数学新星网 ※ 教师专栏
www.nsmath.cn/jszl

一类三角级数的最佳系数问题

赵斌

(海亮高级中学, 311800)

本文主要解决以下两个关于三角级数的最佳系数问题.

问题 1 给定正整数 $n, k, n \geq k$, 已知 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为实数, 对任意实数 x 都有

$$A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \cdots + A_n \cos nx \leq 1,$$

求 A_k 的最大值.

问题 2 给定正整数 $n, k, n \geq k$, 已知 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为实数, 对任意实数 x 都有

$$|A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \cdots + A_n \cos nx| \leq 1,$$

求 A_k 的最大值.

虽然看似是只是是否加绝对值的区别, 但事实上区别蛮大的. 在解决该问题后我咨询了单元多项式方面的专家 Tamas Erdelyi 教授, 被告知此结论是已有结论. 在 Q.L.Rahman 和 G.Schmeisser 写的书《Analytic Theory of Polynomials》的第 16 章的定理 16.2.2、定理 16.2.4 以及推论 16.2.6 中已经出现过. 但我们这里的证明应该更容易被中学生理解.

I. 主要结果及证明

定理 1 给定正整数 n, 已知 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为实数, 且对任意实数 x 都有

$$A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \cdots + A_n \cos nx \leq 1,$$

则 A_1 的最大值为 $2\cos\frac{\pi}{n+2}$.

修订日期: **2021-02-05.**

证明 我们先来解决 n 为奇数的情形, 设 $n=2m-1, m\in\mathbb{N}^*$, 设 $\alpha=\frac{\pi}{2m+1}$. 我们先来证明一个引理:

引理 1 记

$$u_j=\begin{cases}1+\cos\alpha, & j=0,\\ 2\cos(2j\alpha)+2\cos\alpha, & 1\le j\le m-1.\end{cases}$$

则我们有

$$\sum_{j=0}^{m-1}u_j\cos(2kj\alpha)=\begin{cases}(2m+1)\cos\alpha, & k=0,\\ m+\frac{1}{2}, & k=1,\\ 0, & 2\le k\le m.\end{cases}$$

引理的证明是简单的, 只是一些计算, 关键是发现这些等式.

证明 对于 $2\le k\le m$,

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{m-1}u_j\cos(2kj\alpha)\\
=&1+\cos\alpha+2\sum_{j=1}^{m-1}\cos(2kj\alpha)\cos(2j\alpha)+2\cos\alpha\sum_{j=1}^{m-1}\cos(2kj\alpha)\\
=&1+\cos\alpha+\sum_{j=1}^{m-1}\cos(2(k+1)j\alpha)+\sum_{j=1}^{m-1}\cos(2(k-1)j\alpha)+2\cos\alpha\sum_{j=1}^{m-1}\cos(2kj\alpha)\\
=&1+\cos\alpha+\frac{(-1)^k\sin 2(k+1)\alpha-\sin(k+1)\alpha}{2\sin(k+1)\alpha}\\
&+\frac{(-1)^k\sin 2(k-1)\alpha-\sin(k-1)\alpha}{2\sin(k-1)\alpha}+\cos\alpha\cdot\frac{(-1)^{k-1}\sin 2k\alpha-\sin k\alpha}{\sin k\alpha}\\
=&1+\cos\alpha+(-1)^k\cos(k+1)\alpha-\frac{1}{2}+(-1)^k\cos(k-1)\alpha-\frac{1}{2}\\
&+(-1)^{k-1}2\cos\alpha\cos k\alpha-\cos\alpha\\
=&(-1)^k(\cos(k+1)\alpha+\cos(k-1)\alpha-2\cos\alpha\cos k\alpha)=0.\end{aligned}$$

对于 $k=0,1$ 的时候也可以类似计算.

