $PQRS$, 使得 $\triangle PQE$ 内部或边界上没有一个异于 P, Q 的格点.

不妨设 R 到 PQ 的距离不大于 S 到 PQ 的距离. 考虑 R 关于 SQ 中点的对称点 R', 则由 R, S, Q 都是整点知 R' 是整点.

由 $SR' \parallel QR, \angle P + \angle Q < 180^\circ$ 以及 P, R 在 SQ 两侧知 P, Q 在 SR' 两侧. 同理 S, P 在 $R'Q$ 两侧, 因此 R' 在 $\triangle PQS$ 内部.

由假设, R' 不在 $\triangle EPQ$ 内部或边界上, 故 R' 在 $\triangle SPE$ 内部, 因此线段 $R'Q$ 与 PR 有交点, 设为 E'. 因 $\triangle E'PQ \subset \triangle EPQ$, 故前者内部或边界上无整点, 但 R' 在 $PQRS$ 内, 故 $S_{PQRR'} < S_{PQRS}$, 与最小性矛盾! □

评注. 本题利用极端原理以及通过平行四边形取出新整点的手法很经典, 用类似的想法可以证明, 格点凸五边形的五条对角线交出的五边形中至少有一个格点.

1987.1 求所有满足 $a + b = cd, ab = c + d$ 的互异正整数组成的4元组 (a, b, c, d).

解. 由对称性, 不妨设 $a > b, c > d, cd \geq ab$.

则 $a+b=cd\geq ab$, 故 $1\geq (a-1)(b-1)\geq b(b-1)$, 知 $b=1$.

从而 $a+1=cd, a=c+d$, 则 $1+c+d=cd$, 即

$$2=(c-1)(d-1),$$

由 $c-1>d-1$ 知 $c-1=2, d-1=1$, 从而

$$d=2,\ c=3,\ a=cd-1=5.$$

这组 a,b,c,d 满足条件.

从而所有满足条件的4元组为

$$(5,1,2,3),(5,1,3,2),(1,5,2,3),(1,5,3,2),(3,2,1,5),(3,2,5,1),(2,3,5,1),(2,3,1,5).$$

□

1987.2 是否存在一个空间中的点集使得它与任何平面的交都是非空有限集?

解. 考虑点集

$$T=\left\{\left(x^i,x^j,x^k\right)\middle|x\in\mathbb{R}, i,j,k \text{ 是 } 1,2,3 \text{ 的排列}\right\},$$

下证 T 满足要求.

事实上, 对任意一个平面 $\tau: ax+by+cz+d=0$ ($a,b,c,d\in\mathbb{R}, a,b,c$ 不全为零), 考虑方程

$$ax^i+bx^j+cx^k+d=0. \qquad (*)$$

注意到, 一定存在 i,j,k 为 $1,2,3$ 的排列使得这个方程为三次方程, 从而这个三次方程至少有一个实数解.

而对其他 $1,2,3$ 的排列 i,j,k (有限个), 其对应方程 $(*)$ 只有有限个解.

这就说明了 T 与 τ的交是非空有限集, 即证. □

评注. 本题入手可能会从几何上考虑, 但验证时不难发现还是要借助代数手段(解方程)来解决.为了让方程的解总是存在且易于控制数目, 我们联想到三次方程, 问题便迎刃而解.

1987.3 一个 $3n+1$ 个人的俱乐部中任意两人进行乒乓球, 网球或下棋中的恰一种比赛. 已知任意一个人和其余 n 个人打乒乓球, 和 n 个人打网球, 和 n 个人下棋.证明: 可以从俱乐部中选出 3 个人, 使得这 3 个人之间 3 种比赛项目都进行了.

证明. 假设不存在所说的三人, 计算如下的对子数目:

$$S=\{(A,\{B,C\})\mid B\text{ 与 }A,C\text{ 与 }A\text{ 比赛的项目不同}\}.$$

一方面, 从 A 的角度, 每个成员 A 参加了三种项目各 n 场, 故

$$|S|=3n^2(3n+1).$$

另一方面, 任取三人, 由反证法假设易知这三人为 S 提供至多 2 个对子. 而三人组有 $\binom{3n+1}{3}$ 种选择, 故

$$|S|\le\binom{3n+1}{3}\cdot 2.$$

因此有

$$\begin{aligned}0&\le 2\binom{3n+1}{3}-3n^2(3n+1)\\&=\frac{1}{3}(3n+1)(3n)(3n-1)-3n^2(3n+1)\\&=(3n+1)\left(n(3n-1)-3n^2\right)\\&=-(3n+1)n.\end{aligned}$$

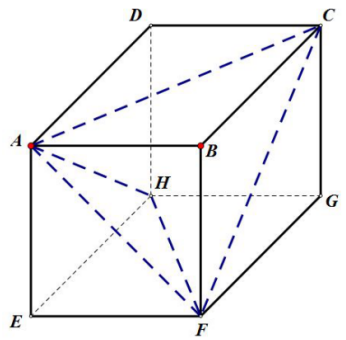
这显然不可能. □

评注. 本题用到了算两次的经典办法.将简单图的边二染色, 则图中三边两两异色、有边同色的三角形分别贡献了一定数量的有公共顶点的异色边对子, 借此可将顶点的度与三边两两异色的三角形数目建立联系.

1986.1 证明以下两个命题等价.

(1) 在由一个点引出的 3 条射线上可以分别取出以该点为端点的三条线段, 使得存在以这三条线段为面对角线的长方体;

(2)这 3 条射线两两之间的夹角均为锐角, 且这 3 个角和为 $180°$.



证明. 若(1)成立, 设长方体为 $ABCD-EFGH$, 其中 AC,AF,AH 为三条射线. 连接 HF,CF.

由于 $HF = DB = AC, AH = BG = CF, AF = AF$, 从而 $\triangle AHF \cong \triangle FCA$, 故 AH 与 AF 的夹角等于 FC 与 FA 夹角, 即 $\angle CFA$.

同理, AC 与 AH 夹角等于 CA 与 CF 夹角, 即 $\angle ACF$.

而 AF 与 AC 的夹角即为 $\angle FAC$, 因为 $\triangle ACF$ 三个内角之和为 $180°$, 故结合上述可知 AH, AC, AF 两两夹角之和为 $180°$.

又由于

$$AC^2 + AF^2 = AB^2 + CB^2 + AB^2 + BF^2 > CB^2 + FB^2 = CF^2,$$

故 $\angle CAF$ 为锐角.同理 AH, AF 夹角, AG, AH 夹角均为锐角. 故(2)成立.

另一方面, 若(2)成立, 设从端点 A 引出的三条射线分别为 l_1, l_2, l_3. 设 l_1 与 l_3 的夹角为 α, l_1 与 l_2 夹角为 β, l_2 与 l_3 夹角为 γ, $\alpha, \beta, \gamma \in (0°, 90°)$, $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

在 l_1 上取一点 C 使 $AC = \sin\gamma$, 在 l_2 上取一点 H 使 $AH = \sin\alpha$, 在 l_3 上取一点 F 使 $AF = \sin\beta$. 注意到由正弦定理, 存在一个以 AC, AH, AF 为三边边长且三个内角为 α, β, γ的锐角三角形, 故 $CF = \sin\alpha = AH$.

此时考虑以

$$\sqrt{\frac{\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma}{2}}, \sqrt{\frac{\sin^2\alpha + \sin^2\gamma - \sin^2\beta}{2}}, \sqrt{\frac{\sin^2\beta + \sin^2\gamma - \sin^2\alpha}{2}}$$

为边长的长方体 $A^*B^*C^*D^* - E^*F^*G^*H^*$, 其中

$$A^*B^* = \sqrt{\frac{\sin^2\beta + \sin^2\gamma - \sin^2\alpha}{2}}, B^*F^* = \sqrt{\frac{\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma}{2}},$$

$$B^*C^* = \sqrt{\frac{\sin^2\alpha + \sin^2\gamma - \sin^2\beta}{2}}.$$

则 $A^*C^* = \sin^2\gamma = AC$, $A^*F^* = AF$, $C^*F^* = CF$.

于是存在长方体 $ABCD - EFGH'$ 与长方体 $A^*B^*C^*D^* - E^*F^*G^*H^*$ 全等, 且 H' 与 H 在面 AFC 同侧.

由前面证明可知, A^*H^* 与 A^*F^*, A^*C^* 的夹角分别为 γ, β, 故 A^*H' 与 AF, AC 夹角分别为 γ, β. 而 AH 与 AF, AC 的夹角分别为 γ, β, 且 $AH' = AH$, 故 $H = H'$.

这就说明了(1)成立, 原题得证. □

评注. 结论提示我们应该将 3 条不共面直线两两之间的夹角转化到一个三角形中去, 这由几何体的对称性容易实现, 构造的时候再将长方体还原即可.

1986.2 给定正整数 $n>2$, 求最大的实数 h 和最小的实数 H 使得

$$h<\frac{a_1}{a_1+a_2}+\frac{a_2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_n+a_1}<H$$

对任意正数$a_1,a_2,\ldots,a_n$ 成立.

解. 一方面, 令 $a_i=\varepsilon^i\,(i=1,2,\ldots,n)\,,\varepsilon>0$, 则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_i+a_{i+1}}=\frac{n-1}{1+\varepsilon}+\frac{\varepsilon^n}{\varepsilon^n+1}.$$

分别取 $\varepsilon\to+\infty$和 $\varepsilon\to 0$可知须有 $h\le 1$ 和 $H\ge n-1$.

另一方面, 由

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_i+a_{i+1}}>\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_1+\cdots+a_n}=1,$$

以及

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_i+a_{i+1}}&=\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{a_{i+1}}{a_i+a_{i+1}}\right)\\&=n-\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{i+1}}{a_i+a_{i+1}}\\&<n-\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{i+1}}{a_1+\cdots+a_n}\\&=n-1,\end{aligned}$$

可知 $h=1,H=n-1$ 满足条件.

故综上所述, $h_{\max}=1,H_{\min}=n-1$. □

评注. 证明分式不等式时, 一个常用的想法是统一分母.这里我们通过平凡的放缩可实现该想法.

