2020 年 USEMO 试题解析

石泽晖[1]　董子超[2]

(1. 长春吉大附中实验学校, 130021; 2. 卡内基梅隆大学, 15213)

USEMO 是美国数学奥林匹克 (USAMO) 的一个练习赛, 第 2 届 USEMO 于 2020 年 10 月 24 日、25 日两天进行. 本次比赛共 6 道题, 其中 1,2,4,5 难度适中, 较适合联赛训练; 3,6 较难, 适合国赛训练. 我们在下文中给出了这次 USEMO 的解答和评析, 请读者批评指正.

I. 试 题

1. 求所有能被写成

$$\frac{[x,y]+[y,z]}{[x,z]}$$

形式的正整数, 其中 x,y,z 是三个正整数, $[a,b]$ 是指正整数 a,b 的最小公倍数.

2. 甲, 乙两人玩一个游戏. 首先, 乙选择集合 $\{1,2,\cdots,2020\}$ 的一族子集 $\mathcal{F}$, 并让甲知道这个子集族是什么. 然后,甲和乙轮流从集合 $\{1,2,\cdots,2020\}$ 中挑选数字, 已选过的数字不能再被挑选. 甲先挑选, 乙后挑选, 一直进行到所有数字都挑完为止 (即每人挑 1010 轮). 如果甲能挑完 $\mathcal{F}$ 中某个集合中的所有元素, 则甲赢, 否则乙赢. 试求所有能确保乙有必胜策略的 $\mathcal{F}$ 中, $|\mathcal{F}|$ 的最大可能值.

3. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, O,H 分别是外心和垂心. 记 Γ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆, N 为 OH 的中点. 考虑由 Γ 在 B,C 处的两条切线以及过点 H 且垂直于 AN 的直线组成的三角形, 并记该三角形的外接圆为 ω_A, 类似定义 ω_B,ω_C. 证明: $\omega_A,\omega_B,\omega_C$ 的根心在 OH 上.

4. 设函数 $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ 满足对任意 $x,y\in\mathbb{R}^+$, 都有

$$f(x+f(y)+xy)=xf(y)+f(x+y).$$

证明: 对任意正实数 x, 均有 $f(x)=x$.

修订日期: **2021-02-07.**

5. 凸 200 边形 $A_1A_2\cdots A_{200}$ 的所有边被相间地涂成了红蓝两色. 假设所有红边延长相交可以形成一个正 100 边形, 所有蓝边延长相交也可以形成一个正 100 边形. 证明: 凸 200 边形 $A_1A_2\cdots A_{200}$ 的 50 条对角线 $A_1A_{101}, A_3A_{103}, \cdots, A_{99}A_{199}$ 共点.

6. 证明: 对任意奇数 $n>1$, 均存在两个正整数 a,b, 使得多项式 $Q(x)=(x+a)^2+b$ 同时满足如下三个条件:

(i) $(a,n)=(b,n)=1$;

(ii) $Q(0)$ 可以被 n 整除;

(iii) $Q(1),Q(2),Q(3),\cdots$ 中每个数均有一个不能整除 n 的素因子.

Ⅱ. 解 答

题 1 求所有能被写成
$$\frac{[x,y]+[y,z]}{[x,z]}$$
形式的正整数, 其中 x,y,z 是三个正整数, $[a,b]$ 是指正整数 a,b 的最小公倍数.

解 1 (沈月恒) 记 $d_0=(x,y,z), d_1=\frac{(y,z)}{d_0}, d_2=\frac{(x,z)}{d_0}, d_3=\frac{(x,y)}{d_0}$, 且
$$x_1=\frac{x}{d_0d_2d_3},\ y_1=\frac{y}{d_0d_1d_3},\ z_1=\frac{z}{d_0d_1d_2},$$
易知 x_1,y_1,z_1 均为整数, 且两两互素. 这说明:
$$[x,y]=x_1y_1d_0d_1d_2d_3,\ [y,z]=y_1z_1d_0d_1d_2d_3,\ [x,z]=x_1z_1d_0d_1d_2d_3,$$
由此可以得到:
$$\frac{[x,y]+[y,z]}{[x,z]}=\frac{x_1y_1+y_1z_1}{x_1z_1}.$$

一方面, 若 $\frac{x_1y_1+y_1z_1}{x_1z_1}=m$ 为正整数, 则 $x_1\mid(x_1y_1+y_1z_1), z_1\mid(x_1y_1+y_1z_1)$, 从而 $x_1\mid y_1z_1, z_1\mid x_1y_1$, 由 x_1,y_1,z_1 两两互素可知: $x_1=z_1=1$, 从而
$$\frac{[x,y]+[y,z]}{[x,z]}=m=2y_1$$
为偶数.