回到原题. 一方面, 记

$$f(x)=A_1\cos x+A_2\cos 2x+\cdots+A_{2m-1}\cos(2m-1)x,$$

由于对任意 $j, 0\le j\le m-1, u_j\ge 0$, 故我们有,

$$\sum_{j=0}^{m-1}u_j\cdot f(2j\alpha)\le\sum_{j=0}^{m-1}u_j,$$

令 $B_1=A_1; B_k=A_k+A_{2m+1-k}, 2\le k\le m$, 由引理得,

$$\sum_{j=0}^{m-1}u_jf(2j\alpha)=\sum_{j=0}^{m-1}u_j\sum_{k=1}^{m}B_k\cos(2kj\alpha)=\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=1}^{m}u_jB_k\cos(2kj\alpha)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} B_k \sum_{j=0}^{m-1} u_j \cos(2kj\alpha) = B_1 \cdot (m + \frac{1}{2}),$$

而又

$$\sum_{j=0}^{m-1} u_j = (2m+1)\cos\alpha,$$

故我们有

$$A_1 = B_1 \leq 2\cos\alpha.$$

另一方面, 我们来构造一个例子符合条件且 $A_1 = 2\cos\alpha$. 记

$$g(x) = (1-\cos x)\prod_{k=1}^{m-1}(\cos x - \cos(2k\alpha))^2,$$

容易知道, $g(x)$ 还可以写成如下形式:

$$g(x) = a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + \cdots + a_{2m-1}\cos(2m-1)x,$$

故由于 $g(2j\alpha) = 0, 0 \leq j \leq m-1$, 故我们有

$$\sum_{j=0}^{m-1} u_j g(2j\alpha) = 0,$$

从而我们有

$$(2m+1)\cos\alpha \cdot a_0 + (m+\frac{1}{2}) \cdot a_1 = 0,$$

即

$$a_1 = -2\cos\alpha \cdot a_0,$$

且易知,

$$a_0 = \frac{\sum_{k=0}^{2m} g(2k\alpha)}{2m+1} = \frac{2g(2m\alpha)}{2m+1} > 0,$$

故我们可取,

$$g(x) = -\frac{a_1}{a_0}\cos x - \frac{a_2}{a_0}\cos 2x - \cdots - \frac{a_{2m-1}}{a_0}\cos(2m-1)x,$$

即符合条件.

对于 n 为偶数的情形, 设 $n = 2m, m \in \mathbb{N}^*$, 设 $\alpha = \frac{\pi}{2m+2}$. 我们先来证明一个引理:

引理 2 记 $u_j = \cos\alpha + \cos(2j-1)\alpha, 1 \leq j \leq m$. 则我们有,

$$\sum_{j=1}^{m} u_j \cos(k(2j-1)\alpha) = \begin{cases} (m+2)\cos\alpha, & k=0, \\ \frac{m}{2}+1, & k=1, \\ 0, & 2 \leq k \leq m. \end{cases}$$

引理的证明以及应用引理证明原问题的方法与 $n=2m-1$ 时完全一样. 故我们完成了证明. □

一个更一般的结果.

定理 2 给定正整数 n, 已知 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为实数, 对任意实数 x 都有:

$$A_1\cos x + A_2\cos 2x + \cdots + A_n\cos nx \le 1,$$

则 A_k 的最大值为 $2\cos\frac{\pi}{p+2}$, 其中 $p=\lfloor\frac{n}{k}\rfloor$.

证明 记

$$f(x) = A_1\cos x + A_2\cos 2x + \cdots + A_n\cos nx,$$

则对于任意 x,

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{f(x)+f(x+\frac{2\pi}{k})+\cdots+f(x+\frac{2(k-1)\pi}{k})}{k} \\ &= A_k\cos y + A_{2k}\cos 2y + \cdots + A_{pk}\cos py \le 1, \end{aligned}$$

其中 $y=px$, 利用上个定理的结论, 可得 A_k 的最大值为 $2\cos\frac{\pi}{p+2}$. □

定理 3 给定正整数 n, 已知 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为实数, 对任意实数 x 都有:

$$|A_1\cos x + A_2\cos 2x + \cdots + A_n\cos nx| \le 1,$$

则 A_1 的最大值为

$$\frac{2\cot\frac{\pi}{2\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor+2}}{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor+1}.$$

证明 事实上我们只要解决 n 为奇数的情形, n 为偶数的情形是一样的.

