2020 年环球城市竞赛春季 O 水平试题解析

王广廷

(上海市上海中学, 200231)

环球城市数学竞赛始于 1980 年的莫斯科-基辅-里加三市邀请赛, 现已成为一个有上百个城市参加的国际性比赛. 从 1982 年开始. 每届举行两季比赛: 秋季赛和春季赛. 每季分为初级(O 水平)和高级(A 水平)两轮, 其中 O 水平的部分问题题目虽然相对容易, 但问题较为新颖. 我们选取了 2020 年春季 O 水平的 6 个问题给出了解答和评析.

I. 试 题

1. 将 2020 个正整数排成一行, 其中任意相邻的三个数中, 第三个数都能被前两个数以及前两个数的和整除. 求最后一项的最小值.

2. 在锐角非等边三角形 ABC 的三条高 AD, BE, CF 上分别取点 K, M, N, 使得 $AK = BM = CN = R$, 其中 R 是 $\triangle ABC$ 的外接圆半径. 证明: $\triangle KMN$ 的圆心即为 $\triangle ABC$ 的内心.

3. 在一个无穷大的棋盘上, 有 40 个单元格被标记. 是否一定可以找出一个矩形, 使得其中被标记的单元格个数恰为 20?

4. 对无穷数列 $a_1, a_2, \cdots$, 设它的一阶差分为 $a'_n = a_{n+1} - a_n$, 第 k 阶差分为 $a_n^{(k)} = a_{n+1}^{(k-1)} - a_n^{(k-1)}$. 若一个数列本身及其所有的差分均为正数, 就称这个数列是“好的”. 证明: 若数列 $a_1, a_2, \cdots; b_1, b_2, \cdots$ 都是好的, 则数列 $a_1b_1, a_2b_2, \cdots$ 也是好的.

5. 在半径为 1 的球的球面上取一个球面三角形, 它的三条边均为球面上半径为 1, 长度不超过 π 的弧(即这段弧所在的平面过球心), 其面积正好是球面积的 $\frac{1}{4}$. 证明: 将这个球面三角形复制 4 份, 可以覆盖整个球面.

修订日期: 2021-01-14.

6. 将 N 个红色, 白色或蓝色的立方体放在圆圈上. 机器人从圆圈上的某个位置出发, 顺时针移动并执行如下操作, 直到只剩下一个立方体为止: 机器人摧毁自己前方最靠近自己的两个立方体, 并将一个立方体放置在自己身后, 该立方体的颜色由被摧毁的两个立方体决定: 若这两个立方体暗色相同, 则被放置的立方体颜色与他们也相同, 若这两个立方体的颜色不同, 则被放置的立方体的颜色与它们均不同. 若放置好立方体后, 无论机器人从哪个位置出发, 最终得到的立方体颜色都不变, 就称这个放置法是“好的”. 若对整数 N, 所有的放置法都是“好的”, 就称 N 是“成功的”. 求所有成功的 N.

II. 解 答

题 1 将 2020 个正整数排成一行, 其中任意相邻的三个数中, 第三个数都能被前两个数以及前两个数的和整除. 求最后一项的最小值.

解 记这 2020 个正整数为 $a_1, a_2, \cdots, a_{2020}$, 则对任意的 $n \in \{3, 4, \cdots, 2019\}$, 记 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = p_n$. 由题意得,

$$a_n \mid a_{n+1}, a_n + a_{n-1} = (p_n + 1)a_{n-1} \mid a_{n+1}.$$

所以,

$$[a_n, (p_n+1)a_{n-1}] = [a_{n-1}p_n, (p_n+1)a_{n-1}] = a_{n-1}p_n(p_n+1)$$

为 a_{n+1} 的约数. 因此

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n} \geq p_n(p_n+1) \cdot \frac{1}{p_n} = p_n + 1,$$

于是, $p_{n+1} \geq p_n + 1$.