另一方面, 对任意的正偶数 $n=2k$, 取 $x=1,y=k,z=1$, 则
$$\frac{[x,y]+[y,z]}{[x,z]}=\frac{k+k}{1}=2k=n,$$
这说明, 一切正偶数 n, 均能被写成 $\frac{[x,y]+[y,z]}{[x,z]}$ 形式.

结合以上两方面可知, 所有正偶数即为所求. □

解 2 记 $v_2(x)=\alpha, v_2(y)=\beta, v_3(z)=\gamma$, 其中 $v_2(a)$ 为正整数 a 的素因子 2 的个数.

首先, 我们证明: 若 $\frac{[x,y]+[y,z]}{[x,z]}$ 为正整数, 则其必为偶数.

由对称性, 不妨设 $\alpha \geq \gamma$. 分两种情况讨论:

(1) $\beta \geq \alpha$, 此时有 $\beta \geq \alpha \geq \gamma$. 易知

$$v_2([x,y])=\max\{v_2(x), v_2(y)\}=\max\{\alpha,\beta\}=\beta.$$

同理

$$v_2([y,z])=\max\{v_2(y), v_2(z)\}=\max\{\beta,\gamma\}=\beta.$$

故

$$v_2([x,y]+[y,z]) \geq \beta+1.$$

而 $v_2([x,z])=\max\{v_2(x), v_2(z)\}=\max\{\alpha,\gamma\} \leq \beta$, 因此

$$v_2\left(\frac{[x,y]+[y,z]}{[x,z]}\right) \geq \beta+1-\beta=1,$$

这说明 $\frac{[x,y]+[y,z]}{[x,z]}$ 为偶数.

(2) $\beta<\alpha$. 此时易知 $v_2([x,y])=\alpha, v_2([x,z])=\alpha$. 由 $\frac{[x,y]+[y,z]}{[x,z]}$ 为正整数, 可知 $v_2([y,z]) \geq \alpha$. 从而

$$v_2([y,z])=\max\{v_2(y), v_2(z)\}=\max\{\beta,\gamma\} \geq \alpha,$$

注意到 $\alpha>\beta, \alpha \geq \gamma$, 故 $\alpha=\gamma$, 也即 $v_2([y,z])=\alpha$, 又 $v_2([x,y])=\alpha$, 故

$$v_2([x,y]+[y,z]) \geq \alpha+1,$$

进而

$$v_2\left(\frac{[x,y]+[y,z]}{[x,z]}\right) \geq \alpha+1-\alpha=1,$$

这说明 $\frac{[x,y]+[y,z]}{[x,z]}$ 为偶数.

结合 (1),(2) 可知, 若 $\frac{[x,y]+[y,z]}{[x,z]}$ 为正整数, 则其必为偶数.

其次, 对任意的正偶数 $n=2k$, 取 $x=1, y=k, z=1$, 则

$$\frac{[x,y]+[y,z]}{[x,z]}=\frac{k+k}{1}=2k=n,$$

这说明一切正偶数 n 均能被写成 $\frac{[x,y]+[y,z]}{[x,z]}$ 形式.

综上知, 所有正偶数即为所求. □

评注 本题为简单题. 通过一些尝试探索不难猜到答案为全体正偶数并完成构造. 对于证明的部分, 一种较代数的想法是设出所有的最大公约数关系, 从而

代入化简表达式, 说明它只取偶数值; 另一种较组合的想法是对分子, 分母中素因子 2 的个数计数, 说明它只取偶数值. 在本题中, 两种解法皆奏效.

题 2 甲, 乙两人玩一个游戏. 首先, 乙选择集合 $\{1,2,\cdots,2020\}$ 的一族子集 $\mathcal{F}$, 并让甲知道这个子集族是什么. 然后,甲和乙轮流从集合 $\{1,2,\cdots,2020\}$ 中挑选数字, 已选过的数字不能再被挑选. 甲先挑选, 乙后挑选, 一直进行到所有数字都挑完为止 (即每人挑 1010 轮). 如果甲能挑完 $\mathcal{F}$ 中某个集合中的所有元素, 则甲赢, 否则乙赢. 试求所有能确保乙有必胜策略的 $\mathcal{F}$ 中, $|\mathcal{F}|$ 的最大可能值.

