2020 年环球城市竞赛秋季 A 水平试题解析

汤礼达

(湖南师范大学附属中学, 410006)

第 42 届环球数学比赛于 2020 年 10 月 25 日举行, 这是一个由俄罗斯组织的锦标赛, 选手可以在自己所在城市参加比赛, 比赛时长 5 个小时. 比赛结束后, 再将解答扫描发给组委会批阅, 记得分最高的三个题为选手成绩. A水平的两套试题以组合为主, 难度与全俄数学竞赛相当, 重在考查学生的思维能力. 笔者水平有限, 不当之处还请指正.

I. 试 题

A 水平 8–9 年级

1. (4 分) 是否对任意的凸四边形, 都有一个圆和它的每条边交于两个内点?

2. (7 分) 称由两个不同的正整数组成的数对为“成功对”, 若它们的算术平均数和几何平均数都是正整数.

问: 是否对每一个“成功对”, 都有与其算术平均数相等的另一个“成功对”与之对应? (数对 $(a,\ b)$ 和 $(b,\ a)$ 视为相同.)

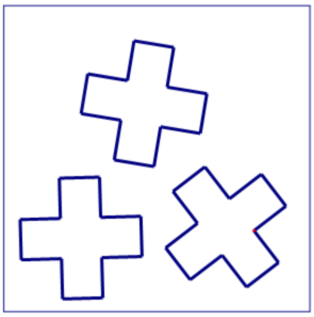
3. (3 分+4 分) 彼得和瓦夏进行规则如下的游戏: 每一轮, 彼得说一个整数, 瓦夏在黑板上只能写下该数, 或者是写下该数加上黑板上之前所有的数的和, 问:

(1) 彼得能否保证在某时刻, 黑板上写的数中至少有 100 个 5 ?

(2) 彼得能否保证在某时刻, 黑板上写的数中至少有 100 个 10 ?

4. (7 分) 记“十字”形是由五个 1×1 正方形组成 (其中的四个都和第五个有公共边). 能否从 8×8 的棋盘中剪出 9 个这样的“十字”形?不一定沿着方格线剪. (图中为剪出 3 个“十字”形的一种方法)

修订日期: 2021-02-11.



5. (8 分) 是否存在 100 个互不相同的正整数, 其中一个数的立方等于剩下 99 个数的立方的和?

6. (10 分) 两张圆桌各坐有 n 个精灵, 每个精灵只和与他相邻的两个精灵是朋友. 天使可以让精灵中新产生 $2n$ 对朋友(每一对精灵可以来自同一桌, 也可以来自两桌), 而恶魔会从新产生的 $2n$ 对朋友中选取 n 对朋友使他们绝交.

问: 对怎样的正整数 n, 天使能够做到无论恶魔如何行动, 都可以让这 $2n$ 个精灵都坐在同一张圆桌上, 并使得每两个相邻的精灵都是朋友.

7. (6 分+6 分) 凸四边形 $ABCD$ 的四条边满足任何三条边都不能围成三角形, 证明:

(1) 在凸四边形 $ABCD$ 中至少有一个内角不大于 $60°$,

(2) 在凸四边形 $ABCD$ 中至少有一个内角不小于 $120°$.

A 水平 10–11 年级

1. (4 分) 给定 n 个正整数能满足任两个数的算术平均值和几何平均值中至少有一个是整数. 波利亚在黑板上写出这 n 个数的任两个数的算术平均值, 在另一块白板上写出这 n 个数的任两个数的几何平均值.

证明: 黑板和白板中至少有一块板子上所写的数全都是整数.

2. (5 分) 闵希豪森男爵想出一个结论: 如果多项式

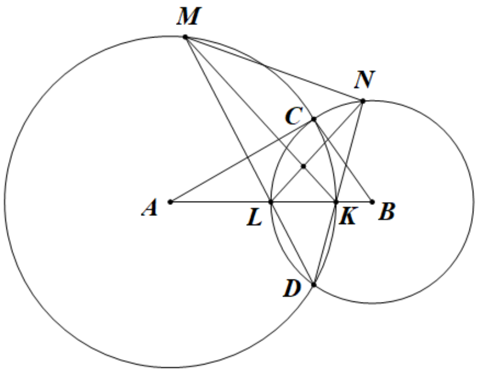
$$P(x) = x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots$$

有 n 个正整数根, 则平面上存在 a 条直线可恰产生 b 个交点. 证明或否定该结论.

3. (6 分) 已知 $\odot A$, $\odot B$ 相交于 C, D 两点, 线段 AB 与 $\odot A$, $\odot B$ 的交点分别为 K, L. 直线 DL 与 $\odot A$ 交于另一点 M, 直线 DK 与 $\odot B$ 交于另一点 N.

证明: 四边形 $KLMN$ 的对角线的交点为 $\triangle ABC$ 的内心.

4. (7 分) 同 $8-9$ 年级 6.



5. (7 分) 是否存在一个可以被分为 100 个小矩形的矩形, 满足: 每一个小矩形均与原矩形相似但两两不同且任意两个小矩形没有重叠的部分(边界除外)?

6. (10 分) 彼得和瓦夏轮流在黑板上写具有形式 $\frac{1}{n}$ 的分数, 其中 n 为正整数. 彼得先写, 彼得每一步只写一个分数; 瓦夏第一步写一个分数, 第二步写两个分数, 以此类推, 每步比前一步多写一个分数. 瓦夏想要使得某一步之后黑板上所有分数之和是正整数.

问: 彼得能否阻止瓦夏实现她的想法?