1986.3 给定整数 $k\,(1\le k\le 100)$, A 和 B 进行如下游戏: 在 $\{1,2,\ldots,100\}$ 中随机取 k 个数, 和为偶数则 A 胜, 否则 B 胜. 对哪些整数 k, A 和 B 获胜概率相同?

解. 考虑多项式 $\prod\limits_{i=1}^{100}\Big(1+(-1)^ix\Big)$.

一方面, 因为

$$\prod_{i=1}^{100}\Big(1+(-1)^ix\Big)=\sum_{I\subseteq\{1,2,\cdots,100\}}\prod_{a\in I}(-1)^ax^{|I|},$$

这里规定 $\prod\limits_{a\in\emptyset}(-1)^ax^{|\emptyset|}=1$. 则可以看出其中 $x^k\,(0\le k\le 100)$ 项系数为从 $\{1,2,\cdots,100\}$ 中取 k 个数, 分别使得和为偶数与和为奇数的两种方法

数之差. 从而 A 和 B 获胜机率相同当且仅当 x^k 项系数为 0.

另一方面,

$$\prod_{i=1}^{100}\left(1+(-1)^i x\right)=(1-x)^{50}(1+x)^{50}=\left(1-x^2\right)^{50}=\sum_{t=0}^{50}(-1)^t\binom{50}{t}x^{2t}.$$

故 x^k $(0\le k\le 100)$ 项系数等于 0 当且仅当 k 为奇数. 综上, 对 $0\le k\le 100$,k 满足条件当且仅当 k 为奇数. □

评注. 这里我们用生成函数方法来计算两种方法数之差. 有关这种方法, 可以参考 [6] 进行学习.

1985.1 设整数 $n\ge 2$, 连接凸 $n+1$ 边形 $P_0P_1\cdots P_n$ 的一些两两没有公共内点的对角线,将其剖分为 $n-1$ 个三角形.

证明. 可以给剖分所得的每个三角形标记 $1,2,\ldots,n-1$ 中的一个数, 每个数都用到, 使得对每个 $i\in\{1,2,\cdots,n-1\}$, P_i 是标记 i 的三角形的一个顶点.

证明. 对 n 使用数学归纳法.

$n=2$ 时结论平凡.假设小于 $n(n\ge 3)$ 时结论成立, 考虑 n 时的情形. 由于剖分得到了 $n-1$ 个三角形, 它们含 $n+1$ 边形的所有边, 从而存在一个三角形, 含 $n+1$ 边形的至少 2 条边, 进而由 $n\ge 3$ 知它恰好含 $n+1$ 边形的 2 条边. 于是可设该三角形为 $\triangle P_{i-1}P_iP_{i+1}$ (下标模 $n+1$ 理解).

此时剩下的 $n-2$ 个三角形含 $n+1$ 边形的 $n-1$ 条边, 从而还存在一个三角形含 $n+1$ 边形的至少两条边, 也可设为 $\triangle P_{j-1}P_jP_{j+1}$. 于是 $P_i\ne P_j$, 易知 P_i 与 P_j 不相邻, 从而 $i\ne 0,n$ 与 $j\ne 0,n$ 中至少成立一个, 不妨设前者成立.

将 $\triangle P_{i-1}P_iP_{i+1}$ 标记 i.此时对凸 n 边形 $P_{i-1}P_{i+1}P_{i+2}\cdots P_{i-2}$, P_0 与 P_n 在其中相邻,且其被对角线剖分为 $n-2$ 个三角形.由归纳假设, 可以给这 $n-2$ 个三角形标记 $\{1,2,\ldots,n-1\}\setminus\{i\}$ 中数字使对于每个 $j\in\{1,2,\ldots,n-1\}\setminus\{i\}$, P_j 是标记 j 的三角形的一个顶点.

综上, n 时命题成立.从而结论得证. □

评注. 注意到三角剖分的特点, 想到利用归纳法, 只要注意到要满足每次删点之后, 不需要染色的两点相邻即可.

1985.2 对每个整数 $n\ge 2$, 定义 n 的"幂和"如下: 对 n 的每个素因子 p, 考虑最大的正整数 k 使 $p^k\le n$, 并将所有这些 p^k 求和即为幂和.

证明. 存在无穷多个正整数 n 使得 n 的幂和大于 n.

证明. 下证 $15k\,(k\in\mathbb{N})$ 的幂和大于 $15k$, 记 $n=15k$.

事实上, 对素数 $p\mid 15k$, 设 $p^{j_p}\le n<p^{j_p+1}$, 则 $p^{j_p}>\frac{n}{p}$, 从而 $15k$ 的幂和不小于

$$2^{j_2}+3^{j_3}+5^{j_5}>\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\frac{n}{5}>n.$$

□

评注. 由幂和定义知的幂和大于 $\left(\sum\limits_{p\mid n,p\text{为素数}}\frac{1}{p}\right)\cdot n$, 只要令 n 的不同素因子倒数和大于 1 即可, 而我们知道级数 $\sum\limits_{p\text{为素数}}\frac{1}{p}$ 发散, 故上述要求是容易满足的.

1985.3 将一个三角形的每个顶点关于对边作反射, 证明: 由三个反射点构成的三角形面积小于原三角形面积的 5 倍.

证明. 利用解析几何.

设原三角形为 ABC, A,B,C 关于对边的反射点分别为 A^*,B^*,C^*. 不妨设在平面直角坐标系中, $C(-1,0),B(1,0),A(s,t)(t>0)$, 则 $S_{\triangle ABC}=t$, $A^*(s,-t)$.

设 $B^*(u,v),C^*(z,w)$, 则

$$S_{\triangle A^*B^*C^*}=\frac{1}{2}\left|uw-zt+sv+ut-zv-sw\right|.$$

不难解得

$$u=\frac{(s+1)^2-3t^2}{(s+1)^2+t^2},\ v=\frac{4t(s+1)}{(s+1)^2+t^2},\ z=\frac{3t^2-(1-s)^2}{(1-s)^2+t^2},\ w=\frac{4t(1-s)}{(1-s)^2+t^2},$$

代入上式化简得

$$\begin{aligned}S_{\triangle A^*B^*C^*}&=\frac{t}{((s+1)^2+t^2)((1-s)^2+t^2)}\cdot\left|5s^4-10s^2-3t^4-14t^2+2s^2t^2+5\right|\\&=\frac{t}{s^4-2s^2+2s^2t^2+t^4+2t^2+1}\cdot\left|5s^4-10s^2-3t^4-14t^2+2s^2t^2+5\right|.\end{aligned}$$

一方面,容易看出

$$5s^4-10s^2-3t^4-14t^2+2s^2t^2+5<5\left(s^4-2s^2+2s^2t^2+t^4+2t^2+1\right),$$

另一方面, 有

$$\begin{aligned}&\left(5s^4-10s^2-3t^4-14t^2+2s^2t^2+5\right)+5\left(s^4-2s^2+2s^2t^2+t^4+2t^2+1\right)\\=&\ 10s^4-20s^2+12s^2t^2+2t^4-4t^2+10.\end{aligned}$$

若 $3s^2\ge 1$, 则

$$\text{上式}\ \ge 10(s^2-1)^2+2t^2\ge 1.$$

若 $3s^2<1$, 则

$$\begin{aligned}\text{上式 } &\geq 10(s^2-1)^2+2(t^2-1)^2-2\\ &>10(\frac{1}{3}-1)^2-2>0.\end{aligned}$$

这便说明了 $S_{\triangle A^*B^*C^*}<5t=5S_{\triangle ABC}$, 结论得证. □

评注. 本题还可以用图形割补的几何办法来做, 但那样则需依赖 $\triangle ABC$ 的形状讨论大量情况, 上述解法以一定量的计算代之. 从证明过程中不难看出, 常数5是最佳的.

1984.1 按通常方式写出Pascal三角形前 4 行并在竖直方向求和得到如图所示 7 个数字.对前 1024 行做类似的操作,问得到的 2047 个数中有多少个奇数?

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1\\
\hline
1 & 1 & 4 & 3 & 4 & 1 & 1
\end{array}$$

这里, Pascal三角形是这样的等腰三角形数阵: 第 m 行有 m 个数, 且该行从左到右第 k 个数等于二项式系数 $\binom{m-1}{k-1}(m\in\mathbb{N}^*,1\leq k\leq m)$.

解. 对非负整数 n, 设对前 2^n 行作题述操作得到的奇数数目为 a_n, 则 $a_0=1,a_1=3$.

下面证明 $a_{n+1}=a_n+2a_{n-1}$.

由Lucas定理, 易知对任意 $m,k,n\in\mathbb{N}$, $m,k<2^n$, 均有

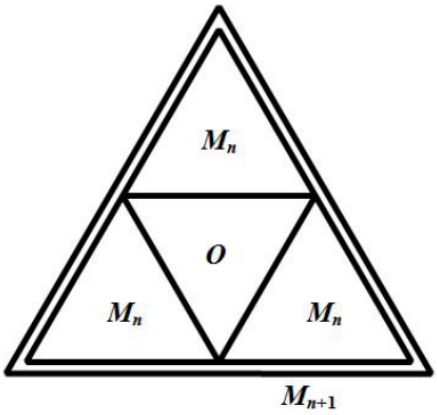
$$\binom{m+2^n}{k}\equiv\binom{m}{k}\,(\mathrm{mod}2)\,.$$

结合Pascal三角形轴对称的性质, 如果将前 2^n 行模 2 的最小非负剩余按原位置排成三角阵 M_n, 则 M_{n+1} 可以划分为形状相同的四块, 其中三块与 M_n 相同, 剩余一块内部全为零. $(*)$

设对前 2^n 行作题述操作得到的从左至右的 i 个数为 $S_i^{(n)}\,(1\leq i\leq 2^{n+1}-1)$, 定义 $S_0^{(n)}=0,n=0,1,\ldots$, 则由 $(*)$ 可看出

$$S_i^{(n+1)}+S_{i+2^{n+1}}^{(n+1)}\equiv 2S_i^{(n)}+S_{|2^n-i|}^{(n)}\equiv S_{|2^n-i|}^{(n)}\,(\mathrm{mod}2)\ \left(1\leq i\leq 2^{n+1}-1\right).$$

因此若 $S_{|2^n-i|}^{(n)}$ 为奇数, 则 $S_i^{(n+1)},S_{i+2^{n+1}}^{(n+1)}$ 一奇一偶,这样的 i 有 a_n-1 个(减去1是因为 $S_{2^n}^{(n)}$ 是奇数, 但不存在 $1\leq i\leq 2^{n+1}-1$ 使得 $|2^n-i|=2^n$).