解 (王孝文) 记集合 $S=\{1,2,\cdots,2020\}$, 子集 $A_i=\{2i-1,2i\}$ $(i=1,2,\cdots,1010)$. 考虑子集族

$$|\mathcal{F}|=\{A \mid A\subseteq S, \text{ 且 } A_1,A_2,\cdots,A_{1010} \text{ 中至少有一个是 } A \text{ 的子集}\}.$$

首先, 我们计算 $|\mathcal{F}|$. 由 $\mathcal{F}$ 的定义可知: 对 $\mathcal{F}$ 中每个元素 A, 均存在最小的 i, 使得 $A_i=\{2i-1,2i\}\subseteq A$. 而对每个最小的 i, 集合 $A_j=\{2j-1,2j\}$ $(1\le j<i)$ 中的两个元素有 3 种满足 i 为最小的取法: 均不取, 或任取其一. 而集合 S 中每个大于 $2i$ 的元素可取可不取, 共 2 种取法, 均能满足 A 的定义. 故对每一个 i $(1\le i\le 1010)$, 共对应了 $3^{i-1}\cdot 2^{2020-2i}$ 个 A. 因此:

$$|\mathcal{F}|=\sum_{i=1}^{1010}3^{i-1}\cdot 2^{2020-2i}=2^{2018}\cdot\sum_{i=0}^{1009}\left(\frac{3}{4}\right)^i=2^{2020}-3^{1010}.$$

其次, 给出此时乙的必胜策略: 当甲挑选 $2i-1$ $(1\le i\le 1010)$ 时, 乙就挑选 $2i$ $(1\le i\le 1010)$; 当甲挑选 $2i$ $(1\le i\le 1010)$ 时, 乙就挑选 $2i-1$ $(1\le i\le 1010)$. 事实上, 由子集族 $\mathcal{F}$ 的定义可知, 对每个集合 $A\in\mathcal{F}$, 均存在一个 i $(1\le i\le 1010)$, 使得 $A_i=\{2i-1,2i\}\subseteq A$. 由乙的挑数策略可知, A_i 中的两个元素中必有一个无法被甲取到, 故甲无法挑完 $\mathcal{F}$ 中任何一个集合的所有元素. 乙必胜.

最后, 我们证明所有满足条件的 $\mathcal{F}$, 均有 $|\mathcal{F}|\le 2^{2020}-3^{1010}$.

考虑甲前 k 次的挑选方式.

由于甲前 k 次挑选共 $2020\cdot(2020-2)\cdots(2020-2(k-1))$ 种选择. 而 S 的任意 k 元集合在以上选择中至多出现 $k!$ 次 (全排列的种类数), 故甲至少能挑完

$$\frac{2020\cdot(2020-2)\cdots(2020-2(k-1))}{k!}=2^k\cdot \mathrm{C}_{1010}^k$$

个 k 元集合. 对 k $(1\le k\le 1010)$ 如上考虑, 可得甲至少能挑出

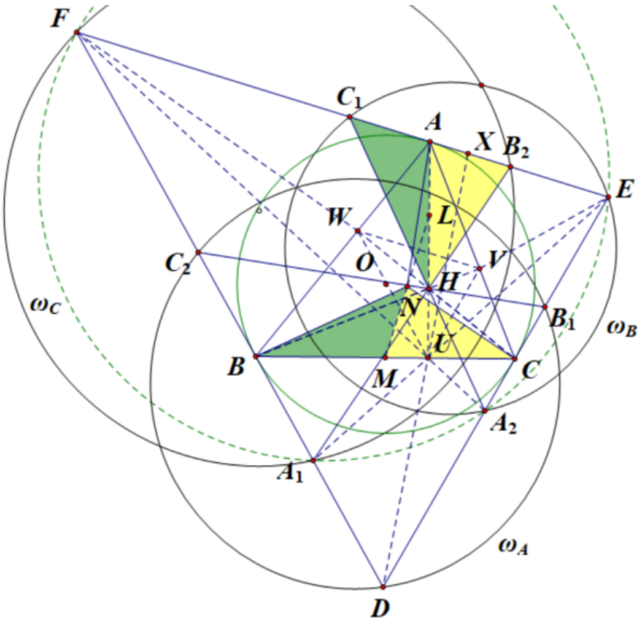
$$\sum_{k=0}^{1010}2^k\mathrm{C}_{1010}^k=(2+1)^{1010}=3^{1010}$$

个集合. 这说明 $|\mathcal{F}|\le 2^{2020}-3^{1010}$.