我们先来证明 $n=4m-1, m\in\mathbb{N}^*$ 的情形, 记 $\alpha=\frac{\pi}{4m+2}$. 令,

$$f(x) = A_1\cos x + A_2\cos 2x + \cdots + A_{4m-1}\cos(4m-1)x,$$

故我们有,

$$\begin{aligned} g(x) &= A_1\cos x + A_3\cos 3x + \cdots + A_{4m-1}\cos(4m-1)x \\ &= \frac{f(x)-f(x+\pi)}{2} \le 1. \end{aligned}$$

因此

$$g((2j-1)\alpha) \le 1, 1\le j\le m.$$

故

$$\sum_{j=1}^{m}\cos(2j-1)\alpha\cdot g((2j-1)\alpha) \le \sum_{j=1}^{m}\cos(2j-1)\alpha.$$

而

$$\sum_{j=1}^{m}\cos(2j-1)\alpha=\frac{\sin 2m\alpha}{2\sin\alpha}=\frac{\cot\alpha}{2},$$

且

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m}\cos(2j-1)\alpha\cdot g((2j-1)\alpha)\\
=&\sum_{j=1}^{m}\cos(2j-1)\alpha\cdot\left(\sum_{k=1}^{2m}A_{2k-1}\cos((2j-1)(2k-1)\alpha)\right)\\
=&\sum_{k=1}^{2m}A_{2k-1}\sum_{j=1}^{m}\cos(2j-1)\alpha\cdot\cos((2j-1)(2k-1)\alpha)\\
=&A_1\sum_{j=1}^{m}\cos^2(2j-1)\alpha\\
=&A_1\cdot\frac{2m+1}{4}.
\end{aligned}$$

故

$$A_1\le\frac{2\cot\frac{\pi}{4m+2}}{2m+1}.$$

对于 $n=4m-3,m\in\mathbb{N}^*$ 的情形, 证明完全是一样的, 只需要取点为 $\frac{0\cdot\pi}{2m},\frac{1\cdot\pi}{2m},\cdots,\frac{(m-1)\cdot\pi}{2m}$. 并考虑,

$$\frac{1}{2}g(0)+\sum_{j=1}^{m-1}\cos 2j\alpha g(2j\alpha),\alpha=\frac{\pi}{4m}.$$

下面我们来构造例子, 我们来给出统一的构造. 记 $m=\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor$, 从而我们有 $n=2m$ 或 $2m-1$, 在这里令 $\alpha=\frac{\pi}{2m+2}$. 并记

$$f(x)=\frac{1}{(m+1)^2}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\{(2m-2j+3)\cot(2j-1)\alpha+\cot\alpha\}\cdot\cos(2j-1)x,$$

那么 $f(x)$ 满足其首项系数

$$A_1=\frac{2\cot\frac{\pi}{2m+2}}{m+1},$$

故我们只需证明对任意 $x\in\mathbb{R}$, 都有 $-1\le f(x)\le 1$ 即可.

令 $\theta_\nu=\frac{\nu\pi}{m+1},1\le|\nu|\le m$, 记

$$\begin{aligned}
S(x)&=f(x-\frac{\pi}{2})\\
&=\frac{1}{(m+1)^2}\sum_{j=1}^{m}\{(2m-2j+3)\cot(2j-1)\alpha+\cot\alpha\}\cdot\sin(2j-1)x\\
&=\frac{1}{(m+1)^2}\sum_{j=1}^{m+1}\{(2m-2j+3)\cot(2j-1)\alpha+\cot\alpha\}\cdot\sin(2j-1)x
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(m+1)^2}\sum_{j=1}^{m+1}(2m-2j+3)\cot(2j-1)\alpha\cdot\sin(2j-1)x \\
&+ \frac{1}{(m+1)^2}\sum_{j=1}^{m+1}\cot\alpha\cdot\sin(2j-1)x,
\end{aligned}
$$