而若 $S_{|2^n-i|}^{(n)}$ 为偶数, 则 $S_i^{(n+1)}, S_{i+2^{n+1}}^{(n+1)}$ 同奇偶, 同时由 $(*)$ 不难看出 $S_i^{(n+1)}, S_i^{(n)}$ 同奇偶. 因此若 $S_i^{(n+1)}, S_{i+2^{n+1}}^{(n+1)}$ 同为奇数, 则 $S_i^{(n)}$ 为奇数. 这时 $S_{|2^n-i|}^{(n)}+S_i^{(n)}\equiv 1\,(\mathrm{mod}2)$.

当 $1\le i\le 2^n-1$ 时,

$$S_{|2^n-i|}^{(n)}+S_i^{(n)}=S_{2^n+i}^{(n)}+S_i^{(n)}\equiv S_{|2^{n-1}-i|}^{(n-1)}\,(\mathrm{mod}2)\,,$$

当 $2^n\le i\le 2^{n+1}-1$ 时,

$$S_{|2^n-i|}^{(n)}+S_i^{(n)}=S_{i-2^n}^{(n)}+S_i^{(n)}\equiv S_{|3\cdot 2^{n-1}-i|}^{(n-1)}\,(\mathrm{mod}2)\,.$$

因此当 $S_{|2^{n-1}-j|}^{(n-1)}$ 是奇数时, 命题"$S_{|2^n-j|}^{(n)}$ 为奇数, $S_j^{(n)}$ 为偶数"与命题"$S_{|2^n-j|}^{(n)}$ 为偶数, $S_j^{(n)}$ 为奇数"恰好成立一个. 由此不难看出满足 $S_i^{(n+1)}, S_{i+2^{n+1}}^{(n+1)}$ 同为奇数的 i 恰有 a_{n-1} 个.

又因为上面未考虑 $S_{2^{n+1}}^{(n+1)}$ 这个奇数, 因此有

$$a_{n+1}-1=a_n-1+2a_{n-1}\Rightarrow a_{n+1}=a_n+2a_{n-1}.$$

由特征根方法知 $a_n=\frac{1}{3}\left(2^{n+2}+(-1)^{n+1}\right)$. □

评注. 研究二项式系数模 2 的办法有递推、母函数等方法.本解法利用了 $(*)$ 这一Pascal三角形的重要性质, 可以将 $S^{(n+1)}$ 的一部分转化为 $S^{(n)}$ 考虑, 未能转化的部分巧合地可与 $S^{(n-1)}$ 中数相对应, 这需要一定的观察.

1984.2 已知 $\triangle A_1B_1A_2, \triangle B_1A_2B_2, \triangle A_2B_2A_3, \ldots, \triangle B_{13}A_{14}B_{14}, \triangle A_{14}B_{14}A_1$ 和 $\triangle B_{14}A_1B_1$ 是空间中的一系列等边三角形, 且分别可沿直线 $A_1B_1, B_1A_2, \ldots, A_{14}B_{14}$ 和 $B_{14}A_1$ 转动.

问: 是否可以适当转动使这 28 个三角形放置在同一个平面中?

解. 假设可以将它们放置在同一个平面中. 考虑封闭折线 $L=A_1B_1A_2\cdots B_{14}A_1$,

记 $A_{15}=A_1, B_0=B_{14}$.

对 $1\le i\le 14$, 因 A_iB_i, B_iA_{i+1} 是等边三角形 $\triangle A_iB_iA_{i+1}$ 的两边, 故它们夹角为 60°. 同理可知$B_{i-1}A_i, A_iB_i$ 的夹角为 60°.

因此存在一个等边三角形的网格, 使得 L 由该网格的若干单位格线组成. 然而容易将网格的边标上 $1,2,3$, 使得对任意三条依顶点相连的格线 x,y,z, 若 x 与 y, y 与 z 的夹角均为 60°, 则 x,y,z 标号两两不同.

因此 L 上各线段标号以 3 为周期循环, 但 $3\nmid 28$,这不可能. □

评注. 抓住"相邻两边夹角恒为 60°"这一特征可以看似复杂的空间问题简化为研究平面上的折线.对等边三角形网格线染色以推断模 3 性质的办法是经典的.

1984.3 给定 n 个整数(不一定互不相同)以及 2 个正整数 p,q.若这 n 个数中有相同的数, 取其中相同两数并将一个加上 p, 另一个减去 q. 若仍有相同的数, 重复这一操作.

证明: 在有限次操作后所有 n 个数互异.

证明. 设起初 n 个数中最大的数是 M, 最小的数是 m.

对 r 归纳证明在任意次操作之后小于等于 $M+r(p+q)$ 的数有至少 r 个.

$r=0$ 时命题成立; 假设小于 r 时结论成立, r 时, 假设在某次操作前结论成立.

若该次操作是对两个大于 $M+r(p+q)$ 或小于等于 $M+(r-1)(p+q)$ 的数操作,则显然结论仍然成立.

若该次操作是对两个大于 $M+(r-1)(p+q)$ 且小于等于 $M+r(p+q)$ 的数操作, 由归纳假设, 此时有至少 $r-1$ 个数 $\le M+(r-1)(p+q)$. 在操作后增加一个小于等于 $M+r(p+q)$ 的数,再加上 $r-1$ 个不大于 $M+(r-1)(p+q)$ 的数,命题成立.

因此任意操作后这些数不大于 $M+n(p+q)$.

同理可证这些数在任意次操作后不小于 $m-n(p+q)$.

由平移不变性和对称性, 不妨设 $m-n(p+q)>0, p\ge q$.

考虑所有数的平方和, 一次操作平方和改变量为

$$(a+p)^2+(a-q)^2-2a^2=2(p-q)a+p^2+q^2\ge p^2+q^2\ \ (a>0),$$

而平方和不大于 $n(M+n(p+q))^2$. 从而有限步后操作结束, 此时 n 个数两两不同.

□

评注. 关键是要证明在任意次操作后所有数有界, 这样题中归纳要证的命题就是容易想到的, 后面再利用半不变量说明操作有限次即可.

1983.1 设有理数 x, y, z 满足:

$$x^3 + 3y^3 + 9z^3 - 9xyz = 0,$$

证明: $x = y = z = 0$.

证明. 由齐次性以及 x, y, z 均为有理数, 不妨设 x, y, z 均是整数.

如果 x, y, z 中有一个是0, 易见另外两个都是0, 从而 $x = y = z = 0$, 命题得证.

下面只用证方程无使 x, y, z 均非0的解(称这样的解为非平凡的).

事实上, 若这样的解存在, 取 (x_0, y_0, z_0) 是使 $|x| + |y| + |z|$ 最小的非平凡解, 由于 $3|3y_0^3 + 9z_0^3 - 9x_0y_0z_0$, 知 $3\,|x_0^3$, 故 $3 \mid x_0$.

可设 $x_0 = 3x_1, x_1 \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, 于是

$$y_0^3 + 3z_0^3 + 9x_0^3 - 9x_0y_0z_0 = 0$$

表明 (y_0, z_0, x_1) 也是一组非平凡解, 从而

$$|y_0| + |z_0| + |x_1| \le |x_0| + |y_0| + |z_0|$$

导出 $3\,|x_1| \le |x_1|$,但 $x_1 \ne 0$, 矛盾. 故原题得证. □

评注. 假设 $x, y, z \in \mathbb{Z}$ 就可以进行整除性的分析了. 在知道 $3|x$ 之后把 $\frac{x}{3}$ 设出来代入原方程, 化简得到方程与原方程形式一致, 于是递降法就顺理成章.

若注意到原式左边具有 $u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw$ 的形式, 将其分解为 $\frac{1}{2}(u+v+w)((u-v)^2 + (v-w)^2 + (w-u)^2)$, 接着再利用 $1, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{9}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关, 亦可导出结论成立.

1983.2 已知非负实系数多项式 $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + 1$ 有 n 个实根. 证明: $f(2) \ge 3^n$.

证明. 设 $x_1, \ldots, x_n$ 是 f 的 n 个实根,注意到当 $x \ge 0$ 时 $f(x) > 0$, 故每个 x_i 均小于零. 因此 $y_i = -x_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

由韦达定理, $\prod_{i=1}^{n} y_i = 1$. 进而由 Hölder 不等式可知

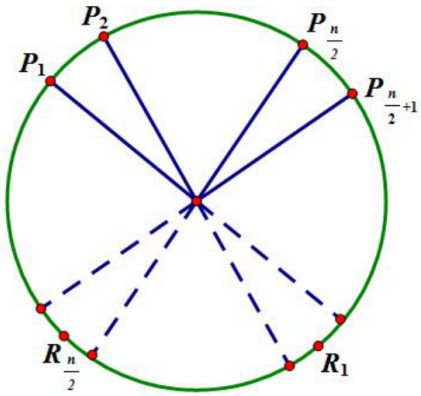
$$\begin{aligned} f(2) &= \prod_{i=1}^{n}(2-x_i) \\ &= \prod_{i=1}^{n}(1+1+y_i) \\ &\geq \left(1+1+\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} y_i}\right)^n \\ &= 3^n. \end{aligned}$$

□

评注. 结论中 n 次方的形式促使我们利用 f 关于根的表示进行估计, 于是 $a_i \geq 0$ 的性质就可自然地弱化为 f 的每个实根均为负数, 之后用 Hölder 不等式即可完成证明.