综上, $|\mathcal{F}|$ 的最大值为 $2^{2020}-3^{1010}$. $\square$

评注 本题为中档题. 首先, 我们需要做较多的尝试探索猜出答案与构造, 一种可能的方式是将 2020 改成较小的数, 如 4,5,6,7,8 等等, 并试探乙选不同的子集族所得的结果. 在猜出答案后, 本题的证明也是不那么平凡的. 事实上, 我们计算了甲逐步所能控制的集合个数的下界, 进而估计了乙所选集合族的上界. 这个方法是自然的, 但是在思考问题的时候, 这样的贪心算法却容易被忽视. 本题的构造与证明浑然天成, 既出乎意料, 又合乎情理, 是一道难得的好题.

题 3 在锐角 $\triangle ABC$ 中, O,H 分别是外心和垂心. 记 Γ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆, N 为 OH 的中点. 考虑由 Γ 在 B,C 处的两条切线以及过点 H 且垂直于 AN 的直线组成的三角形, 并记该三角形的外接圆为 ω_A, 类似定义 ω_B,ω_C. 证明: $\omega_A,\omega_B,\omega_C$ 的根心在 OH 上.



证明 (邹听雨) 如图所示, 过 H 作 AN,BN,CN 的垂线, 分别交 DE,DF,EF 于 A_2,B_1,A_1,C_2,B_2,C_1 . 记 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 a,b,c, 外接圆半径为 R.

记 BC 中点 M ,AH 中点 L, 则由九点圆的性质可知 LM 为 $\triangle ABC$ 九点圆的直径, 由九点圆与外接圆的位似比为 1:2, 可知 $LM=R$. 由卡诺定理可知, $LM\parallel OA$. 所以 $LM\perp AB_2, MC\perp AH, NC\perp B_2H$, 从而有 $\triangle AHB_2\sim\triangle MCN$. 同理有 $\triangle AHC_1\sim\triangle MBN$.

于是有 $\frac{AB_2}{AH}=\frac{NM}{MC}=\frac{R}{a}$, 注意到 $AH=2OM=2R\cos A$, 可知:

$$AB_2=\frac{2R^2\cos A}{a}=\frac{R\cos A}{\sin A}=R\cot A.$$

同理
$$AC_1 = R\cot A = AB_2,$$
以及
$$BA_1 = BC_2 = R\cot B, CB_1 = CA_2 = R\cot C.$$

设 AH 交 BC 于点 U, 下证 A_1, U, E 三点共线. 容易知道
$$A_1D = BD - BA_1 = R\tan A - R\cot B,$$
$$DE = DC + CE = R\tan A + R\tan B,$$
$$CU = b\cos C = 2R\sin B\cos C,\ BU = 2R\sin C\cos B.$$
故
$$\begin{aligned}\frac{BA_1}{A_1D}\cdot\frac{DE}{EC}\cdot\frac{CU}{UB} &= \frac{R\cot B}{R(\tan A-\cot B)}\cdot\frac{R(\tan A+\tan B)}{R\tan B}\cdot\frac{2R\sin B\cos C}{2R\sin C\cos B}\\ &= \frac{(\tan A+\tan B)\cot B\cot C}{(\tan A-\cot B)\tan B\cot B}\\ &= \frac{\tan A+\tan B}{\tan A\tan B-1}\cdot\cot C = 1,\end{aligned}$$
在 $\triangle BCD$ 中应用 Menelaus 定理的逆定理, 可得 A_1, U, E 三点共线. 同理, A_2, U, F 三点共线.

又易知 $\angle FBU = \angle ECU$, 且
$$\frac{FB}{BU} = \frac{R\tan C}{2R\sin C\cos B} = \frac{1}{2\cos B\cos C},$$
同理
$$\frac{EC}{CU} = \frac{1}{2\cos B\cos C},$$
故 $\triangle FBU \sim \triangle ECU$, 从而 $\angle DFU = \angle DEU$, 故 E, F, A_1, A_2 四点共圆, 于是
$$DA_1\cdot DF = DA_2\cdot DE,$$
这说明 D 在 ω_B, ω_C 的根轴上.