并注意到

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin^2(m+1)x}{\sin x} &= \sin x\left\{(m+1)+2\sum_{k=1}^{m}(m+1-k)\cos 2kx\right\} \\
&= \sum_{j=1}^{m+1}\sin(2j-1)x,
\end{aligned}
$$

记

$$
h_\nu(x) = \frac{1}{(2m+2)^2}\frac{\sin^2(m+1)x}{\sin^2\left(x-\theta_\nu\right)/2},\quad 1\le|\nu|\le m,
$$

我们有

$$
\begin{aligned}
h_\nu(x)-h_{-\nu}(x) &= \frac{2}{(2m+2)^2}\sum_{k=1}^{2m+1}(2m+2-k)\left(\cos k\left(x-\theta_\nu\right)-\cos k\left(x+\theta_\nu\right)\right) \\
&= \frac{1}{(m+1)^2}\sum_{k=1}^{2m+1}(2m+2-k)\sin k\theta_\nu\sin kx,
\end{aligned}
$$

再根据,

$$
\sum_{\nu=1}^{m}\sin\frac{\nu k\pi}{m+1} = \begin{cases} 0, & \text{若 } k \text{ 偶数}, 1\le k\le 2m, \\ \cot\frac{k\pi}{2m+2}, & \text{若 } k \text{ 奇数}, 1\le k\le 2m, \end{cases}
$$

我们有

$$
\sum_{\nu=1}^{m}\left(h_\nu(x)-h_{-\nu}(x)\right) = \sum_{j=1}^{m+1}\left\{(2m-2j+3)\cot\frac{(2j-1)\pi}{2(m+1)}\right\}\frac{\sin(2j-1)x}{(m+1)^2},
$$

从而

$$
S(x) = \sum_{\nu=1}^{m}\left(h_\nu(x)-h_{-\nu}(x)\right)+\frac{\cot\alpha\cdot\sin^2(m+1)x}{(m+1)^2\sin x},
$$

而 $\frac{\cot\alpha\cdot\sin^2(m+1)x}{(m+1)^2\sin x}$ 在 $\theta_\nu, 1\le|u|\le m$ 处的值与导数均为 0 , 且

$$
h_\nu\left(\theta_\mu\right)=0 \text{ 若 } \mu\ne\nu, h_\nu\left(\theta_\nu\right)=1, \text{ 且 } h'_\nu\left(\theta_\mu\right)=0 \ \text{ 其中 } 1\le|\nu|,|\mu|\le m,
$$

故我们有 $S(x)$ 在 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$ 处的取值为 1 , 导数均为 0, 由 Rolle 定理, $S'(x)$ 在 $(\theta_1,\theta_2),(\theta_2,\theta_3),\cdots,(\theta_{m-1},\theta_m)$ 处至少有 $m-1$ 个零点, 再加上 $S'(x)$ $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$ 处为 0 , 故 $S'(x)$ 至少在 $(0,\pi)$ 上的 $2m-1$ 点处取值为 0 , 再由 $S'(x)$ 是偶函数, 从而在 $(-\pi,\pi)$ 上至少有 $4m-2$ 个零点, 且由于这是个次数为 $2m-1$ 次的三角多项式, 故在 $[-\pi,\pi)$ 上至多有 $4m-2$ 个零点, 故 $S''(x)$ 的零点与 $S'(x)$ 的零点不同.

故所有的这 $4m-2$ 个零点处都为局部的极大值或极小值, 且 $S(0)=S(\pi)=0$, 故我们得到在 $S(x)$ 在 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$ 处均取到极大值 1 , 从而 $S(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上没有其他极大值点, 故我们有 $S(x)\le 1, x\in(0,\pi)$. 另一方面我们易得,

$$S(x)=\sum_{\nu=1}^{m}(h_\nu(x)-h_{-\nu}(x))+\frac{\cot\alpha\cdot\sin^2(m+1)x}{(m+1)^2\sin x}\ge 0, x\in(0,\pi),$$

结合 $S(x)$ 奇函数, 我们有对任意 $x\in\mathbb{R}$, $-1\le S(x)\le 1$. 故我们完成了构造. □

注 这里的构造部分我们参考了文献 [1]. 构造的最后一部分用了结论: 一个非零的 n 次三角函数在一个周期内根的个数至多只有 $2n$ 个. 这个是容易的,可转为 $z=e^{ix}$ 的根个数.