1983.3 给定平面上无三点共线的 $n+1$ 个点 $P_1, P_2, \ldots, P_n, Q$. 已知对任意两个不同的点 P_i, P_j, 均存在异于这两点的点 P_k 使点 Q 在 $\triangle P_iP_jP_k$ 内.

证明: n 是奇数.



证明. 用反证法, 假设 n 是偶数.

注意到, 将点 P_i 移动到射线 QP_i (除去端点)上的任一点时, Q 是否在 $\triangle P_iP_jP_k$ 内具有不变性, 故不妨设 $P_1, \ldots, P_n$ 顺次排列在以 Q 为圆心的圆 ω上.

不妨设含有 P_2 的弧 $P_1P_{\frac{n}{2}+1}$ 是劣弧. 条件表明, 对任意 $1 \leq i \leq \frac{n}{2}$, (不含其它 P_j 的)弧 P_iP_{i+1} 上至少含有一个 P_k 的对径点 P_k', 也即 $P_k \in P_i'P_{i+1}'$, 记这 P_k

为 R_i.

于是由位置关系易见 $P_1, P_2, \ldots, P_{\frac{n}{2}+1}$, $R_1, R_2, \ldots, R_{\frac{n}{2}}$ 是 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ 中的 $\left(\frac{n}{2}+1\right)+\frac{n}{2}=n+1$ 个互异点, 矛盾, 证毕. □

评注. 将"点 Q 在 $\triangle P_iP_jP_k$"进行转化即可得到便于思考的清晰的结构, 之后的推理不难.

1982.1 空间中的一个正方体的一个面的 4 个顶点均是整点, 且该正方体的体积为正整数. 证明: 剩下的 4 个点也是整点.

证明. 设该正方体的边长为 d, 显然 $d^2 \in \mathbb{Z}$, 由条件知 $d^3 \in \mathbb{Z}$, 故 $d \in \mathbb{Z}$.

下面只用证明: 设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}^3, \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}=0, |\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=d \in \mathbb{N}^*$, 则与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 均垂直且模长为 d 的向量 $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ 也是整向量, 即 $\boldsymbol{c} \in \mathbb{Z}^3$.

事实上, $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$ 与 $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$ 的向量积

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}=\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)$$

与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 均垂直, 其模长为 $|\boldsymbol{a}| \cdot|\boldsymbol{b}| \cdot \sin \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=d^2$, 因此 $\boldsymbol{c}=\pm \frac{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}}{d}$.

我们只用证明 d 整除 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 的每一个分量.

事实上, 由

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2=d^2 \tag{1}$$

$$x_2^2+y_2^2+z_2^2=d^2 \tag{2}$$

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0 \tag{3}$$

可知

$$\left(x_1x_2+y_1y_2\right)^2=\left(z_1z_2\right)^2=\left(x_1^2+y_1^2-d^2\right)\left(x_2^2+y_2^2-d^2\right).$$

由这可见 d^2 整除 $\left(x_1y_2-x_2y_1\right)^2$, 即 $d \left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right.$. 同理 d 也整除 $a \times b$ 的另外两个分量, 证毕. □

评注. 不了解向量积的话也可以直接列方程将 $\boldsymbol{c}$ 的各个分量解出来, 之后 $d \left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right.$ 的证明只需用三个式子 (1), (2), (3) 消去 z_1, z_2 之后即可得到.

1982.2 证明: 对任意正整数 $k>2$, 存在无穷多个正整数 n 满足 $n, n+1, \ldots, n+k-1$ 的最小公倍数大于 $n+1, n+2, \ldots, n+k$ 的最小公倍数.

证明. 记 $t=k-1>1$, $M=[n+1,n+2,\ldots,n+t]$. 取 $n=l\cdot t!-1$, $l\in\mathbb{N}^*$, 于是 $(n,n+i)=(n,i)=1$, $1\le i\le t$. 因此 $[n,n+1,\ldots,n+t]=n\cdot[n+1,\ldots,n+t]=n\cdot M$.

注意到, $t\,|[n+1,n+t+1]$, 故 $t\,|(M,n+t+1)$, 于是

$$\begin{aligned}[n+1,n+2,\ldots,n+t+1]&=[M,n+t+1]\\&=\frac{M\cdot(n+t+1)}{(M,n+t+1)}\\&\le\frac{M\cdot(n+t+1)}{t}.\end{aligned}$$

所以

$$\frac{[n,\ldots,n+t]}{[n+1,\ldots,n+t+1]}\ge\frac{tn}{n+t+1},$$

当 n 充分大时, 右边大于1,即证. □

评注. 这里我们的取法实际上只用保证:

1. $(n,n+i)=1$, $1\le i\le k-1$;
2. $(n+k,(n+1)\cdots(n+k-1))>1$

即可.

1982.3 对所有的整数用 100 种颜色染色, 使得每种颜色都用到.对于长度相同且端点均为整数的两个区间, 比如区间 $[a,b]$ 和 $[c,d]$, 若 a 与 c, b 与 d 分别染有相同的颜色, 则整个区间 $[a,b]$ 与 $[c,d]$ 染色对应相同(即对整数 x, 当 $0\le x\le b-a$ 时, 整数 $a+x$ 与 $c+x$ 染色是相同的).

证明: -1982 和 1982 不同色.

证明. 用 $c(x)$ 表示数 x 的染色.

对任意连续101个整数 $t,t+1,\ldots,t+100$, 由抽屉原理,一定存在其中两个数 $x,x+r$, 满足 $c(x)=c(x+r)$.

对每连续101个正整数作上述考虑, 由 $1\le r\le 100$ 知某个 r 被取出无穷多次, 设对应于此 r 的 x 依次为 $x_1,x_2,\cdots$.于是对每个 $i>1$, 考虑区间 $[x_1,x_i],[x_1+r,x_i+r]$, 由 $c(x_1)=c(x_1+r)$, $c(x_i)=c(x_i+r)$ 及条件知 $c(j)=c(j+r)$, $x_1\le j\le x_i$. $(*)$

从而 $c(j)=c(j+r)$ 对任意 $j\ge x_1$ 成立.

同理存在 $r'\in\{1,2,\ldots,100\}$ 与 x_i, 使得 $c(j)=c(j+r)$ 对任意 $j\le x_i$ 成立.

记 $M=rr'$, 于是 $c(j)=c(j+M)$, 当 $j\le x_i-M$ 或 $j\ge x_1$ 时成立.

同前述类似可知对 $\mathbb{Z}$ 的染色是模 M 进行的(即若 $m\equiv n\,(\mathrm{mod}\,M)$ 则 $c(m)=c(n)$). 取最小的 $D\in\mathbb{N}^*$ 使 $\mathbb{Z}$ 的染色是模 D 进行的, 若 $D\ge 101$, 在 $1,2,\ldots,101$ 中有 $i<j$ 染色相同, 于是 $c(kD+i)=c(kD+j)$ 对任意 $k\in\mathbb{Z}$ 成立. 从而类似知 $\mathbb{Z}$ 的染色是模 $(j-i)$ 进行的, 但 $j-i\le 100<D$, 矛盾, 因此 $D\le 100$.

又因为每种颜色都被用到, 故 $D=100$. 因此任意两个数同色当且仅当它们模 100 同余, 由 $100\nmid 1982-(-1982)$ 知 1982 与 -1982 不同色, 证毕. □

评注. 显然题中的染色是平移不变的, 只用考虑差 $1982-(-1982)$ 与 100 的联系, 并且注意到保证 $1,2,\cdots,100$ 两两互异后 mod100 周期染色是一种满足条件的染法.这些都促使我们证明染色的模周期性.

利用抽屉原理看出结构 $(*)$ 之后可知在 $\mathbb{Z}$ 的某一侧染色是模周期的, 同理另一侧也是如此, 结合这两点再用一次条件可知染色在 $\mathbb{Z}$ 上是模周期的.进而利用两个近距离同色数反复出现导出此模可相当小, 这就给出了条件的完整的刻画.本题难度中等.

1981.1 证明: 对平面上任意 5 点 A,B,P,Q,R 有

$$AB+PQ+QR+RP\le AP+AQ+AR+BP+BQ+BR.$$

证明. P,Q,R 中有至少两点在 AB 一侧(包括直线 AB 上), 不妨设为 P,Q.此时容易知道线段 AP 与 BQ 有交点或线段 AQ 与 BP 有交点,不妨假设线段 AP 与 BQ 相交, U 是其一个交点.

则由三角不等式可知

$$AP+BQ=QU+BU+AU+UP=AU+UB+QU+UP\ge AB+PQ,$$

$$AQ+AR\ge QR, BR+BP\ge PR,$$

从而

$$AB+PQ+QR+RP\le AP+AQ+AR+BP+BQ+BR.$$ □

评注. 若单纯使用三角不等式发现右边还放不出左边, 这时想到如果有凸四边形就能有更好的放缩, 而利用 P,Q,R 这 3 点中一定有 2 点在 AB 一侧就得到这样的结构.

1981.2 已知 n 为给定大于 2 的偶数, 给 $n\times n$ 的方格表的单元格用 $\frac{1}{2}n^2$ 种颜色染色, 每种颜色恰染 2 个方格.

证明: 可以在 n 个不同颜色的方格中放置 n 个车, 使得任两个车不同行也不同列.

证明. 将第 i 行第 j 列的方格用 (i,j) 表示.

对任意一个从 $\{1,\ldots,n\}$ 到自身的双射 S, 取方格 $(i,S(i)),i=1,\ldots,n$, 则这 n 个方格两两不同行也不同列. 这样的选取方法数共有 $n!$ 种.

假设命题不成立, 那么每一种 S 的选取都会使得 $(1,S(1)),\ldots,(n,S(n))$ 中至少有2个同色格, 将这种颜色与 S 配对.

从而有一种颜色出现在至少 $\frac{n!}{n^2/2}=\frac{2}{n}((n-1)!)$ 个对子中.

然而包含该颜色2个方格的双射 S 的选法数至多为 $(n-2)!$,这导致

$$\frac{2}{n}((n-1)!)\leq(n-2)!,$$

即 $n\leq 2$, 矛盾!