7. (12 分) 一只甲虫位于 $1000 \times n$ 的棋盘左下角的方格, 其中 n 为大于 2020 的奇数. 棋盘中有两个象, 分别位于左上角和右下角的两个方格. 每一步, 甲虫可以跳到相邻的一个方格或者使用国际象棋中马的走法跳动, 甲虫想要到达棋盘右上角的方格, 但不能进入象所在的方格或象能攻击到的方格(其中象使用国际象棋的走法, 且在能攻击到甲虫之前不动), 并经过其他所有方格恰好一次.

证明: 甲虫到达右上角的方格所跳的路径数与 n 无关.

II. 解答与评注

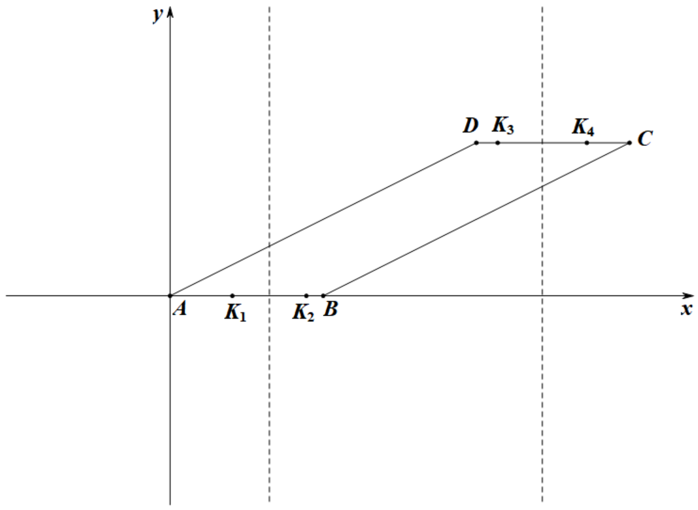
A 水平 8–9 年级

题 1 是否对任意的凸四边形, 都有一个圆和它的每条边交于两个内点?

解 (刘鹏远) 答案是否定的.

在平面直角坐标系 xOy 中, 设 $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(3,1)$, $D(2,1)$.

假设存在一个圆 M 与四边形 $ABCD$ 的每条边都相交于两个内点. 设 $\odot M$ 交 AB 边于内点 $K_1(x_1,\ 0)$, $K_2(x_2,\ 0)$, 其中 $x_1 < x_2$, $\odot M$ 交 CD 边于内点 $K_3(x_3,\ 1)$, $K_4(x_4,\ 1)$, 其中 $x_3 < x_4$.



由内点的定义, 有

$$0 = x_A < x_1 < x_2 < x_B = 1,\ 2 = x_D < x_3 < x_4 < x_C = 3.$$

由圆心 M 在线段 K_1K_2 中垂线上, 知 $x_M = \frac{x_1+x_2}{2} < 1$, 又由圆心 M 在线段 K_3K_4 中垂线上, 知 $x_M = \frac{x_3+x_4}{2} > 2$, 这样得到 $x_M < 1$ 又 $x_M > 2$, 矛盾!

故假设不成立, 这样的圆不存在, 所以答案是否定的. □

评注 只需要构造一个足够斜的平行四边形可使得这样的圆不存在.

题 2 称由两个不同的正整数组成的数对为"成功对", 若它们的算术平均数和几何平均数都是正整数.

问: 是否对每一个"成功对", 都有与其算术平均数相等的另一个"成功对"与之对应? (数对 $(a,\ b)$ 和 $(b,\ a)$ 视为相同.)

解 (刘浩) 答案是肯定的.

事实上, 对任意一个"成功对" (a, b) , 我们可以构造另一个"成功对" $(a',\ b')$, 令

$$(a',\ b') = \left(\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2},\ \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{2}\right)$$

此时 $a',\ b'$ 的算术平均数也为 $\frac{a+b}{2}$, 几何平均数为 $\frac{|a-b|}{2}$, 均为正整数.

下面我们只需要验证: $a',\ b' \in \mathbb{N}_+,\ a' \neq b'$ 且 $(a',\ b') \neq (a,\ b)$.

由题意可设 $\frac{a+b}{2} = u,\ \sqrt{ab} = v$, 其中 $u,\ v \in \mathbb{N}_+$, 由于 $a \neq b$, 所以 $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$, 得 $u > v$, 则

$$a' = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{2u-2v}{2} = u - v \in \mathbb{N}_+,$$

$$b' = \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{2} = \frac{2u+2v}{2} = u+v \in \mathbb{N}_+,$$

得出 $a',\ b' \in \mathbb{N}_+,\ a' \neq b'$.

假设 $(a',\ b') \neq (a,\ b)$ 不成立, 则 $(a',\ b') = (a,\ b)$, 有 $a' \cdot b' = a \cdot b$. 故

$$a' \cdot b' = (u-v)(u+v) = u^2 - v^2 = v^2 = a \cdot b,$$

有 $u^2 = 2v^2$. 而 $2v^2$ 不为完全平方数, 矛盾!

所以 $(a',\ b') \neq (a,\ b)$, 则 $(a',\ b')$ 是满足要求的另一个"成功对", 故答案是肯定的. □

评注 利用 ab 为完全平方数可直接构造另一个"成功对".

题 3 彼得和瓦夏进行规则如下的游戏: 每一轮, 彼得说一个整数, 瓦夏在黑板上只能写下该数, 或者是写下该数加上黑板上之前所有的数的和, 问:

(1) 彼得能否保证在某时刻, 黑板上写的数中至少有 100 个 5 ?