设 DU 交 EF 于 X, 则
$$\begin{aligned}\frac{FX}{XE} = \frac{DF\sin\angle XDF}{DE\sin\angle XDE} &= \frac{R(\tan A+\tan C)}{R(\tan A+\tan B)}\cdot\frac{BU}{UC}\\ &= \frac{(\tan A+\tan C)\cot B}{(\tan A+\tan B)\cot C} = \frac{\tan A\tan C-1}{\tan A\tan B-1}\\ &= \frac{\tan C-\cot A}{\tan B-\cot A} = \frac{R(\tan C-\cot A)}{R(\tan B-\cot A)} = \frac{FC_1}{EB_2}.\end{aligned}$$

由比例性质可知

$$\frac{FX}{XE}=\frac{FC_1}{EB_2}=\frac{C_1X}{B_2X}.$$

于是

$$FX\cdot B_2X=EX\cdot C_1X,$$

这说明 X 在 ω_B,ω_C 的根轴上. 故 DU 为 ω_B,ω_C 的根轴. 同理: EV 为 ω_A,ω_C 的根轴, FW 为 ω_A,ω_B 的根轴. 由蒙日定理可得: DU,EV,FW三线共点于 $\omega_A,\omega_B,\omega_C$ 的根心, 亦为 $\triangle DEF$ 与 $\triangle UVW$ 的位似中心. 再注意到 O 为 $\triangle DEF$ 的内心, H 为 $\triangle UVW$ 的内心, 由位似可知: $\omega_A,\omega_B,\omega_C$ 的根心在 OH 上. □

评注 本题为难题. 首先图中有很多垂直, 可以考虑用垂直导出相似, 进而通过计算确定 A_1 等点的具体位置; 其次由精确图发现两组共线, 并可以通过计算证明, 从而确定根轴上的一个点 D; 再次由精确图可知 U 也在根轴上, 但不好直接证明, 于是考虑作出 DU 上另一点 X, 转而证明 X 在根轴上, 从而刻画出根轴; 最后我们通过熟知的位似完成证明.

题 4. 设函数 $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ 满足对任意 $x,y\in\mathbb{R}^+$, 都有

$$f(x+f(y)+xy)=xf(y)+f(x+y). \tag{1}$$

证明: 对任意正实数 x, 均有 $f(x)=x$.

证明 1 (沈月恒) 我们分几步完成证明:

若存在某个 $y_0>0$ 使得 $f(y_0)<y_0$, 取 $x=1-\frac{f(y_0)}{y_0}, y=y_0$ 得 $xf(y)=0$, 这与 $x>0,f(y)>0$ 矛盾! 因此, 我们得到

结论 1 对任意正实数 y, 均有 $f(y)\geq y$.

定义 $g(x)=f(x)-x$, 则由结论 1 知 $g(x)$ 的值域为 $[0,+\infty)$. 此时 (1) 式可化为

$$g(x+y+xy+g(y))=(x-1)g(y)+g(x+y). \tag{2}$$

由 x,y 的任意性, 交换 x,y 得

$$g(x+y+xy+g(x))=(y-1)g(x)+g(x+y). \tag{3}$$

将 (2),(3)式作差得

$$g(x+y+xy+g(y))-(x-1)g(y)=g(x+y+xy+g(x))-(y-1)g(x)$$

对任意正实数 x,y 均成立.

因此, 若 $g(x)=g(y)$, 则有

$$(x-1)g(y)=(y-1)g(x).$$

这说明

结论 2 若互异的正实数 a,b ,使得 $g(a)=g(b)$, 则 $g(a)=g(b)=0$.

在 (2) 式中, 代入 $x=1$ 得

$$g\left(g(y)+2y+1\right)=g(y+1) \tag{4}$$

对任意正实数 y 均成立. 由于 $g(y)\geq 0$, 我们发现 $g(y)+2y+1>y+1$. 从而由结论 2 得 $g(y+1)=0$ 对任意正实数 y 均成立. 因此, 我们得到

结论 3 对任意实数 $y>1$, 均有 $g(y)=0$.

在 (2) 式中, 代入任意 $x=x_0>1$, 则 $x_0+y+x_0y+g(y)>1$, 由结论 2 知

$$0=g(x_0y+x_0+y+g(y))=(x_0-1)g(y)+g(x_0+y)$$

对任意正实数 y 均成立. 因为 g 非负, 且 $x_0>1$, 所以 $g(y)=g(x_0+y)=0$ 对任意正实数 y 均成立, 这就完成了证明. □

证明 2 同法一, 我们得到结论 1, 及 (2) 式. 接下来我们采用反证法证明.