从而假设不成立, 命题得证. □

评注. 计数办法可以绕开结构刻画的困难, 在其它思想耗尽时若想到或许会有奇效.本题还可以用归纳法证明, 上面的解法来自AoPS.

1981.3 对正整数 n,用 $r(n)$ 表示 n 被 $1,2,\ldots,n$ 除的余数之和. 证明: $r(n)=r(n-1)$ 对无穷多个正整数 n 成立.

证明. 设 $f(n,k)$ 表示 n 除以 k 的余数, $0\leq f(n,k)<k$, 则

$$r(n)=\sum_{i=1}^{n}f(n,i).$$

注意到

$$f(n+1,i)-f(n,i)=\begin{cases}1,\ i\nmid n+1,\\ 1-i,\ i\mid n+1.\end{cases}$$

故

$$\begin{aligned}r(n+1)-r(n)&=\sum_{i=1}^{n}(f(n+1,i)-f(n,i))\\&=n-\sum_{\substack{d\mid n+1\\ d\neq n+1}}d.\end{aligned}$$

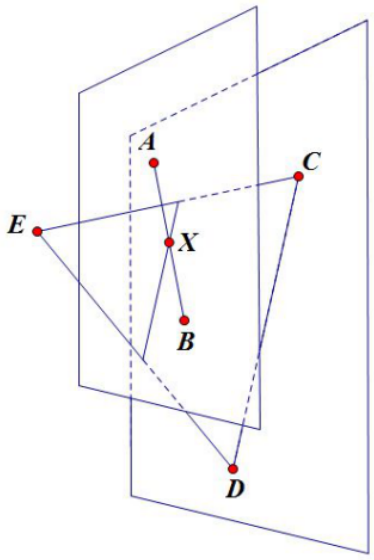
取 $n+1=2^{\alpha},\alpha\in\mathbb{N}^*$ 则

$$\sum_{\substack{d\mid n+1\\ d\neq n+1}}d=1+2+\cdots+2^{\alpha-1}=2^{\alpha}-1=n,$$

从而 $r(n+1)=r(n)$, 命题得证. □

评注. 考虑差量并化简形式, 最后即要使 $\sigma(n+1)=2n+1$ (其中 σ 是因数和函数),容易看到 $n+1$ 为2的幂满足该式. 而求所有的 n 使 $\sigma(n+1)=2n+1$ 则是一个未解决的问题.

1980.1 将空间中的所有点用五种颜色染色,每种颜色都使用. 证明:存在一个平面包含四个不同颜色的点.



证明. 用反证法, 设五种颜色为 a,b,c,d,e.假设任意平面上至多有三种颜色的点.

若某条直线 l 上至少有三种颜色的点, 任取第四种颜色的点 v, 则存在一个平面包含 l 和 v, 其上至少四种颜色的点, 与假设矛盾.

因此任意直线上至多有两种颜色的点. 对 a,b,c,d 每种颜色, 分别取一个相应颜色的点 A,B,C,D, 则 A,B,C,D 不共面, 从而直线 AB 与 CD 既不相交, 也不平行.

不难知道唯一存在平面 $\Gamma_1\supset AB,\Gamma_2\supset CD$, $\Gamma_1\neq\Gamma_2$, 使得 $\Gamma_1\parallel\Gamma_2$. 因存在 e 色的点, 且 e 色的点不可能全在 Γ_1 上又同时全在 Γ_2 上, 故不妨设存在一个 e 色的点 E, $E\notin\Gamma_2$.

从而平面 $CDE\neq$平面 Γ_2, 因 Γ_2 是唯一的过 CD 且与 AB 平行的平面, 故平面 CDE 不平行于 AB, 即这两者必有交点 X. 因 $X\in AB$, 故由前面所证, X 为 a 色或 b 色, 导致平面 CDE 上有至少四种颜色的点, 矛盾, 结论得证. □

评注. 对任三点均存在一个平面包含这三点, 因此在反证假设下三个异色点所在平面仅有三种颜色.这是很强的条件, 因为这会使有交集的平面染色十分受

限.对直线也有类似的考量.

1980.2 给定大于 1 的奇数 n.证明:存在正整数 x,y 满足

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

的充分必要条件是 n 有形如 $4k-1$ 的素因子.

证明. 存在正整数 x,y 使得

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

$\Leftrightarrow$存在正整数 x,y 使得 $x=\frac{ny}{4y-n}$

$\Leftrightarrow$存在正整数 $y>\frac{n}{4}$ 使 $4y-n\mid ny$

$\Leftrightarrow$存在正整数 $y>\frac{n}{4}$ 使 $4y-n\mid(4ny-n(4y-n))=n^2$ (因为 $4y-n$ 为奇数).

当 n 有素因子 $p=4k-1\,(k\in\mathbb{N}^*)$ 时, 令 $y=\frac{p+1}{4}n>\frac{n}{4}$, 则 $y\in\mathbb{N}^*$, 且

$$4y-n=(p+1)n-n=pn$$

是 n^2 的因数.

当存在正整数 $y>\frac{n}{4}$ 使 $4y-n\mid n^2$ 时, 注意到任意模 4 余 3 的正整数必有模 4 余 3 的素因子(这由反证法易证). 因此若 $n\equiv 3\,(\mathrm{mod}4)$, 则 n 有 $4k-1$ 型素因子; 而若 $n\equiv 1\,(\mathrm{mod}4)$, 则 $4y-n\equiv 3\,(\mathrm{mod}4)$, 知 $4y-n$ 有 $4k-1$ 型素因子 p. 由 $4y-n\mid n^2$ 知 $p\mid n^2$, 进而 $p\mid n$, 结论得证. □

评注. 将 x 解出后问题等价转化为了含 y,n 的式子之间的整除关系, 模4余3的数必有模4余3的(素)因子是之后分析用到的关键事实.

1980.3 一个国家有2个网球俱乐部,其中分别有1000和1001个成员.所有成员实力两两不同, 且已知各俱乐部内部成员实力的排名. 每场比赛选取两名成员对打, 实力强的人总是打败实力弱的人. 证明: 可以适当安排11场比赛, 根据最终结果确定所有人中实力第1001强的人(后进行的比赛可以根据已进行的比赛结果进行安排).

证明. 先证明如下引理: 对任意 $n\in\mathbb{N}$, 设两个网球俱乐部各有 2^n+1 个成员. 已知各俱乐部内部成员可以分别按实力降序排为 $a_0,a_1,\ldots,a_{2^n}$ 和 $b_0,b_1,\ldots,b_{2^n}$, 且 a_0 强于 b_{2^n}, b_0 强于 a_{2^n}. 则可安排 $n+1$ 场比赛确定所有人中实力第 2^n+2 强的人.

对 n 归纳, $n=0$ 时结论显然. 假设 $n-1$ 时成立, 考虑 n 的情形.

安排 $a_{2^{n-1}}$ 与 $b_{2^{n-1}}$ 比赛. 不妨设 $a_{2^{n-1}}$ 胜, 则对 $i=1,\ldots,2^{n-1}$, 有

$$a_0,a_1,\ldots,a_{2^{n-1}};\ b_0,b_1,\ldots,b_{2^{n-1}}$$

实力均强于 $b_{2^{n-1}+i}$, 从而 $b_{2^{n-1}+i}$ 的实力不可能处在前 2^n+2 强. 同时

$$a_{2^{n-1}},a_{2^{n-1}+1},\ldots,a_{2^n};\ b_{2^{n-1}},b_{2^{n-1}+1},\ldots,b_{2^n}$$

实力均弱于 a_{i-1}, 从而 a_{i-1} 的实力不可能处在后 2^n+2 强.

由上述不难看出所有人中实力第 2^n+2 强的人一定是

$$a_{2^{n-1}},\ldots,a_{2^n};\ b_0,\ldots,b_{2^{n-1}}$$

中第 $2^{n-1}+2$ 强的人. 又因为 $a_{2^{n-1}}$ 强于 $b_{2^{n-1}}$, a_{2^n} 弱于 b_0, 故再对这 2^n+2 个人应用 $n-1$ 时的归纳假设即可.

回到原题, 在有1001人的队伍内加入1名比所有人都强的选手和23名比所有人都弱的选手, 在有1000人的队伍内加入24名比所有人都强的选手和1名比所有人都弱的选手. 对这两组(各1025人)应用引理 $n=10$ 的情况, 可找出其中第1026强的选手. 此人必为原来2001人中第1001强的, 结论得证. □

评注. 不难想到2001是由 2^{11} 得来, 因此我们想到归纳法,且希望每场比赛均可排除掉一半"第 2^n+2 强者"的候选人, 要点在于最大化一场比赛所带来的信息,这可通过让强于胜者和弱于败者的人均尽量多实现,

1979.1 已知一个凸的棱锥的底面有奇数条边,其侧棱长全相等,相邻侧面之间的夹角也全相等.证明:其底面一定是正多边形.

证明. 设所说棱锥的顶点为 P,底面凸多边形为 $A_1A_2\cdots A_n$, 记 $l=PA_1=\cdots=PA_n$. 设 P 在底面上射影为 H, $PH=h$, 则由勾股定理知

$$HA_i=\sqrt{PA_i^2-PH^2}=\sqrt{l^2-h^2}\ (1\le i\le n)$$

与 i 无关, 设该值为 r.

用 $|A-l-B|$ 表示二面角 $A-l-B$ 的大小. 则由已知, 对任意的 i 均有

$$|A_{i-1}-PA_i-A_{i+1}|=|A_{i+2}-PA_{i+1}-A_i|,$$

又由对称性显然

$$|H-PA_i-A_{i+1}|=|H-PA_{i+1}-A_i|,$$

两式相减得

$$|A_{i-1}-PA_i-H|=|A_{i+2}-PA_{i+1}-H|.$$

这里及以下, 下标均模 n 理解.

设线段 $A_{i-1}A_i$ 中点为 M, H 在 PA_i, PM 上射影分别为 U, V, 则有

$$PU \cdot PA_i = h^2 = PV \cdot PM,$$

故 $\triangle PUV \sim \triangle PMA_i$. 由 $PM \perp MA_i$ 知 $PU \perp UV$, 因此 $|A_{i-1} - PA_i - H| = \angle HUV$.