因为 $a_2 \mid a_3$, 且若 $a_2 = a_3$, 则 $a_1 + a_2 > a_3$, $a_1 + a_2 \nmid a_3$, 矛盾. 故 $a_3 > a_2$, 于是 $p_3 \geq 2$, 故对任意 $n \in \{3, 4, \cdots, 2020\}$, 有 $p_n \geq n-1$, 所以,

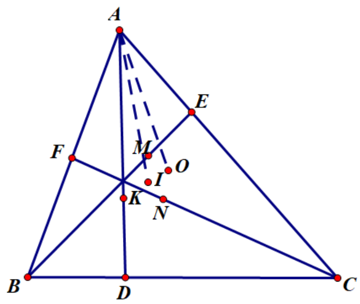
$$a_{2020} = a_2 p_3 p_4 \cdots P_{2020} \geq 1 \cdot 2 \cdots \cdot 2019 = 2019!.$$

对 2020 个正整数 $1, 1!, 2!, 3!, 4!, \cdots, 2019!$, 前三项显然满足要求, 且任一项被前两项整除, 对任意正整数 n, $n! + (n+1)! = n!(1+n+1) = (n+2)n!$ 为 $(n+2)!$ 的约数, 则此 2020 个正整数满足题意.

综上可得, 最后一项的最小值为 2019!. □

评注 对小的情况做一些探索可知前 n 项为 $1, 1, 2, 6$ 时最佳. 发现规律得到答案为 $n!$ 后考虑有 $a_k \mid a_{k+1}, a_k + a_{k-1} \mid a_{k+1}$, 用归纳发后得到 $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ 的下界即可.

题 2 在锐角非等边三角形 ABC 的三条高 AD,BE,CF 上分别取点 K,M,N, 使得 $AK=BM=CN=R$, 其中 R 是 $\triangle ABC$ 的外接圆半径. 证明: $\triangle KMN$ 的圆心即为 $\triangle ABC$ 的内心.



证明 设点 I 是三角形 ABC 的内心, 因为 $\angle BAD=90^\circ-\angle ABC=\angle OAC$, $AK=OA=R$, 又 $\angle BAI=\angle CAI$, 所以 $\angle KAI=\angle OAI$, 于是点 O,K 关于 AI 对称, 所以 $OI=IK$.

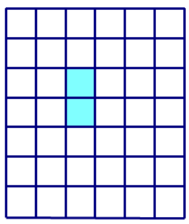
同理可得, $IO=IM,IO=IN$.

所以, $IK=IN=IM$, 即点 I 为 $\odot KMN$ 的圆心. 原问题得证. □

评注 利用顶点与垂心、外心的等角线关系及题中边长等于 R 的条件联想到对称. 作图发现点 O 也在 $\odot KMN$ 上即得证.

题 3 在一个无穷大的棋盘上, 有 40 个单元格被标记. 是否一定可以找出一个矩形, 使得其中被标记的单元格个数恰为 20?

解 考虑如图标记的方格.



假设可以找出一个矩形, 在方阵中的子矩形为 a 行 b 列, 则 $20\le ab\le 22$. 下面分情况讨论:

(1) 若 $ab=20$, 由于行列均小于 10, 因此, $\{a,b\}\{4,5\}$, 但任取 4 行 5 列或者 4 列 5 行均取到未标记的格, 不成立.

(2) 若 $ab=21$, 由于行列数均小于等于 7, 于是 $\{a,b\}=\{3,7\}$, 而 $a\le 7,b\le 6$, 则 $a=7,b=3$, 如此取出子矩形中恰 1 个未取方格. 若取第 3 列, 则取 2 个.

若不取第三列, 则取不到, 矛盾.

(3) 若 $ab=22$, 但是 $a,b\le 7$, 于是 11 不整除 ab, 矛盾.

综上可知, 假设不成立, 故不一定可以取出. □

评注 本题的关键在于猜出可构造的例子, 将标记格限定在尽量小的区域(6×7)后只需考虑 4×5, 3×7 的情况, 稍作尝试即可.

题 4 对无穷数列 $a_1,a_2,\cdots$, 设它的一阶差分为 $a'_n=a_{n+1}-a_n$, 第 k 阶差分为 $a_n^{(k)}=a_{n+1}^{(k-1)}-a_n^{(k-1)}$. 若一个数列本身及其所有的差分均为正数, 就称这个数列是"好的". 证明: 若数列 $a_1,a_2,\cdots;b_1,b_2,\cdots$ 都是好的, 则数列 $a_1b_1,a_2b_2,\cdots$ 也是好的.

证明 因为 $a_1,a_2,\cdots;b_1,b_2,\cdots$ 的零阶差分为正, 则 $a_1,a_2,\cdots;b_1,b_2,\cdots$ 均为正数, 于是 $a_1b_1,a_2b_2,\cdots$ 也都为正数.

下面归纳证明: 对任意正整数 k, 对于一切好的 $a_1,a_2,\cdots;b_1,b_2,\cdots$ 均有 $a_1b_1,a_2b_2,\cdots$ 的 k 阶差分是正的.