(2) 彼得能否保证在某时刻, 黑板上写的数中至少有 100 个 10 ?

解 (张榕航) (1) 彼得不能保证在某时刻黑板上写的数至少有 100 个 5, 理由如下:

若彼得说的数全为偶数, 则瓦夏可以每次写下彼得说的数, 此时黑板上的数全为偶数, 不可能出现至少 100 个 5 的情形. 否则彼得必然在某一时刻说出第一个奇数, 那么瓦夏写下这个奇数, 记此时黑板上所有数字之和为 S_0, 则 S_0 为奇数. 在接下来的一轮中,

(i) 若彼得说出是奇数, 则瓦夏可写下这个奇数与 S_0 的和(该和为偶数), 此时黑板上所有数字之和仍为奇数,

(ii) 若彼得说出的是偶数, 则瓦夏写下这个偶数, 此时黑板上所有数字之和仍为奇数.

所以瓦夏可按上述规则操作使得之后写下的数总为偶数, 这样黑板上最多写有一个奇数, 不可能出现 100 个 5.

综上所述, 彼得不可能保证在某时刻黑板上所写的数中至少有 100 个 5.

(2) 彼得可以保证任意时刻黑板上所有数字之和只为 $0,\ -5,\ 5,\ 10$ 中的一个, 理由如下:

注意到, 游戏开始之初黑板上没有任何数, 此时数字之和为 $0 \in \{0, -5, 5, 10\}$.

假设某一时刻及之前的任意时刻中, 黑板上所有数之和为 $0,\ -5,\ 5,\ 10$ 中的

一个. 记此时黑板上所有的数字之和为 S.

(i) 当 $S=0$ 时, 此时彼得说出整数 10, 则瓦夏只能写下 10, 这时黑板上所有的数字之和 $S'=S+10$,

(ii) 当 $S=10$ 时, 此时彼得说出整数 -15, 则瓦夏只能写下 -15 或 -5, 这时黑板上所有的数字之和 $S'=S+(-15)=-5$ 或 $S'=S+(-5)=5$,

(iii) 当 $S=-5$ 时, 此时彼得说出整数 10, 则瓦夏只能写下 5 或 10, 这时黑板上所有的数字之和 $S'=S+10=5$ 或 $S'=S+5=0$,

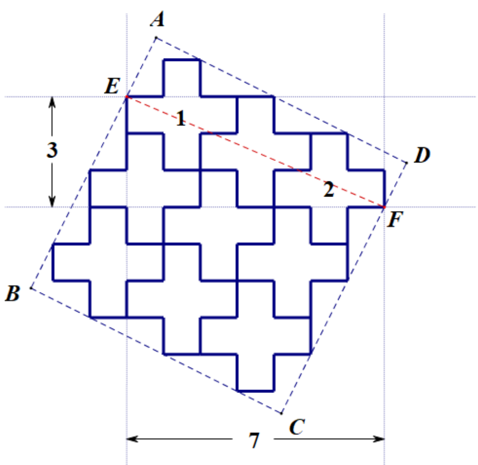
(iv) 当 $S=5$ 时, 此时彼得说出整数 -10, 则瓦夏只能写下 -10 或 -5, 这时黑板上所有的数字之和 $S'=S+(-5)=0$ 或 $S'=S+(-10)=-5$.

于是下一时刻的数字和 $S'\in\{0,-5,5,10\}$. 故彼得只要按照上述要求操作, 可使黑板上所有的数字之和为 $0,-5,5,10$ 中的一个. 且操作或在有限次内从 $S=0$ 回到 $S=0$ 的状态, 或在 $S=5$ 与 $S=-5$ 的情形间循环.

又注意到, 无论是从 $S=0$ 开始回到 $S=0$ 的循环过程, 还是 $S=5$ 与 $S=-5$ 之间循环过程, 在每个循环过程中都至少写下一个 10. 故彼得可以保证, 在某一时刻, 黑板上可以写有任意多 10, 特别地, 可以出现 100 个 10. □

评注 在 (1) 中考虑到 5 是奇数, 通过奇偶分析可控制奇数个数来说明至少有 100 个 5 不可行; 在 (2) 中不难发现 100 是没有实际意义的, 这启发着我们由循环的操作来实现黑板上至少达到 100 个 10 的状态.

题 4 记“十字”形是由五个 1×1 正方形组成 (其中的四个都和第五个有公共边). 能否从 8×8 的棋盘中剪出 9 个这样的“十字”形?不一定沿着方格线剪.



解 (胡佳旭) 答案是肯定的, 我们给出构造如下:

如图所示, 所选九个“十字”形包裹在虚线框 $ABCD$ 中. 注意到所选九个“十

字”形绕着中间的“十字”形的中心逆时针旋转 90° 后与原图形重合的. 在这种旋转方式下可使得直线 AB 与直线 BC 重合, 直线 AD 与直线 BA 重合. 此时, 直线 AB, AD 的交点变为直线 BC, BA 的交点, 即交点 A 变为点 B. 同理, 点 B 变为点 C, 点 C 变为点 D, 点 D 变为点 A. 由此得出

$$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90^\circ$$

且

$$AB=BC=CD=DA,$$

故四边形 $ABCD$ 为正方形.

设正方形 $ABCD$ 的边长为 a, 1, 2 号“十字”形与边 AB, CD 的交点为 E, F. 接下来, 我们只需要考虑 E, F 两点距离与 8 的大小关系.