若存在正实数 y_0, 使得 $g(y_0)>0$, 在 (2) 式中, 令 $y=y_0$, 则

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} g\left(x(1+y_0)+(g(y_0)+y_0)\right)\geq \lim_{x\to+\infty}(x-1)g(y_0),$$

故

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty.$$

在 (2) 式中, 令 $x=1$, 可得

$$g\left(g(y)+2y+1\right)=g(y+1). \tag{3}$$

在 (3) 式中, 令 $y=x-1$, 得

$$g\left(g(x-1)+2x-1\right)=g(x). \tag{4}$$

取如下序列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$:

$$x_1=2, x_{n+1}=g(x_n-1)+2x_n-1\ (n\geq 1).$$

反复利用 (4) 式可得: $g(x_1)=g(x_1)=g(x_3)=\cdots$ 为定值, 不妨记该定值为 c.

注意到 $g(x)\geq 0$, 故 $x_{n+1}\geq 2x_n-1(n\geq 1)$, 而 $x_1=2$, 故序列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 单调递增, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=+\infty$.

由 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ 可知, 存在 M, 使得 $\forall x\geq M$, 均有 $g(x)>c$; 由于

$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=+\infty$, 故存在 $x_n>M$, 因此 $g(x_n)>c$. 这与 $g(x_n)$ 为定值 c 矛盾.

综上, 对任意正实数 x, 都有 $f(x)=x$. □

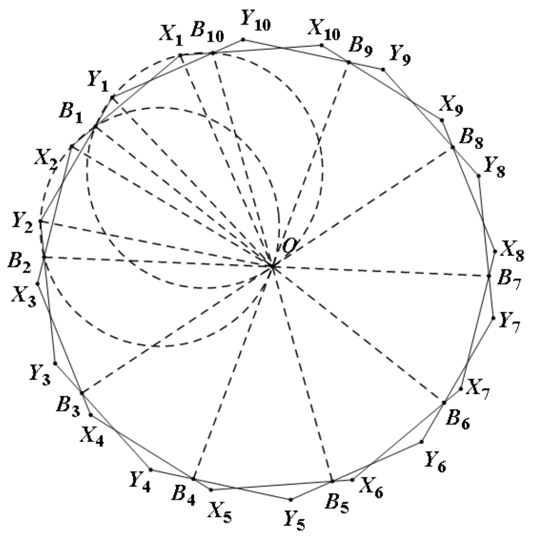
评注 本题为中档题. 一方面, 我们从条件出发. 函数的定义域中没有 0, 考虑 $x=1, y=1, x=y$ 等等较特殊的取值看起来也不太能较好地化简条件得到信息. 注意到条件式两边的每一项都有 f, 所以我们尝试能否消掉其中的一些项. 在这个尝试的过程中, 我们便不难得到结论 1. 另一方面, 我们从结论出发, 作代换 $g(x)=f(x)-x$ 是自然的, 而代入条件式后发现 g 的关系中关于 x, y 的对称性较高, 所以我们尝试交换 x, y 作差, 消掉大部分项, 我们便得到了结论 2. 事实上, 结论 2 很好用, 因为有了它，我们配凑 $g(a)=g(b)$ 就能得到大量信息, 于是完成证明就不难了. 法二我们尝试用分析语言说明问题. 一方面易知 $g(x)$ 无上界, 另一方面在得到 $g(x)$ 不是单射后, 通过迭代得到一个单调递增无上界, 且 $g(x)$ 在其上为定值的子序列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$, , 从而产生矛盾.

题 5. 凸 200 边形 $A_1A_2\cdots A_{200}$ 的所有边被相间地涂成了红蓝两色. 假设所有红边延长相交可以形成一个正 100 边形, 所有蓝边延长相交也可以形成一个正 100 边形. 证明: 凸 200 边形 $A_1A_2\cdots A_{200}$ 的 50 条对角线 $A_1A_{101}, A_3A_{103}, \cdots, A_{99}A_{199}$ 共点.