一般地, 根据定理 1 到定理 2 的相同做法,我们有如下结果:

定理 4 给定正整数 $n,k,n\ge k$, 已知 $A_1,A_2,\cdots,A_n$为实数,对任意实数 x 都有

$$|A_1\cos x+A_2\cos 2x+\cdots+A_n\cos nx|\le 1,$$

则 A_k 的最大值为

$$\frac{2\cot\frac{\pi}{2m+2}}{m+1}.$$

其中$m=\lfloor\frac{n+k}{2k}\rfloor$.

II. 相关问题

注 (1) 本结论推广了 1977 年 IMO 试题.

题 1 已知 a,b,A,B 都是实数,若对于一切实数 x,都有

$$f(x)=1-a\cos x-b\sin x-A\cos 2x-B\sin 2x\ge 0,$$

求证: $a^2+b^2\le 2, A^2+B^2\le 1$.

事实上, 我们有如下结果:

题 2 已知 $A_k,B_k,1\le k\le n$ 都是实数,若对于一切实数 x,都有,

$$f(x)=1-\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)\ge 0,$$

求证: $A_1^2+B_1^2\le 4\cos^2\frac{\pi}{n+2}, A_n^2+B_n^2\le 1, A_k^2+B_k^2\le 4\cos^2\frac{\pi}{p+2}, p=\lfloor\frac{n}{k}\rfloor$.

简证 只解决 $A_1^2+B_1^2\le 4\cos^2\frac{\pi}{n+2}$, 首先由辅助角公式, 设 $y=x+\phi$,

$$g(y)=1-\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cos(y)-\sum_{k=1}^{n}(A_k'\cos ky+B_k'\sin kx)\ge 0,$$

然后再考虑

$$g(y)+g(-y)\geq 0,$$

即可用第 1 题结论. □

注 (2) 事实上我们可以命制如下有意思的问题:

题 3 记 n 为正整数, $A_2, A_3, \cdots, A_n$ 为实数,则一定存在 $x\in\mathbb{R}$ 使得

$$\cos x + A_2\cos 2x + A_3\cos 3x + \cdots + A_n\cos nx > \frac{1}{2}.$$

注 (3) 同样地利用定理 3 的结论我们也可以命制如下有意思的问题:

题 4 记 n 为正整数, $A_2, A_3, \cdots, A_n$ 为实数,则一定存在 $x\in\mathbb{R}$ 使得

$$|\cos x + A_2\cos 2x + A_3\cos 3x + \cdots + A_n\cos nx| > \frac{\pi}{4}.$$

值得注意的是该问题不仅可以用题 3 的结论, 还有个直接的做法.

证明 记

$$M=\max_{x\in\mathbb{R}}|\cos x + A_2\cos 2x + A_3\cos 3x + \cdots + A_n\cos nx|,$$

且

$$f(x)=\cos x + A_2\cos 2x + A_3\cos 3x + \cdots + A_n\cos nx,$$

则我们有

$$4M = M\cdot\int_0^{2\pi}|\cos x|dx \geq \int_0^{2\pi} f(x)\cos x dx = \int_0^{2\pi}\cos^2 x dx = \pi,$$

从而 $M\geq\frac{\pi}{4}$, 并且我们容易知道等号是取不到的, 故

$$M>\frac{\pi}{4},$$

即证明了原问题. □

致谢 感谢在写作过程中张端阳老师提供了绝对值情形的特例. 感谢在写作中冷岗松教授的鼓励. 感谢赖力博士在查阅相关资料上的帮助. 感谢龙崎岗老师在计算 u_j 时提供的一些特殊数据上的计算.

参考文献

[1] Q.L.Rahman,G.Schmeisser. Analytic Theory of Polynomials. London Mathematical Society.