由 E, F 两点在垂直方向距离为 3, 水平方向距离为 7 (如图), 有

$$a\le |EF|=\sqrt{3^2+7^2}=\sqrt{58}<8$$

则虚线框可被嵌入 8×8 的方格表中, 于是 8×8 的方格表中可以裁出九个“十字”形. □

评注 只需做一些简单的尝试便可构造出 9 个紧密排列的“十字”形满足要求.

题 5. 是否存在 100 个互不相同的正整数, 其中一个数的立方等于剩下 99 个数的立方的和?

解 1 (冈允文) 答案是肯定的. 待定 $n\in\mathbb{N}^*$, 由于

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2,$$

则

$$\begin{aligned}&(n+1)^3+(n+2)^3+\cdots+(n+99)^3\\&=1^3+2^3+\cdots+(n+99)^3-\left(1^3+2^3+\cdots+n^3\right)\\&=\frac{(n+99)^2(n+100)^2-n^2(n+1)^2}{4}\\&=99\,(n+50)\left(n^2+100n+4590\right).\end{aligned}\tag{$*$}$$

取 $n=10$ 时,

$$99\,(n+50)\left(n^2+100n+4950\right)=3^3\times 5^3\times 11^3\times 2^3=330^3.$$

即 $n=10$ 时, 有

$$11^3+12^3+\cdots+109^3=330^3.$$

所以有 11, 12, 13, $\cdots$, 109 和 330, 这 100 个正整数满足一个数的立方等于剩下 99 个数的立方的和. $\square$

解 2 (刘翊哲) 注意到

$$(3\times 2)^3=6^3=5^3+4^3+3^3.$$

两边同乘 2^{3t} ($t\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ 48\}$), 得到

$$\begin{aligned}
(3\times 2^2)^3&=(6\times 2)^3=(5\times 2)^3+(4\times 2)^3+(3\times 2)^3,\\
(3\times 2^3)^3&=(6\times 2^2)^3=(5\times 2^2)^3+(4\times 2^2)^3+(3\times 2^2)^3,\\
&\cdots\cdots\\
(3\times 2^{48})^3&=(6\times 2^{47})^3=(5\times 2^{47})^3+(4\times 2^{47})^3+(3\times 2^{47})^3,\\
(3\times 2^{49})^3&=(6\times 2^{48})^3=(5\times 2^{48})^3+(4\times 2^{48})^3+(3\times 2^{48})^3,
\end{aligned}$$

所以, 有:

$$\begin{aligned}
(6\times 2^{48})^3=&(5\times 2^{48})^3+(4\times 2^{48})^3+(3\times 2^{48})^3\\
=&\underbrace{(5\times 2^{48})^3+(4\times 2^{48})^3+(5\times 2^{47})^3+(4\times 2^{47})^3+\cdots+5^3+4^3+3^3}_{99\text{项}},
\end{aligned}$$

由此得到 6×2^{48}, 5×2^i, 4×2^j, 3 ($i,\ j\in\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 48\}$) 共 100 个数, 显然这 100 个数两两不同, 故满足要求. $\square$

评注 法一注意到 $(*)$ 右边为 11 的倍数, 在尝试 $n=10$ 时, 可使得 $(*)$ 为完全立方数, 即构造出满足题意的 100 个数. 法二从等式 $3^3+4^3+5^3=6^3$ 出发递推构造出满足题意的 100 个数即可.

题 6. 两张圆桌各坐有 n 个精灵, 每个精灵只和与他相邻的两个精灵是朋友. 天使可以让精灵中新产生 $2n$ 对朋友(每一对精灵可以来自同一桌, 也可以来自两桌), 而恶魔会从新产生的 $2n$ 对朋友中选取 n 对朋友使他们绝交.

问: 对怎样的正整数 n, 天使能够做到无论恶魔如何行动, 都可以让这 $2n$ 个精灵都坐在同一张圆桌上, 并使得每两个相邻的精灵都是朋友.

解 (粟昱龙) 对所有奇数 n, 天使都可以实现愿望.

把两桌精灵分别记为两个集合 A, B, 将各集合内的精灵分别编号为 A_i, B_i

$(i=1,\ 2,\ \cdots n)$. 把每个精灵看作点, 将有朋友关系的两个精灵对应的点连边, 则原题可转化为:

求所有的正整数 n 满足: 在两个长为 n 的圈中, 存在一种添加 $2n$ 条边的方式, 使得从这 $2n$ 条边中任意删去 n 条后, 图中仍存在 Hamilton 圈.

我们首先定义:

(1) 集合 A 中所有下标为奇数的点称为奇点, 类似定义偶点(B 中的点不做此定义).

(2) 将所有两端点均为奇点的边和集合 A 中的奇点与集合 B 中的点构成的边, 都称作奇边. 将所有两端点均为偶点的边和集合 A 中的偶点与集合 B 中的点构成的边, 都称作偶边.

(3) 对于任意正整数 $i,\ j\ (i,\ j\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\})$, 把边 A_iB_j 与边 $A_{i+1}B_{j+1}$ 或 $A_{i+1}B_{j-1}$ 称为相邻边 $(A_{n+1}=A_1,\ B_{n+1}=B_1)$.

接下来对 n 的奇偶性进行讨论.

(1) 当 n 为奇数时, 设 $n=2k+1$. 将 A_i 与 $B_i,\ B_{i+1}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 都连边 $(B_{n+1}=B_1)$, 下面我们证明任意删去 $2k+1$ 条边后仍存在 Hamilton 圈.