证明 不妨记所有红边延长相交构成的正 100 边形为 $X_1X_2\cdots X_{100}$, 所有蓝边延长相交构成的正 100 边形为 $Y_1Y_2\cdots Y_{100}$, 且

$$X_iX_{i+1}\cap Y_iY_{i+1}=A_{2i-1}=B_i,\ i=1,2,\cdots,100,$$

这里下标 mod 100 处理. (为简单化, 我们以 10 替代 100 作如下示意图)



设这两个正 100 边形的旋转相似中心为 O, 我们断定 $B_1B_{51}, B_2B_{52}, \cdots$, $B_{50}B_{100}$ 必共点于 O. 为此, 我们证明更强结论:

对任意 $i = 1, 2, \cdots, 100$, 均有 $\angle B_iOB_{i+1} = \frac{\pi}{50}$, 这里 $B_{101} = B_1$.

事实上, 注意到 O 为旋转相似中心, 故有

$$\triangle X_iOX_{i+1} \sim \triangle Y_iXY_{i+1},$$

由此可知

$$\angle X_{i+1}B_iY_{i+1} = \angle X_{i+1}OY_{i+1},$$

这说明 O, B_i, Y_{i+1}, X_{i+1} 共圆.

同理可知 O, B_i, X_i, Y_i 共圆, 从而有 O, B_i, Y_{i+1}, B_{i+1}, X_{i+1} 共圆, 因此

$$\begin{aligned}\angle B_iOB_{i+1} &= \pi - \angle B_iY_{i+1}B_{i+1} \\ &= \pi - \angle Y_iY_{i+1}Y_{i+1} \\ &= \pi - \frac{49}{50}\pi = \frac{\pi}{50},\ i = 1, 2, \cdots, 100.\end{aligned}$$

故 $B_1B_{51}, B_2B_{52}, \cdots, B_{50}B_{100}$ 共点于 O, 也即 $A_1A_{101}, A_3A_{103}, \cdots, A_{99}A_{199}$ 共点于 O. 证毕! □

评注 本题为中档题. 首先题中的 100 边形是无法画图的, 这样的几何问题并不常见. 在解题过程中, 我们只好试着将 100 改成 3,4,5 等较小的数作图, 并尝试在图形中发掘重要的巧合. 值得一提的是, 要证明 100 条直线共点, 所共的点很可能是某种巧合点, 如果观察图中的一个局部 $B_{10}B_1B_2X_1X_2Y_1Y_2$, 我们发现这是相交两圆的经典构型, 于是圆 $(B_1Y_1X_1B_{10})$ 与圆 $(B_1X_2Y_2B_2)$ 的异于 B_1 的交点 O 便关联了丰富的旋转位似信息, 它就是“高度可疑”的共点处. 事实上, 我们切换视角, 改变 O 的定义方式, 即考虑两个 100 边形的旋转位似中心, 就可以一劳永逸的解决问题. 另外, 本题的共点证明部分, 也可以通过复数法计算.

题 6. 证明: 对任意奇数 $n > 1$, 均存在两个正整数 a, b, 使得多项式 $Q(x) = (x+a)^2 + b$ 同时满足如下三个条件:

(i) $(a, n) = (b, n) = 1$;

(ii) $Q(0)$ 可以被 n 整除;

(iii) $Q(1), Q(2), Q(3), \cdots$ 中每个数均有一个不能整除 n 的素因子.

证明 设 n 的所有素因子从小到大依次为 $p_1, p_2, \cdots, p_k$, 我们分几步完成证明.

结论 1 存在素数 $q_1, q_2, \cdots, q_k$, 使得对任意 $1 \le i \le k$, 有

$$\left(\frac{p_j}{q_i}\right) = \begin{cases} 1\ (j \ne i), \\ -1\ (j = i). \end{cases}$$

证明 任取一个 $\bmod p_j\ (1 \le j \le k)$ 的二次剩余 d_j, 和一个 $\bmod p_j$ 的非二次剩余 e_j. 由中国剩余定理及 Dirichlet 定理, 存在素数 q_i 满足以下同余方程组

$$\begin{cases} q_i = 1 \pmod 4, \\ q_i = e_i \pmod{p_i}, \\ q_i = d_j \pmod{p_j}\ (j \ne i). \end{cases}$$

结合二次互反律, 有

$$\left(\frac{p_j}{q_i}\right) = \left(\frac{q_i}{p_j}\right) \cdot (-1)^{\frac{(p_j-1)(q_i-1)}{4}} = \left(\frac{q_i}{p_j}\right) = \left(\frac{d_j}{p_j}\right) = 1\ (j \ne i),$$
$$\left(\frac{p_i}{q_i}\right) = \left(\frac{q_i}{p_i}\right) \cdot (-1)^{\frac{(p_i-1)(q_i-1)}{4}} = \left(\frac{q_i}{p_i}\right) = \left(\frac{e_i}{p_i}\right) = -1.$$

证毕!