当 $k=1$ 时, 对任意正整数 i, 由于 $a_{i+1}-a_i>0,b_{i+1}-b_i>0$, 因此, $a_{i+1}b_{i+1}>a_ib_i$, 即 $k=1$ 时成立.

假设数列 $a_1b_1,a_2b_2,\cdots$, 的小于 k 阶差分为正. 下面考虑 k 阶差分的情况.

由于对任意正整数 i, 有

$$a_{i+1}b_{i+1}-a_ib_i=\frac{1}{2}b_i(a_{i+1}-a_i)+\frac{1}{2}b_{i+1}(a_{i+1}-a_i)+\frac{1}{2}a_i(b_{i+1}-b_i)+\frac{1}{2}a_{i+1}(b_{i+1}-b_i).$$

由于 $a_1,a_2,\cdots;b_1,b_2,\cdots$ 是好的, 则数列 $\{a_{i+1}-a_i\}$, $\{b_{i+1}-b_i\}$ 也是好的. 由归纳假设 $\frac{1}{2}b_1,\frac{1}{2}b_2,\cdots;a_2-a_1,a_3-a_2\cdots$ 均为好的, 则 $\frac{1}{2}b_i(a_{i+1}-a_i)$ 的 $k-1$ 阶差分为正. 对 $\frac{1}{2}b_2,\frac{1}{2}b_3,\cdots;a_2-a_1,a_3-a_2,\cdots$ 用归纳假设, 知 $\frac{1}{2}b_{i+1}(a_{i+1}-a_i)$ 的 $k-1$ 阶差分为正. 同理可得 $\frac{1}{2}a_i(b_{i+1}-b_i),\frac{1}{2}a_{i+1}(b_{i+1}-b_i)$ 的 $k-1$ 阶差分也为正.

所以(注意到 k 阶差分是可加的)

$$\begin{aligned}(a_nb_n)^{(k)}&=((a_{n+1}b_{n+1})^{(k-1)}-(a_nb_n)^{(k-1)})\\&=\left(\frac{1}{2}b_n(a_{n+1}-a_n)\right)^{(k-1)}+\left(\frac{1}{2}b_{n+1}(a_{n+1}-a_n)\right)^{(k-1)}\\&\quad\left(\frac{1}{2}a_n(a_{n+1}-b_n)\right)^{(k-1)}+\left(\frac{1}{2}a_{n+1}(b_{n+1}-b_n)\right)^{(k-1)}\\&>0.\end{aligned}$$

即 k 时, 命题成立.

综上可知, 对一切正整数 k, $a_1b_1, a_2b_2, \cdots$ 的 k 阶差分是正的, 从而 $a_1b_1, a_2b_2, \cdots$ 是好的. □

评注 为了利用题目中的条件, 容易注意到只需将 $\{a_ib_i\}$ 的差分分拆为数列 a_i,b_i 的差分之积的正项和之后利用归纳假设完成证明.

题 5. 在半径为 1 的球的球面上取一个球面三角形, 它的三条边均为球面上半径为 1, 长度不超过 π 的弧(即这段弧所在的平面过球心), 其面积正好是球面积的 $\frac{1}{4}$. 证明: 将这个球面三角形复制 4 份, 可以覆盖整个球面.

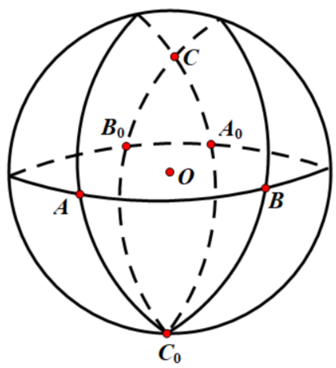
证明 (张贻然) 对球面上的任意三点 A, B, C, 记 $S(\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CA})$ 表示 $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CA}$ 三条圆心为球心的弧在球面上围出的三角形的面积. 该题中的三角形均为球面三角形. 球心为 O.

设题中球面三角形为 ABC. 若 A, A_0 为对径点, 对球面上的点 X, Y, 记 $S(\overset{\frown}{AXA_0}, \overset{\frown}{AYA_0}, T)$ 表示两段弧在球面上围成的经过点 T 的图形的面积. 由题意 $S(\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CA}) = \frac{1}{4}$. 不妨设点 C 在平面 AOB 的上方, 取 $\triangle ABC$ 内一点 I.