(i)假设只删除奇边, 由于图中有 $k+1$ 个奇点, 每个奇点连出 2 条边, 故有 $2k+2$ 条奇边, 不可能全部删除, 故必剩余一条奇边, 其与一条偶边相邻, 则存在相邻边,

(ii)假设删除所有的 $2k$ 条偶边, 还剩余两组相邻边, 但只可再删除一条边, 仍剩余有相邻边.

从(i), (ii)通过改变删除的边而来的其他情况, 每删除一条边, 则必添加一条新边, 而这条新边若没有相邻边,则在除该点和其相邻两点的 $2k-2$ 个点中. 只可删除 $2k-3$ 条边, 也必然存在相邻边.

注意到最初的两个圈上的边不可被删除, 从而只要存在相邻边, 则必有 Hamilton 圈. 故当 n 为奇数时, 无论怎样去删除 $2k+1$ 条边, 都能使图中存在 Hamilton 圈.

(2) 当 n 为偶数时, 设 $n=2k$. 由于新添加了 $4k$ 条边, 显然一条边不可能同时为奇边和偶边, 由平均值原理不妨设奇边条数不超过 $2k$, 现将其全部删除, 则每个奇点只剩下与偶点的连边. 假设存在 Hamilton 圈, 则每个奇点只可从与偶点的连边连入 Hamilton 圈. 由于奇点与偶点相间且 n 为偶数, 得出奇点和偶点个数相等, 所以每个偶点只可从与奇点的连边连入 Hamilton 圈. 因此 B 中的点不可能连入 Hamilton 圈, 与 Hamilton 圈的定义矛盾! 故当 n 为偶数时可以删

除 $2k$ 条边, 使图中不存在 Hamilton 圈.

综上所述, n 为所有奇数都满足题意. □

评注 注意到一个图有 Hamilton 圈的必要条件, 在当 n 为奇数时可直接构造证明, 而 n 为偶数时的否定有一定的技巧.

题 7. 凸四边形 $ABCD$ 的四条边满足任何三条边都不能围成三角形, 证明:

(1) 在凸四边形 $ABCD$ 中至少有一个内角不大于 $60°$,

(2) 在凸四边形 $ABCD$ 中至少有一个内角不小于 $120°$.

证明 (刘翊哲) 先给出下面的引理.

引理 在 $\triangle ABC$ 中, 若 AB 为严格最长的边, AC 为严格最短的边, 则 $\angle C > 60°$ 且 $\angle B < 60°$.

事实上, 由"大边对大角", 知 $\angle C > \angle A > \angle B$. 再由 $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ 和平均值原理, 知 $\angle C > 60°$, $\angle B < 60°$.

下面我们用反证法证明.

(1) 假设凸四边形 $ABCD$ 中没有一个内角不大于 $60°$, 即四个内角均大于 $60°$, 有 $\angle DAB > 60°$, $\angle CBA > 60°$.

不妨设 AB 是最长边, 如图所示以 AB 为边向 $ABCD$ 内侧作等边三角形 ABP, 则 P 在 $\angle DAB$ 内, 在 $\angle CBA$ 内.

由于凸四边形 $ABCD$ 的四条边中任意三边不能围成三角形, 且 AB 是最长边, 知

$$AB \geq AD + DC,\ AB \geq BC + CD. \quad ①$$

在 $\triangle ADP$ 中有 $AD + DP > AP$, 同样在 $\triangle BCP$ 中有 $BC + CP > BP$. 又因为 $\triangle ABP$ 为等边三角形, 有

$$AB = AP < AD + DP,\ AB = BP < BC + CP,$$

结合①得出

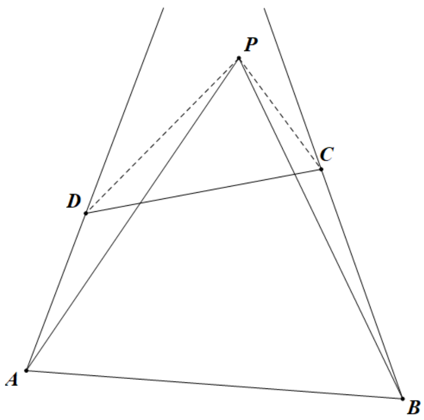
$$PC > CD,\ DP > CD.$$

在 $\triangle CDP$ 中用引理, 知 $\angle DPC < 60°$.

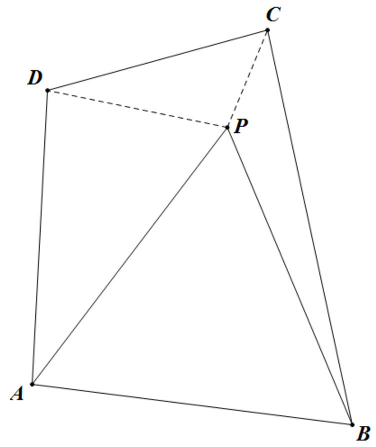
(i) 若点 P 位于凸四边形 $ABCD$ 形外(如图 (a)), 则

$$\angle DPC > \angle APB = 60°,$$

与 $\angle DPC < 60°$ 矛盾!