令 $b = mq_1q_2\cdots q_k$, 其中正整数 m 满足同余方程组

$$m \equiv -\frac{d_i}{q_1q_2\cdots q_k} \pmod{p_j}\ (j = 1, 2, \cdots, k).$$

结论 2 对上述 b, 只存在有限个正整数 x, 使得 $x^2 + b$ 的素因子均在 $\{p_1, p_2, \cdots, p_k\}$ 中.

证明 设 $x^2 + b = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$, 于是

$$\left(\frac{p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}}{q_1}\right) = \left(\frac{p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}}{q_2}\right) = \cdots = \left(\frac{p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}}{q_k}\right) = 1.$$

由结论 1 可知

$$\left(\frac{p_1^{\alpha_1}}{q_1}\right) = \left(\frac{p_2^{\alpha_2}}{q_2}\right) = \cdots = \left(\frac{p_k^{\alpha_k}}{q_k}\right) = 1.$$

注意到 $\left(\frac{p_i}{q_i}\right) = -1\ (1 \le i \le k)$, 故

$$(-1)^{\alpha_1} = (-1)^{\alpha_2} = \cdots = (-1)^{\alpha_k} = 1,$$

这说明

$$\alpha_1 \equiv \alpha_2 \equiv \cdots \equiv \alpha_k \equiv 0 \pmod 2,$$

因此

$$x^2 + b = \left(p_1^{\frac{\alpha_1}{2}}p_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\cdots p_k^{\frac{\alpha_k}{2}}\right)^2 \ge (x+1)^2,$$

从而 $x \le \frac{b-1}{2}$. 故只存在有限个正整数 x 满足条件. 证毕!

由结论 2 可知, 对充分大的正整数 x, $x^2 + b$ 均有不整除 n 的素因子.

结论 3 存在正整数 a, 使得 $a^2+b\equiv 0 \pmod{n}$.

证明 我们证明更强结论:

对任意的 $1\le i\le k$, 以及正整数 l, 存在正整数 a, 使得 $a^2+b\equiv 0 \pmod{p_i^l}$.

我们对 l 采用数学归纳法进行证明.

$l=1$ 时, 由于 $\left(\frac{-b}{p_i}\right)=\left(\frac{-mq_1q_2\cdots q_k}{p_i}\right)=\left(\frac{d_i}{p_i}\right)=1$, 故存在 a, 使得 $a^2+b\equiv 0 \pmod{p_i^l}$.

若 l 时结论成立, 设正整数 a 满足 $a^2+b\equiv 0 \pmod{p_i^l}$. 则 $l+1$ 时, 考虑如下 p_i 个数:

$$a^2+b,(a+p_i^l)^2+b,\cdots,(a+(p_i-1)p_i^l)^2+b,$$

它们均为 p_i^l 的倍数, 且 $\bmod\ p_i^{l+1}$ 的余数互不相同, 故恰有 1 个是 p_i^{l+1} 的倍数. 故 $l+1$ 时结论也成立. 由数学归纳法可知结论对任意正整数 l 均成立.

将 n 标准分解, 对其每一个素因子的幂次, 应用更强结论, 即可知结论 3 成立. 证毕!

由结论 2 及结论 3, 可知存在正整数 a,b, 使得 $a^2+b\equiv 0 \pmod{n}$, 且对于 $x\ge a$, x^2+b 均有不整除 n 的素因子. 又由 b 的定义及结论 3, 显然有 $(a,n)=(b,n)=1$, 故存在符合题意的正整数 a,b. 证毕! $\square$

评注 本题为难题, 需要了解二次互反律并具备很强的数论综合分析能力. 一种可能的思考方式为从结构简单的 n 入手考虑, 如 $n=p,n=p^2,n=pq$ (这里 p,q 均为素数). 这些思考启发我们找寻素数 $q_1,q_2\cdots,q_k$ 使得勒让德符号 $\left(\frac{n}{q_i}\right)$ 只与 $v_{p_i}(n)$ 有关, 进而导出关键的结论 2. 此后问题便不难解决了.