一个匈牙利 Kürschák 竞赛问题新解

刘胤辰

(上海中学, 200231)

文献 [1] 中利用概率方法给出了匈牙利 Kürschák 竞赛 2005 年第一题的一个解. 本文, 我们给出该题的一个直接构造解法.

2005.1 给定正整数 $N > 1, a_1, \dots, a_N$ 为非负实数且和至多为 500. 证明: 存在整数 $k \geq 1$ 及整数 $1 = n_0 < n_1 < \cdots < n_k = N$, 使得 $\sum_{i=1}^{k} n_i a_{n_{i-1}} < 2005$.

证明. 取整数 k, 使得 $2^k \leq N < 2^{k+1}$.

记 $n_0 = 1, n_1 = 2$. 取 $n_d (d = 3, 4, \cdots, k-1)$ 为 $a_{2^{d-1}+1}, a_{2^{d-1}+2}, \cdots, a_{2^d}$ 中最小数的下标; 取 $n_k = 2^k$.

于是,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} n_i a_{n_{i-1}} &\leq \sum_{i=1}^{k} 2^i a_{n_{i-1}} = 4\sum_{i=1}^{k} 2^{i-2} a_{n_{i-1}} \\ &\leq 4\sum_{i=1}^{k} (a_{2^{i-2}+1} + \cdots + a_{2^{i-1}}) \\ &= 4\sum_{i=1}^{2^k} a_i \leq 4\sum_{i=1}^{N} a_i \leq 2000 < 2005.\end{aligned}$$

命题得证! □

参考文献

[1] 侯傑夫, 王琇, 尹顺. 匈牙利 Kürschák 竞赛(1975—2007). 数学新星网, www.nsmath.cn.