(a)



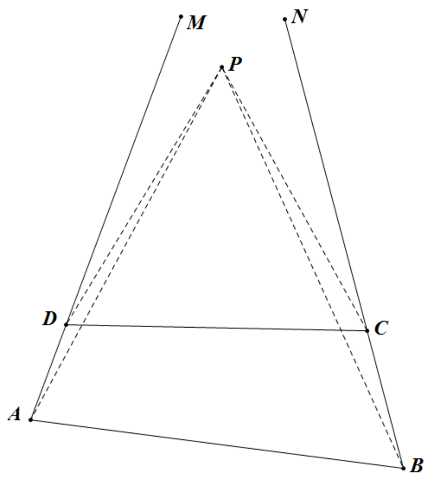
(b)

(ii) 若点 P 位于凸四边形 $ABCD$ 形内(如图 (b)), 则

$$\angle CPB+\angle DPA=360^\circ-\angle CPD-\angle APB>240^\circ.$$

由平均值原理, 知 $\angle CPB$ 和 $\angle DPA$ 中至少有一个大于 120°. 不妨设 $\angle BPC>120^\circ$, 则 $\angle BPC$ 是 $\triangle BCP$ 中严格最大的角, 得到 $BC>BP=AB$, 与 AB 为最长边矛盾!

综上所述, 原命题得证.



(c)

(2) 假设凸四边形 $ABCD$ 中没有一个内角不小于 120°, 则对应的四个外角均大于 60°. 在 AD 延长线上取点 M, 在 BC 延长线上取点 N, 则

$$\angle MDC>60^\circ,\ \angle NCD>60^\circ.$$

不妨设 AB 为最长边, 以 CD 为边向形外作等边三角形 CDP (如图 (c)), 得到

$$\angle MDC>60^\circ=\angle PDC,\ \angle NCD>60^\circ=\angle PCD,$$

所以点 P 在 $\angle MDC$, $\angle NCD$ 内, 进而得到点 P 在 $\angle BAD$, $\angle ABC$ 内.

再由凸四边形 $ABCD$ 中任意三边不能围成三角形且 AB 为最长边, 知

$$AB \geq AD + CD,\ AB \geq CD + CB.$$

而

$$AD + CD = AD + DP > AP,\ CD + CB = PC + CB > PB,$$

得到 $AB > AP$, $AB > PB$. 在 $\triangle PAB$ 中用引理, 得到 $\angle APB > 60^\circ$, 与 $\angle APB < \angle CPD$ 矛盾!

综上所述, 原命题得证. □

评注 采用反证法, 构造等边三角形来实现边与角关系的转化, 结合引理推出矛盾, 从而得证.

A 水平 10–11 年级

题 1 给定 n 个正整数能满足任两个数的算术平均值和几何平均值中至少有一个是整数. 波利亚在黑板上写出这 n 个数的任两个数的算术平均值, 在另一块白板上写出这 n 个数的任两个数的几何平均值.

证明: 黑板和白板中至少有一块板子上所写的数全都是整数.

证明 (雷博越) 不妨设这 n 个数中既存在奇数又存在偶数, 否则黑板上的数全是整数.

设所有奇数为 $p_1a_1^2$, $p_2a_2^2$, $\cdots$, $p_ka_k^2$,所有的偶数为 $q_1b_1^2$, $q_2b_2^2$, $\cdots$, $q_lb_l^2$,其中 a_i, b_j, p_i, q_j 都为正整数且 p_i, $q_j(i \in \{1, 2, \cdots, k\}, j \in \{1, 2, \cdots, l\}, k+l = n)$ 都无平方因子.

对于任意两个数 $p_ia_i^2$, $q_jb_j^2$, $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$, $j \in \{1, 2, \cdots, l\}$, 都使得 $\frac{p_ia_i^2+q_jb_j^2}{2}$ 不为整数.

由题意可知 $\sqrt{(p_ia_i^2)(q_jb_j^2)}$ 为整数, 从而 $p_iq_ja_i^2b_j^2$ 为完全平方数. 又因为 p_i, q_j 中都没有平方因子, 所以 $p_i = q_j$.

由 i, j 的任意性, 能得出

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_k = q_1 = q_2 = \cdots = q_l,$$

所以任意两数之积必为完全平方数, 从而任意两数的几何平均值都是整数.

故白板上的数全都是整数. □

评注 分别将奇数和偶数具体表示出来, 便能得到任两个数的几何平均值都

是整数.

题 2 闵希豪森男爵想出一个结论: 如果多项式

$$P(x) = x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots$$

有 n 个正整数根, 则平面上存在 a 条直线可恰产生 b 个交点. 证明或否定该结论.

解 (雷博翔) 该结论是正确的, 下证之.

设

$$P(x) = x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots = 0$$

的 n 个正整数根为 $x_1,\ x_2,\ \cdots x_n$.

在平面直角坐标系内作 x_1 条互相平行且倾斜角为 α_1 的直线. 类似地, 作出 $x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n$ 条互相平行且倾斜角分别为 $\alpha_2,\ \alpha_3,\ \cdots,\ \alpha_n$ 的直线, 其中 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n \in [0,\ \pi)$ 且互不相等, 可平移这些直线使得无三线共点的情况, 则这 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ 条直线一共产生有 $\sum\limits_{1 \le i < j \le n} x_i x_j$ 个交点. 又由韦达定理知

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = a,\ \sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j = b.$$

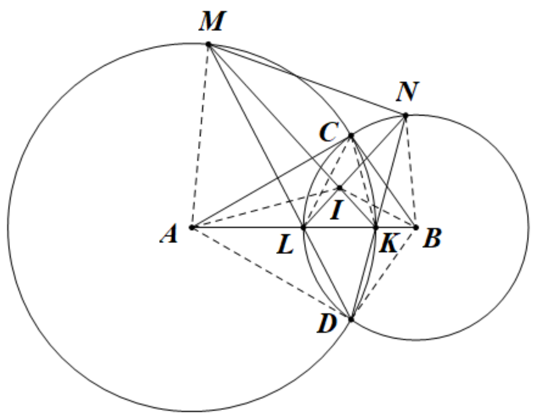
故构造出 a 条直线可恰产生 b 个交点.