易知 $HV \perp$ 平面 $PA_{i-1}A_i$, 而 $UV \subset$平面 $PA_{i-1}A_i$, 故 $HV \perp UV$.

注意到

$$HU = \frac{hr}{l},\ HV = \frac{h \cdot MH}{PM},$$

故

$$\begin{aligned}\cos^2 \angle HUV = \frac{HV^2}{HU^2} = \frac{MH^2 \cdot l^2}{PM^2 \cdot r^2} &= \frac{r^2 - \frac{A_iA_{i-1}^2}{4}}{l^2 - \frac{A_iA_{i-1}^2}{4}} \cdot \frac{l^2}{r^2} \\ &= \left(\frac{r^2 - l^2}{l^2 - \frac{A_iA_{i-1}^2}{4}} + 1\right) \cdot \frac{l^2}{r^2}.\end{aligned}$$

同理

$$\cos^2 |A_{i+2} - PA_{i+1} - H| = \left(\frac{r^2 - l^2}{l^2 - \frac{A_{i+2}A_{i+1}^2}{4}} + 1\right) \cdot \frac{l^2}{r^2}.$$

显然 $r \neq l$, 故 $A_iA_{i-1} = A_{i+2}A_{i+1}$.

因 n 是奇数, 故由此推理得 $A_iA_{i-1}\,(1 \leq i \leq n)$ 全相等. 又因为所有的 A_i 都在以 H 为圆心, r 为半径的圆上,故底面为正 n 边形. □

评注. 侧棱相等的多面体底面顶点一定共圆, 这表明相邻面之间夹角仅取决于对应底面弦长.我们要做的便是用弦长表示这夹角, 这其中用到了处理二面角的常用辅助线和计算办法.当 n 为偶数时, 由上述做法知底面相间的弦长相等, 这样的棱锥当然满足相邻面夹角相等.

1979.2 设 f 是定义在实数集上的实值函数, 满足对任意实数 x, y 均成立

$$f(x) \leq x,\ f(x+y) \leq f(x) + f(y).$$

证明: $f(x) = x$ 对所有实数 x 成立.

证明. 令 $g(x) = x - f(x)$, 则 $g(x) \geq 0$, 且对任意实数 x, y, 有

$$(x + y - g(x+y)) \leq (x - g(x)) + (y - g(y)),$$

即

$$g(x+y) \geq g(x) + g(y). \qquad (*)$$

在 $(*)$ 中以 $x+y$ 代 x, 得

$$g(x+2y) \geq g(x+y)+g(y) \geq g(x)+2g(y),$$

令 $x=-y$, 则

$$g(y) \geq g(-y)+2g(y),$$

即 $g(y)+g(-y) \leq 0$. 又 $g(y), g(-y) \geq 0$, 故必有 $g(y)=g(-y)=0$.

从而 $f(y)=y-g(y)=y$, 结论得证. □

评注. 由 $(*)$ 可以归纳出 $g(x+ny) \geq g(x)+ng(y)(n \geq 1)$,改写作 $g(x) \geq g(x-ny)+ng(y)$ 后可立即推得 $g(y)=0$. $g(x)$ 的引入有利于直观思考.

1979.3 在一个 $n \times n$ 表格的每个单元格内填入一个数字, 使得任两行均不相同(两行相同是指这两行中同列两格填数总是相同).

证明: 可以去掉一列使得剩下的表格仍满足任意两行不相同.

证明. 考虑图 $G=(V,E)$, 其中 $V=\{1,2,\ldots,n\}$.

假设结论不然, 对任意 $1 \leq j \leq n$, 去掉第 j 列, 表中都有两行相同, 取其中两行, 设为第 i_1, i_2 行.则在 G 中将 i_1 与 i_2 之间连一条边, 并在这条边上标记数 j.

我们说明任两行之间至多连一次边. 若不然, 则存在 $1 \leq i_1 < i_2 \leq n$, $1 \leq j_1 < j_2 \leq n$ 使得去掉第 j_k 列时, 第 i_1, i_2 行相同 $(k=1,2)$.

用 a_{ij} 表第 i 行第 j 列的填数, 因去掉第 j_1 列, 第 i_1, i_2 行相同, 故 $a_{i_1 j}=a_{i_2 j}\,(j \neq j_1)$. 同理 $a_{i_1 j}=a_{i_2 j}\,(j \neq j_2)$, 故 $a_{i_1 j}=a_{i_2 j}\,(1 \leq j \leq n)$, 导致起初第 i_1 行与第 i_2 行相同, 矛盾!

因此 G 恰好有 n 条边, 每条边恰被标记一数, n 个数互异, 因此 G 中有圈, 设为 $i_1 i_2 \cdots i_m$, 边 $i_{k-1} i_k$ 的标数为 $j_k\,(1 \leq k \leq m, i_0=i_m)$.

因 $j_k \neq j_1\,(2 \leq k \leq m)$, 从而由行 i_k 与行 i_{k-1} 恰在第 j_k 列不同知 $a_{i_k, j_1}=a_{i_{k-1}, j_1}$. 递归得 $a_{i_m, j_1}=a_{i_1, j_1}$, 与 j_1 定义矛盾!

□

评注. 这是一个经典的问题, 仅在一位上不同的两行之间可以看作有某种对合映射关系,考虑图 G 相当于直观分析映射圈. 上述解答中每个 j 仅选一条边恰好够用,且避免了有边标号相同的麻烦.

1978.1 给定有理数 a, b, 证明:若关于 x, y 的方程 $ax^2+by^2=1$ 有一组有理

数解,则它无穷多组有理数解.

证明. 设 $ax^2+by^2=1$ 的一组有理数解为 (x_0,y_0),不妨设 $a\neq 0, x_0\neq 0$.

对 $\delta\in\mathbb{Q}, a\delta^2+b\neq 0$, 考虑有理数组

$$\left(x_0-\frac{2\delta\left(a\delta x_0+by_0\right)}{a\delta^2+b}, y_0-\frac{2\left(a\delta x_0+by_0\right)}{a\delta^2+b}\right).$$

注意到

$$\begin{aligned}
&a\left(x_0-\frac{2\delta\left(a\delta x_0+by_0\right)}{a\delta^2+b}\right)^2+b\left(y_0-\frac{2\left(a\delta x_0+by_0\right)}{a\delta^2+b}\right)^2\\
=&\ ax_0^2+by_0^2+\frac{4\left(a\delta x_0+by_0\right)^2}{\left(a\delta^2+b\right)^2}\cdot\left(a\delta^2+b\right)-4\frac{\left(a\delta x_0+by_0\right)}{\left(a\delta^2+b\right)}\cdot\left(a\delta x_0+by_0\right)\\
=&\ ax_0^2+by_0^2\\
=&\ 1.
\end{aligned}$$

显然在 δ取遍 $\{\delta\in\mathbb{Q}\mid a\delta^2+b\neq 0\}$ 时, $\frac{2\delta(a\delta x_0+by_0)}{a\delta^2+b}$ 可取无穷多个值, 从而原方程有无穷多组有理数解. □

评注. 我们希望在原方程解的基础上进行平移得到新的解,平移的量满足一个齐次二次方程. 此时只要令 x,y 平移的量成比例, 就能得到一次方程, 可以容易地解出平移量.

1978.2 对一个凸 n 边形的顶点进行染色, 使得任意两个相邻顶点不同色. 证明: 若 n 是奇数,则该多边形可以用(不相交于内点)的对角线剖分成 $n-2$ 个三角形, 使得没有一条对角线的两个端点同色.

证明. 对 n 归纳 $n=3$ 时结论平凡. 假设对小于 $n(n\geq 5)$ 的奇数结论成立, 对奇数 n, 设该多边形为 $P_1P_2\cdots P_n$.

先证明存在 i 使 P_i,P_{i+2} 异色. 这里及以下, 下标模 n 考虑.

事实上, 若对任意 i,P_i 均与 P_{i+2} 同色, 则 P_{2k+1} 与 P_1 同色, $k=1,2,\ldots$. 而 $2k+1(k=1,2,\ldots)$取遍模 n 完系, 从而 $P_1,P_2,\ldots,P_n$ 同色, 矛盾.

于是不妨设 P_1,P_{n-1} 异色. 进一步不妨设 P_1 为红色, P_{n-1} 为蓝色, P_n 为白色.

若 P_1 与 P_{n-2} 异色, 则取对角线 P_1P_{n-1},P_1P_{n-2}. 然后对 $P_1P_2\cdots P_{n-2}$ 应用归纳假设得到若干条对角线,再加上 P_1P_{n-1},P_1P_{n-2} 即可.

若 P_{n-1} 与 P_2 异色, 同上可知结论成立.

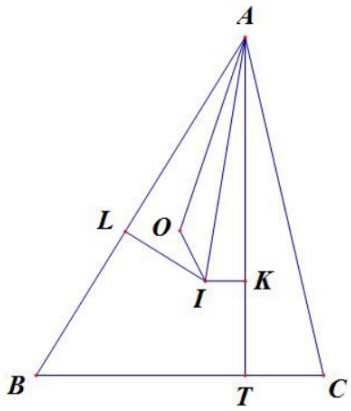
若 P_1 与 P_{n-2} 均为红色, P_{n-1} 与 P_2 均为蓝色, 则 P_n 与 P_2,P_{n-2} 异色. 对 $P_nP_2\cdots P_{n-2}$ 应用归纳假设得到若干对角线满足要求, 再加上对角线 P_nP_2,

P_nP_{n-2} 即可.

从而 n 时结论成立.命题即证. □

评注. 关于剖分的问题归纳法是一个好的选择, 这里注意只要去掉 2 个顶点、增加 2 条线后保持条件即可.

1978.3 一个三角形的内切圆半径为 r,外接圆半径为 R,最长的高线长度为 H. 证明: 若该三角形是非钝角三角形, 则 $H \geq r+R$, 并求等号成立条件.