定义包含点 W 的弧 $\overset{\frown}{XY}, \overset{\frown}{XZ}$ 的夹角为其在过点 X 的切平面上的投影向量为 $\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ}$, 将 $\overrightarrow{XY}$ 经过 W 绕点 X 转到 $\overrightarrow{XZ}$ 经过(所在平面包含球心 O)的角度, 则夹角为 θ 的两段半圆弧围成的图形面积为球面的 $\frac{\theta}{2\pi}(0 < \theta < 2\pi)$ 倍.

首先证明:包含点 I 的弧的夹角满足 $\angle ACB + \angle CBA + \angle BAC = 360°$.

事实上, 取 A, B, C 的对径点 A_0, B_0, C_0, 则过点 A 的每段以球心为圆心的弧过点 A_0, 对点 B, C 有同样的结论.



由于 A_0, B_0, C_0 为对径点, 所以 $\triangle ABC \cong \triangle A_0B_0C_0$, 于是

$$S(\overset{\frown}{BAB_0}, \overset{\frown}{BCB_0}, I) + S(\overset{\frown}{CAC_0}, \overset{\frown}{CBC_0}, I) + S(\overset{\frown}{ABA_0}, \overset{\frown}{ACA_0}, I)$$

$= 3S(\widehat{AB},\widehat{BC},\widehat{CA}) + S(\widehat{AB_0},\widehat{B_0C},\widehat{CA}) + S(\widehat{BC},\widehat{CA_0},\widehat{A_0B}) + S(\widehat{AB},\widehat{BC_0},\widehat{AC_0})$

$= 2S(\widehat{AB},\widehat{BC},\widehat{CA}) + S(\widehat{AB_0},\widehat{B_0C},\widehat{CA}) + S(\widehat{AB},\widehat{BC},\widehat{CA}) + S(\widehat{BC},\widehat{CA_0},\widehat{A_0B})$

$\quad + S(\widehat{A_0B_0},\widehat{B_0C_0},\widehat{A_0C_0})$

$= 2S(\widehat{AB},\widehat{BC},\widehat{CA}) + S = \dfrac{1}{2}S_{球} + \dfrac{1}{2}S_{球} = S_{球}.$

所以, $\angle ACB + \angle CBA + \angle BAC = 360°$.

取弧 $\widehat{AB}$ 的中点 M, 以 MO 为轴将球旋转 $180°$, 此时, 点 C 旋转至点 C', 于是 C, O, C', M 四点共面, 由于 $(C, C'), (A, B)$ 分别关于 OM 对称, 所以 $\widehat{C'A} = \widehat{CB}, \widehat{C'B} = \widehat{CA}$, $\triangle ABC \cong \triangle BAC'$. 取点 M 的对径点 M_0, 则弧夹角 $\angle CAB + \angle C'AB = \angle CAB + \angle CBA = 360° - \angle ACB$. 由弧 $\widehat{CC'}$ 过点 M_0, 弧夹角 $\angle CAC'$(M_0在角内) $= \angle ACB$, 且 $\widehat{AC} = \widehat{AC}$, $\widehat{AC'} = \widehat{BC}$, 所以, $\triangle CAC' \cong \triangle ACB$. 同理可得, $\triangle ACB \cong \triangle CBC'$. 所以, 球面三角形复制 4 份, 可覆盖整个球面.

原问题得证. □

评注 注意到球面上三弧长固定的球面三角形形状固定. 不难想到覆盖只能利用球面上类似平移或者对称的操作完成, 然后再利用顶点三角形的全等来严谨的证明即可. 需注意曲边(弧)的夹角, 球面上的几何变换的表述要足够谨慎.

题 6. 将 N 个红色, 白色或蓝色的立方体放在圆圈上. 机器人从圆圈上的某个位置出发, 顺时针移动并执行如下操作, 直到只剩下一个立方体为止: 机器人摧毁自己前方最靠近自己的两个立方体, 并将一个立方体放置在自己身后, 该立方体的颜色由被摧毁的两个立方体决定: 若这两个立方体暗色相同, 则被放置的立方体颜色与他们也相同, 若这两个立方体的颜色不同, 则被放置的立方体的颜色与它们均不同. 若放置好立方体后, 无论机器人从哪个位置出发, 最终得到的立方体颜色都不变, 就称这个放置法是“好的”. 若对整数 N, 所有的放置法都是“好的”, 就称 N 是“成功的”. 求所有成功的 N.

解 (张贻然) 首先证明: 若 N 为 2 的幂, 则 N 是成功的.