因此该结论是正确的. □

评注 结合多项式根与系数的关系, 可构造出互不重合且无三线共点满足要求的直线.

题 3 已知 $\odot A,\ \odot B$ 相交于 $C,\ D$ 两点, 线段 AB 与 $\odot A,\ \odot B$ 的交点分别为 $K,\ L$. 直线 DL 与 $\odot A$ 交于另一点 M, 直线 DK 与 $\odot B$ 交于另一点 N.

证明: 四边形 $KLMN$ 的对角线的交点为 $\triangle ABC$ 的内心.



证明 (唐坚) 设四边形 $KLMN$ 对角线的交点为 I, 则

$$\begin{aligned}\angle ILK &= \angle BNL = \angle DNB + \angle DNL \\ &= \frac{1}{2}(180^\circ - \angle NBD) + \angle DNL \\ &= \frac{1}{2}\left(180^\circ - 2\left(180^\circ - \angle NLD\right)\right) + \angle DNL \\ &= 90^\circ - \angle LDK\end{aligned}$$

同理

$$\angle IKL = 90^\circ - \angle LDK.$$

故

$$\angle ILK = \angle IKL,$$

所以 I 在 LK 的中垂线上. 又由对称性,

$$\angle LCK = \angle LDK = \frac{1}{2}\angle MAK = \frac{1}{2}\left(180^\circ - 2\angle IKL\right) = \frac{1}{2}\angle LIK,$$

从而 I 为 $\triangle CKL$ 的外心, 有

$$CI = IL = IK.$$

再结合

$$AC = AK,\ BC = BL,$$

知 AI 平分 $\angle CAK$, BI 平分 $\angle CBL$.

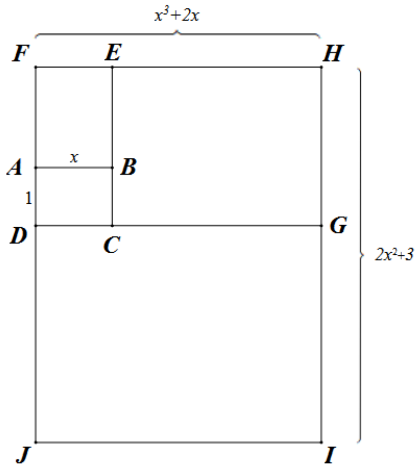
进而有 I 为 $\triangle ABC$ 的内心. 即四边形 $KLMN$ 的对角线的交点为 $\triangle ABC$ 的内心. 原命题得证. □

评注 容易发现对角线的交点是 $\triangle CKL$ 的外心, 通过基本的角度关系即可完成证明.

题 4 同 $8-9$ 年级 6.

题 5 是否存在一个可以被分为 100 个小矩形的矩形, 满足: 每一个小矩形均与原矩形相似但两两不同且任意两个小矩形没有重叠的部分(边界除外)?

解 (陈艺铭) 这样的矩形是存在的. 在平面上取矩形 $ABCD$, 设其宽为 1, 待定长为 x $(x > 1)$. 如图所示, 分别以 AB 为宽, CE 为宽, DG 为长, 作与矩形 $ABCD$ 相似的矩形 $ABEF$, $CEHG$, $DGIJ$, 得到一个最大的矩形 $FHIJ$. 我们



希望, 矩形 $FHIJ$ 相似于矩形 $ABCD$, 只需满足

$$\frac{HI}{HF}=\frac{AB}{AD}.$$

得到关于 x 的方程

$$\frac{2x^2+3}{x^3+2x}=\frac{x}{1},$$

解得

$$x=\sqrt[4]{3}\,(\text{负根舍去})\,.$$

经检验, $x=\sqrt[4]{3}$ 是分式方程的根, 所以当 $x=\sqrt[4]{3}$ 时, 上述所有矩形两两相似但互不相同.

于是可知, 矩形 $FHIJ$ 可以被剖分成 4 个与之相似但不相同的小矩形. 取其中最小的矩形(即图中的矩形 $ABCD$)进行相同的剖分, 依此类推, 共进行 33 次这样的剖分, 得到一种可以把矩形 $FHIJ$ 剖分成 $33\times3+1=100$ 个小矩形(均与矩形 $FHIJ$ 相似但两两不同)的方法.

故矩形 $FHIJ$ 即为所求. □

评注 在本题中难以直接构造出满足条件的矩形, 需要先画出简单情形剖分的草图再反解矩形长、宽之比, 再反复剖分即可.

题 6 彼得和瓦夏轮流在黑板上写具有形式 $\frac{1}{n}$ 的分数, 其中 n 为正整数. 彼得先写, 彼得每一步只写一个分数; 瓦夏第一步写一个分数, 第二步写两个分数, 以此类推, 每步比前一步多写一个分数. 瓦夏想要使得某一步之后黑板上所有分数之和是正整数.

问: 彼得能否阻止瓦夏实现她的想法?

解 (刘翊哲) 彼得能够阻止瓦夏实现她的想法.

引理　对任意一个给定的有理数 s 和给定的正整数 n, 满足

$$s+\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}$$

是整数的正整数组 $(a_1,\ \ldots,\ a_n)$ 只有有限多组.

证明　当 $n=1$ 时, 满足 $s+\frac{1}{a_1}$ 为整数的正整数 a_1 至多一个, 进而有限.