证明. 设该三角形的三个顶点分别为 A,B,C, 不妨设 $\angle A \leq \angle B \leq \angle C$. 如果 $\triangle ABC$ 是等边三角形, 显然 $H=r+R$, 下设 $\triangle ABC$ 不是等边三角形. 设 $\triangle ABC$ 的内心为 I, 外心为 O, 则 O,I 两点不重合.

设 $AT \perp BC$ 于点 T, $IL \perp AB$ 于 L, $IK \perp AT$ 于 K.

显然 O 在 $\angle BAI$ 内, 结合 IB 到 AB 的射影长为 $\frac{AB+BC-AC}{2} \leq \frac{1}{2}AB$, 可知 O 在 $\triangle ALI$ 内部(或边界), 因此 $\angle AOI \geq 90^\circ$.注意到 $\angle OAI = \angle IAK$, 故

$$\begin{aligned} AO &\leq AI\cos\angle OAI \\ &= AI\cos\angle IAK \\ &= AK. \end{aligned}$$

因此 $R+r \leq AK+KT = AH$, 等号成立时 $AO \perp OI$,故(因 O 在 $\triangle ALI$ 内部或边界) $O \equiv L$.

由 O 在 AB 上可知 $\angle C = 90^\circ$,进而得出 $L \equiv O$ 是边 AB 中点, 故 $AC=BC$, 因此 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形.

综上所述 $H \geq r+R$, 等号成立当且仅当 $\triangle ABC$ 是等边三角形或等腰直角三角形. □

评注. 为了证明 $H \geq r+R$, 我们在图形中构造出 $H-r$, 然后讨论 O 的位

置以得到 OA 与 AK 的长度关系.

1977.1 证明:不存在整数 n, 使得 n^4+4^n 是大于 5 的素数.

证明. 只用证明对于整数 $n>1$, n^4+4^n 不是素数.

若 $2\mid n$, 则 n^4+4^n 有真因子2, 命题显然成立. 下设 $n=2k+1$, $k\in\mathbb{N}^*$, 于是

$$\begin{aligned}n^4+4^n&=n^4+4\cdot 4^{2k}\\&=\left(n^2+2^{2k+1}\right)^2-\left(2^{k+1}n\right)^2\\&=\left(n^2+2^{k+1}n+2^{2k+1}\right)\left(n^2-2^{k+1}n+2^{2k+1}\right).\end{aligned}$$

注意到 $1<\left(n-2^k\right)^2+2^{2k}=n^2-2^{k+1}n+2^{2k+1}<n^4+4^n$, 故 $n^2-2^{k+1}n+2^{2k+1}$ 是 n^4+4^n 的真因子, 命题得证. □

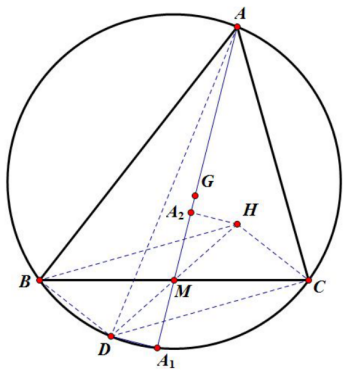
评注. 这里我们证明 $n^4+4^n(2\nmid n)$ 不是素数是基于等式

$$m^4+4k^4=\left(m^2+2k^2-2mk\right)\left(m^2+2k^2+2mk\right)$$

所给出的分解.

1977.2 设 $\triangle ABC$ 垂心为 H, 从 A 点引出的中线与其外接圆再交于点 A_1,设 A_2 是 A_1 关于边 BC 中点的对称点. 类似定义 B_2,C_2.

证明: H,A_2,B_2,C_2 四点共圆.



证明. 注意 AA_1,BB_1,CC_1 相交于 $\triangle ABC$ 的重心 G, 我们只要证明 GH 是 $\odot(A_2B_2C_2)$ 的直径, 这只用证明 $A_2H\perp GA_2$.

设 BC 中点为 M, A 关于 $\odot(ABC)$ 的对径点为 D,则由 $DC\perp AC$, $BH\perp AC$ 知 $DC\parallel BH$. 同理 $DB\parallel CH$, 故 $HBDC$ 是平行四边形.

由此可知 H,M,D 共线且 $HM=MD$. 又 $A_2M=MA_1$, 故 $A_2H\parallel DA_1$.

因 $DA_1\perp A_1A$, 故 $A_2H\perp A_1A$, 此即 $A_2H\perp GA_2$, 证毕.

□

评注. 重心 G 在这里作为圆上第五点, 将熟知结构联系.一般地从一点引出三条线段, 要求证明所得四点共圆时, 假如不引入其它圆上点, 则不容易推出关于角度的性质.

2006 年集训队第 5 题是本题的推广(AA_1、BB_1、CC_1 交于 $\triangle ABC$ 内任意一点, 结论都成立).

1977.3 有 3 所学校各均有 n 个学生, 每个学生认识其它各学校的总共 $n+1$ 个人.

证明:存在 3 个来自不同学校的学生相互认识.

证明. 设三个学校分别为 A, B, C, 对任意 $X \in \{A, B, C\}$ 以及不在 X 中的一个学生 p, 将 p 在 X 中认识的人数记为 $d_X(p)$. 设

$$m = \max_{\substack{X \in \{A,B,C\} \\ p \notin X}} \{d_X(p)\},$$

并不妨设有 $p \in C$, 使得 $d_A(p) = m$.

于是 $d_B(p) = n+1-m \geq n+1-n \geq 1$, 从而 p 认识 B 中的一个人 q.

我们证明必存在 $r \in A$, 使得 p, q 均认识 r. 若不然, 则 q 不认识任意一个 p 在 A 中认识的人, 导致

$$d_A(q) \leq n - d_A(p) = n - m.$$

进而 $d_C(q) = n+1-d_A(q) \geq n+1-(n-m) = m+1$,与 m 的最大性矛盾! □

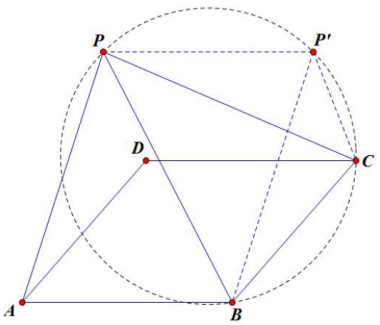
评注. 这是一个经典的问题. 事实上在反证假设下进行推理, 可发现对任意 $p \in C, q \in B, p, q$ 相认识, 都有 $d_C(q) > d_A(p)$. 这就引出了解答中较为隐蔽的极端量的选取.

1976.1 设平行四边 $ABCD$ 外一点 P 满足 $\angle PAB = \angle PCB$,且 A, C 在 PB 异侧. 证明: $\angle APB = \angle DPC$.

证明. 如图所示, 过点 P 作 CD 平行线, 过点 C 作 DP 平行线, 两线交于点 P', 则 $PP'CD$ 为平行四边形. 故 $PP' \parallel CD \parallel AB, PP' = CD = AB$, 则 $PP'BA$ 也是平行四边形.

从而 $\angle PP'B = \angle PAB = \angle PCB$.

而由条件易知 D 应在 $BPCA$ 内部, 从而 P', C 在 BP 同侧, 知 P, P', C, B



四点共圆. 故

$$\angle DPC = \angle P'CD = \angle P'BP = \angle BPA,$$

结论得证. □

评注. 这里我们构造了一个平行四边形来转化题中看似不好用的角度条件. 这是一个十分经典的问题.

1976.2 现有 $5^5\,(=3125)$ 张彩票, 每张彩票上写有 $1,2,3,\ldots,90$ 中的 5 个不同数字, 任意两张上写的 5 个数字不全相同, 且任意两张上都至少有一个相同的数字.

证明:可以找到 4 个数字使得每张彩票都含有这其中至少一个数字.

证明. 用反证法, 假设对任意 4 个数字都存在一张彩票不含这 4 个数字中的任何一个.任取一张彩票 L_1,由已知, 剩余的 5^5-1 张彩票都与 L_1 有相同数字.

从而存在 L_1 中的一个数字 a, a 在剩余的 5^5-1 张彩票中出现至少 $\left\lceil\frac{5^5-1}{5}\right\rceil = 5^4$ 次, 从而 a 在所有彩票中出现多于 5^4 次.

由假设, 存在一张彩票 L_2 不含 a,由于所有含 a 的彩票都与 L_2 有公共数字, 从而存在 L_2 中数字 b, b 在含 a 的多于 5^4 张彩票中出现多于 $\left\lceil\frac{5^4}{5}\right\rceil = 5^3$ 次.

由于存在彩票 L_3 不含 a,b,且含 a,b 的多于 5^3 张彩票与 L_2 均有公共数字, 从而存在 L_3 中数字 c, c 在含 a,b 的多于 5^3 张彩票中出现多于 $\left\lceil\frac{5^3}{5}\right\rceil = 5^2$ 次.

又存在彩票 L_4 不含 a,b,c,且含 a,b,c 的多于 5^2 张彩票与 L_4 均有公共数字.从而存在 L_4 中的数字 d, d 在含 a,b,c 的多于 5^2 张彩票中出现多于 $\left\lceil\frac{5^2}{5}\right\rceil = 5$ 次.

进一步因为存在彩票 L_5 不含 a,b,c,d,则存在 L_5 中的数字 e, e 在含 a,b,c,d 的多于5张彩票中出现多于 $\left\lceil\frac{5}{5}\right\rceil = 1$ 次.

由于 a,b,c,d,e 互异, 从而出现两张彩票相同,与条件矛盾. 从而假设不成立,原命题得证. □

评注. 条件中的 5^5 暗示着一种能够逐步选出元素的算法.不难看到, 一般地, 若有 n^n 张写 n 个数字的不同彩票满足任意两张上都有一个相同的数字,则可以找到 $n-1$ 个数字使得每张彩票都含有其中至少一个数字.

1976.3 证明:若对任意实数 x, 二次式 x^2+ax+b 均为正数,则该二次式可写成两个系数全是正数的多项式的商.

