2020 年秋季上海新星数学奥林匹克

试 题

2020 年 12 月 9 日 08:00—12:00

1. 求最小的实数 λ, 使得对任意满足 $\sum\limits_{i=1}^{20} ix_i = 0$ 的实数 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{20}$, 都有

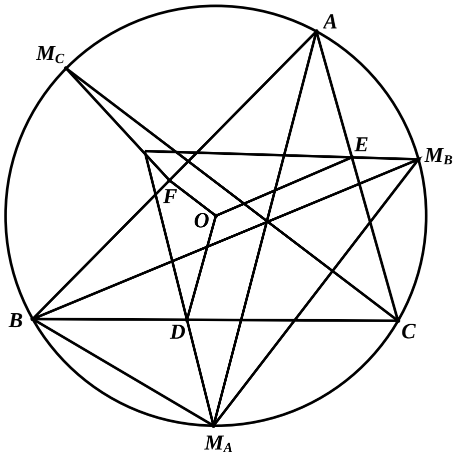
$$\left|\sum_{i=1}^{20} i^2 x_i\right| \le \lambda \max_{1\le i\le 20} |x_i|.$$

(中国人民大学附属中学 张端阳 供题)

2. 称边不相交的 n 边形为简单 n 边形. 求简单 n 边形外对角线(整个对角线上的内点均在形外)数目的最大值.

(清华大学 王琇 供题)

3. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, O 是外心, $M_A,\ M_B,\ M_C$ 分别是外接圆劣弧 $\overset{\frown}{BC},\ \overset{\frown}{CA},\ \overset{\frown}{AB}$ 的中点. 过 O 作 $AM_A,\ BM_B,\ CM_C$ 的平行线, 分别与 $BC,\ CA,\ AB$ 交于点 $D,\ E,\ F$. 证明: 直线 $M_AD,\ M_BE,\ M_CF$ 交于一点.



(中国人民大学附属中学 张端阳 供题)

4. 设 $a_1, \cdots, a_n$ 是非负实数, $\lambda \in [0, 1]$, $A = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, 且 $a_1, \cdots, a_n$ 中恰有 m 个数不小于 λA. 证明:

$$m\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq (1-\lambda)^2 \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2.$$

(华东师范大学 罗振华 供题)

5. 设 p 是素数, a, b 是正整数, 且 p 与 ab 互素. 设 (x_0, y_0) 是同余方程

$$ax + by \equiv 0 \pmod p$$

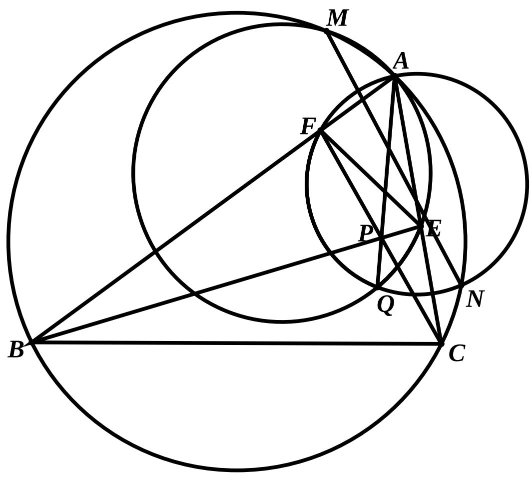
使得 $x + y$ 最小的正整数解. 证明: 存在与 p 互素的整数 m 使得

$$x_0|ma|_p + y_0|mb|_p = p,$$

其中 $|x|_p$ 表示整数 x 模 p 的最小正剩余.

(河南省郑州一中 张甲 供题)

6. 已知 $\triangle ABC$ 中, $AB \neq AC$, E, F 分别是边 AC, AB 上的点, 且 $\angle AEF = \angle ABC$, P 是 BE, CF 的交点, Q 是直线 AP 上一动点(不与 A 重合). 记 $\odot(ABC)$ 与 $\odot(AEQ)$, $\odot(AFQ)$ 分别再次交于 M, N. 证明: 直线 MN 过定点.



(湖南师范大学附属中学 苏林 供题)