事实上, 记 $N = 2^n, n \in \mathbb{N}$. 当 $n = 0$ 时, 显然成立, 下设 $n > 0$, 若场上剩余 2^k 个立方体, 记颜色为红、白、蓝的立方体各 $a_k, b_k, c_k, k \in \mathbb{N}^*$ 个. 机器人行动 2^{k-1} 次, 每次将相邻的两个立方体变为一个立方体, 由于每次将前面两个立方体变为身后一个立方体, 则机器人行动 2^{k-1} 次后每个原立方体均被摧毁, 每个新立方体均留存, 此时, 场上剩余 2^{k-1} 个立方体. 记红、白、蓝各有

$a_{k-1}, b_{k-1}, c_{k-1}$ 个. 考虑这 2^k+2^{k-1} 个立方体(包括新的以及原来的立方体), 若摧毁两个同色的立方体, 则又生成一个该颜色的立方体, 于是此颜色共被计数 3 次, 被 3 整除. 若摧毁两个异色的立方体, 则生成一个第三种颜色的立方体, 此时, 三种颜色均被计数 1 次. 所以,

$$a_k+a_{k-1} \equiv b_k+b_{k-1} \equiv c_k+c_{k-1} (\bmod 3).$$

由于若 $a_k \equiv b_k (\bmod 3)$, 则 $a_{k-1} \equiv b_{k-1} (\bmod 3)$, 最后可得 $a_0 \equiv b_0 (\bmod 3)$, 于是 $a_0=b_0=0$, 则余下的立方体均为蓝色, 同理可得其余情形.

若初始时, 有 2 种颜色的立方体的个数模 3 相同, 则放置为好的, 而若 a_n, b_n, c_n 两两模 3 不同余, $2^n=a_n+b_n+c_n \equiv 0+1+2 \equiv 0 (\bmod 3)$, 矛盾.

所以, 一切放法都为好的, 即 N 是成功的.

再证: 对一切不为 2 的幂的 N, N 不是成功的.

将 $N-1$ 个白色立方体和一个红色立方体放在圆上.

因为 N 为正整数, 于是 $\left[\lceil\frac{N}{2}\rceil, N\right]$ 中有 2 的幂, 而 N 不为 2 的幂, 因此, $\left[\lceil\frac{N}{2}\rceil, N-1\right]$ 中有 2 的幂, 不妨记为 2^α, 则机器人由一处开始, 经过 $N-2^\alpha$ 次操作, 使得场上剩余 2^α 个立方体, 且起始位置前的一个立方体未被操作(这是由于 $\frac{N}{2} \neq 2^\alpha$, 则 $2^\alpha > \frac{N}{2}$). 因此, 由红立方体前放机器人, 仅第一次摧毁一个红立方体和一个立方体, 得到一个蓝立方体, 后面都是摧白毁两个白立方体得到一个白立方体. 所以, 剩余 2^α 个立方体时, 剩余 1 个蓝立方体及 $2^\alpha-1$ 个白立方体. 而由红立方体后放机器人, 每次摧毁两个白立方体放一个白立方体, 剩余一个红立方体及 $2^\alpha-1$ 个白立方体. 由于 2^α 个立方体不随机器人初始位置的改变最终立方体的颜色, 且对偶数 α, $2^\alpha-1 \equiv 0 (\bmod 3)$. 两种情形初始($2^\alpha$ 个立方体)时分别为 $a_\alpha \equiv b_\alpha (\bmod 3)$ 或者 $b_\alpha \equiv c_\alpha (\bmod 3)$, 最后为蓝、红立方体各一个. 对奇数 α, $2^\alpha-1 \equiv 1 (\bmod 3)$, 两种情形初始($2^\alpha$ 个立方体)时分别为 $c_\alpha \equiv b_\alpha (\bmod 3)$ 或者 $b_\alpha \equiv a_\alpha (\bmod 3)$, 最后为蓝、红立方体各一个. 故总有 N 不是成功的.

综上可知, 一切成功的 $N=2^n, n \in \mathbb{N}$. □

评注 此类操作问题需要寻找一个不变量. 将三种颜色编号为 0,1,2, 则容易注意到题中操作及模 3 意义下的加法再取负, 也即场上有 2^k 个立方体一轮操作后编号的和取相反数模 3. 试验较小的情况时, 可发现非 2^k 的值是不行的. 利用对操作控制化归到 2^k 例子容易给出反例.