证明. 由条件知 $b>0$, $a^2<4b$. 注意到将 x 用 $ux\,(u>0)$ 代替不影响结论, 从而不妨设 $b=1$, 则 $a^2<4$. 故可设 $a=-2\cos\theta, \theta\in(0,\pi)$.

若 $a>0$, 则取 $x^2+ax+1=\frac{x^2+ax+1}{1}$ 即可.

若 $a=0$, 取 $x^2+1=\frac{x^3+x^2+x+1}{x+1}$ 即可.

下设 $a<0$, 则 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. 因此存在唯一的正整数 n 使得 $(1+n)\theta<\pi\le(2+n)\theta$, 则$\sin i\theta>0\ (1\le i\le n), \sin(n+2)\theta\le 0$. 注意到由$\sin j\theta+\sin(j+2)\theta=2\cos\theta\sin(j+1)\theta$可得

$$\begin{aligned}
&\left(x^2-2\cos\theta x+1\right)\left(\sin(n+1)\theta x^n+\sin n\theta x^{n-1}+\cdots+\sin\theta\right)\\
=&\sin(n+1)\theta x^{n+2}+\left(\sin n\theta-2\cos\theta\sin(n+1)\theta\right)x^{n+1}+\\
&\sum_{j=1}^{n-1}\left(\sin j\theta-2\cos\theta\sin(j+1)\theta+\sin(j+2)\theta\right)x^{j+1}+\\
&\left(\sin 2\theta-2\cos\theta\sin\theta\right)x+\sin\theta\\
=&\sin(n+1)\theta x^{n+2}-\sin(n+2)\theta x^{n+1}+\sin\theta.
\end{aligned}$$

这样我们已经把原二次式写成了两个系数均非负的多项式之商, 下面设法将其写成两个系数均为正数的多项式之商. 事实上, 我们有

$$\begin{aligned}
&\left(\sin(n+1)\theta x^{n+2}-\sin(n+2)\theta x^{n+1}+\sin\theta\right)\left(1+x+\cdots+x^{n+1}\right)\\
=&\sin\theta+\sin\theta x+\cdots+\sin\theta x^{n+1}+\sin(n+1)\theta x^{n+2}+\\
&\cdots+\sin(n+1)\theta x^{2(n+1)}+G(x),
\end{aligned}$$

其中 $G(x)=-\sin(n+2)\theta x^{n+1}\left(1+x+\cdots+x^{n+1}\right)$ 为非负系数多项式.

因此$x^2-2\cos\theta x+1$ 可以写成

$$\frac{\left(x^2-2\cos\theta x+1\right)\cdot\left(\sin(n+1)\theta x^n+\sin\theta x^{n-1}+\cdots+\sin\theta\right)\left(1+x+\cdots+x^{n+1}\right)}{\left(\sin(n+1)\theta x^n+\cdots+\sin\theta\right)\left(1+x+\cdots+x^{n+1}\right)},$$

由上述可知这是两个系数均为正数的多项式之商,即证. □

评注. 如果考虑 $\left(x^2-2\cos\theta x+1\right)\left(\sum\limits_{i=0}^{r}a_ix^i\right)$ 会发现系数类似一个二阶线性递推数列, 令其展开项系数除首尾均是 0 就可得到所有 a_i 的选取, 再将得到

的非负系数多项式适当乘上一个正系数多项式即可.

1975.1 已知 $a > c \geq 0, b > 0$, 试将等式

$$ab^2\left(\frac{1}{(a+c)^2}+\frac{1}{(a-c)^2}\right)=a-b$$

化成更简洁的形式.

解. 将上式整理成关于 b 的二次方程

$$b^2\left(\frac{2a(a^2+c^2)}{(a^2-c^2)^2}\right)+b-a=0,$$

解该二次方程可得

$$b=\frac{-1\pm\frac{3a^2+c^2}{a^2-c^2}}{\frac{4a(a^2+c^2)}{(a^2-c^2)^2}}.$$

又 $b > 0$, $a^2 > c^2, a > 0$, 故

$$b=\frac{-1+\frac{3a^2+c^2}{a^2-c^2}}{\frac{4a(a^2+c^2)}{(a^2-c^2)^2}}=\frac{a^2-c^2}{2a},$$

即 $c^2+2ab=a^2$. □

1975.2 证明或否定以下命题:任意给定内接于一个凸多边形的四边形,都可以找到一个内接于该凸多边形且边长不小于四边形最短边长度的菱形.

证明. 命题不成立. 考虑凸多边形为直角边长为 1 的等腰直角三角形 ABC, 其中 $\angle C = 90^\circ$.

先证明, 若菱形 $PQRS$ 内接于 $\triangle ABC$, 则其边长 a 不超过 $2-\sqrt{2}$.

事实上, 由抽屉原理, 不妨设 P, Q 在 $\triangle ABC$ 的同一条边上, 而 RS 与该边平行.

l. 若 P, Q 同在斜边 AB 上. 不妨设 R 在边 BC 上, 再不妨设 $\angle BQR \geq 90^\circ$, 则

$$a = QR \leq BR.$$

因此当 $BR \leq 2-\sqrt{2}$ 时, $a \leq 2-\sqrt{2}$.

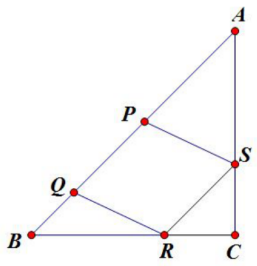
而当 $BR > 2-\sqrt{2}$ 时, $CR < \sqrt{2}-1$, 故

$$a = RS = AB\cdot\frac{CR}{BC} \leq \sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{2}-1\right) = 2-\sqrt{2}.$$

2.若 P, Q 同在直角边上, 不妨设在边 BC 上. 再不妨设 R 在 AC 上, 则

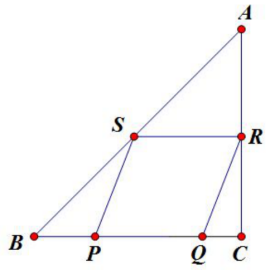
$$a = SP \leq BS.$$

因此当 $BS \leq 2-\sqrt{2}$ 时, $a \leq 2-\sqrt{2}$.

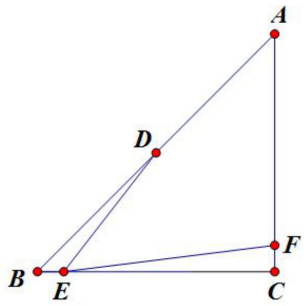


而当 $BS > 2-\sqrt{2}$ 时, $AS < 2\sqrt{2}-2$. 故

$$a = RS = BC \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{2\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}} = 2-\sqrt{2}.$$



现在在边 AB, BC, CA 上分别取点 D, E, F, 使 $AD = \frac{\sqrt{2}}{2}, BE = CF = \frac{1}{100}$, 则易知四边形 $ADEP$ 的最短边长大于 $2-\sqrt{2}$.



故原命题不成立. □

评注. 一般的凸多边形确实有内接菱形, 但其边长与所给四边形最短边长的大小关系不易控制, 因此我们尝试构造反例.为了明确内接菱形的最大边长,所选凸多边形应越简单越好, 比如取三角形.

1975.3 数列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ 定义如下: $x_0 = 5$,对任意非负整数 n,有 $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$.

证明: $45 < x_{1000} < 45.1$.

证明. 显然 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ 是严格递增的正项序列.

由已知, $x_{n+1}^2 = x_n^2 + \frac{1}{x_n^2} + 2$, 即 $x_{n+1}^2 - x_n^2 = 2 + \frac{1}{x_n^2}$. 因此

$$x_m^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(x_i^2 - x_{i-1}^2\right) + x_0^2 > 2m + 25,\ m \in \mathbb{N}^*.$$

特别地, $x_{1000}^2 > 2025$, 故 $x_{1000} > 45$.

另一方面, 待定 $m \in \{1, 2, \ldots, 1000\}$, 我们有

$$\begin{aligned} x_{1000}^2 &= 2025 + \sum_{i=0}^{999} \frac{1}{x_i^2} \\ &= 2025 + \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{x_i^2} + \sum_{i=m}^{999} \frac{1}{x_i^2} \\ &\leq 2025 + \frac{m}{x_0^2} + \frac{1000-m}{x_m^2} \\ &\leq 2025 + \frac{m}{25} + \frac{1000-m}{2m+25}. \end{aligned}$$

取 $m = 100$, 上式 $< 2025 + 9$, 于是 $x_{1000}^2 < \sqrt{2034} < 45.1$. □

评注. 观察数列递推式的结构,我们将其平方以得到常数差距.由此可给出 x_{1000} 的下界.对于上界的给出, 我们将其转化为 $\sum_{i=0}^{999} \frac{1}{x_i^2}$ 的估计后用分段放缩来实现的(结合待定系数法).

并不熟悉这种分段放缩的同学可以参考以下问题:

设 n 个正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 的和为 1, 对任意正整数 k, 用 S_k 表示满足 $\frac{1}{2^k} < a_i \leq \frac{1}{2^{k-1}} (i = 1, 2, \ldots, n)$ 的个数. 证明:

$$\sum_{k \geq 1} \sqrt{\frac{S_k}{2^k}} \leq \sqrt{2} + \sqrt{\log_2 n}.$$

参考文献

[1] 张垚, 沈文选, 冷岗松. 奥林匹克数学中的组合问题[M]. 长沙: 湖南师范大学出版社, 2014. 254-255.

[2] K. A. Broughan, The average order of the Dirichlet series of the gcd-sum function, J. Integer Sequences **10** (2007), Article.07.4.2.

[3] L. Tóth, A survey of gcd-sum function, J. Integer Sequences **13** (2010), Article.10.8.1.

[4] L. Tóth, Weighted gcd-sum function, J. Integer Sequences **14** (2011), Article.11.7.7.

[5] Roger A. Johnson著, 单墫译. 近代欧氏几何学[M]. 上海, 上海教育出版

社, 1999. 263-264.

[6] 余红兵. 奥数教程, 高中第三分册[M]. 上海, 华东师范大学出版社, 2018. 159-169.