假设对 $n-1$ 元情形成立, 考虑 n 元的情形. 由于重新排列 $a_1,\ \ldots,\ a_n$ 不改变正整数组 $(a_1,\ \ldots,\ a_n)$ 个数有限与否. 不妨设 $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$. 对任意固定的正整数 a_1, 设 $s'=s+\frac{1}{a_1}$, 对 s' 用 $n-1$ 元情形的归纳假设, 知使得:

$$s'+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$$

为整数的 $(n-1)$ 元正整数组 $(a_2,\ \cdots,\ a_n)$ 是有限的.

假设 n 元情形的结论不成立, 则正整数 a_1 的取值有无限多, 进而 a_1 可以为任意大的数. 取 a_1 为大于 $\frac{n}{1+[s]-s}$ 的某个整数, 有

$$[s] \le s < s+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n} < s+\frac{1+[s]-s}{n}\cdot n=[s]+1,$$

即

$$[s] < s+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n} < [s]+1,$$

从而

$$s+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$$

不为整数, 矛盾！所以假设不成立, 进而 n 元情形是成立的.

综上, 由归纳基本原理, 引理得证.

再回到原题: 彼得第一步写下 $\frac{1}{3}$, 此时瓦夏无法在接下来的一步中让总和为整数. 设瓦夏第 $n-1$ 次写完数之后黑板上所有数字之和为 s, 此时 s 不为整数.

下面我们只需证明: 彼得可以写下一个与 s 的和不为整数的 $\frac{1}{t}$ 型的数, 使瓦夏无法在接下来的一步中写下 n 个 $\frac{1}{t}$ 型的数, 使得黑板上所有数之和为整数(t 是整数).

假设上面的结论不成立, 即彼得无法写出满足上述要求的数, 则对任意使 $s+\frac{1}{r}$ 不为正整数的 r, 都存在正整数 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$, 使 $s+\frac{1}{r}+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}$ 为正整数. 这时, 当 r 取遍使 $s+\frac{1}{r}$ 不为整数的所有正整数, 就产生了无穷多个正整数数组 $(r,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$, 使得 $s+\frac{1}{r}+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}$ 为正整数, 这与 $n+1$ 元情形的引理矛盾!

故彼得可以写出适当的数使得写下后黑板上所有分数和不为正整数, 且在下一步中瓦夏无法使黑板上所有分数和为正整数, 进而彼得可以阻止瓦夏实现她的想法. □

评注 通过定性分析, 会发现无需给出策略的具体构造, 只需要证明存在相应的操作使得在任意时刻黑板上所有分数之和都不是正整数即可.

题 7 一只甲虫位于 $1000 \times n$ 的棋盘左下角的方格, 其中 n 为大于 2020 的奇数. 棋盘中有两个象, 分别位于左上角和右下角的两个方格. 每一步, 甲虫可以跳到相邻的一个方格或者使用国际象棋中马的走法跳动, 甲虫想要到达棋盘右上角的方格, 但不能进入象所在的方格或象能攻击到的方格(其中象使用国际象棋的走法, 且在能攻击到甲虫之前不动), 并经过其他所有方格恰好一次.

证明: 甲虫到达右上角的方格所跳的路径数与 n 无关.

证明 (梁行健) 将棋盘中的所有方格进行黑、白二染色, 使得左下角的方格是黑色, 且任意两个相邻的方格不同色. 此时, 左上角的象在一个白格中, 甲虫只能从黑格跳到白格, 或从白格跳到黑格. 把棋盘的 n 个列从左到右依次记为第 1, 2, 3, $\cdots$, n 列. 不妨设棋盘有 $2m$ 行, 考虑前 $(2m-1)$ 列中所有黑格与前 $(2m+1)$ 列中所有没有被象控制的白格, 设它们构成的集合为 S. 我们先证如下引理 1.

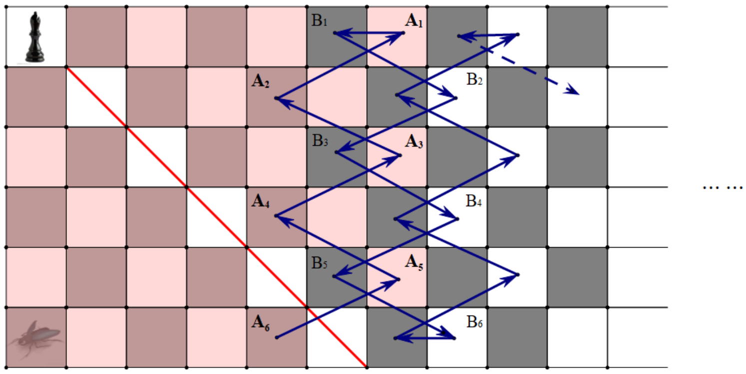
引理 1 甲虫要先跳遍 S 中所有方格, 再跳到 S 外的方格.

证明 注意到 S 中的黑格个数为 $m(2m-1)$, 白格个数为 $m(2m+1)-2m = m(2m-1)$, 所以 S 中的黑格个数与白格个数相等. 因为 S 中的黑格全部集中在前 $(2m-1)$ 列, 所以甲虫不可能从 S 中的任意一个黑格一步跳出 S. 同样地, 甲虫从 S 外的任意一个方格不可能一步之内跳到 S 中的某个黑格.

假设甲虫在还没有跳完 S 中所有方格就离开了 S. 因为甲虫只能从 S 中的白格跳出 S, 所以甲虫刚开始在黑格内必须跳若干步跳到白格才能跳出 S, 在这个过程中甲虫经过的 S 中的黑格数和白格数必然相等. 由于甲虫必须要跳遍 S 中所有的方格, 故它在跳出之后还必须要跳回到 S. 每一次从 S 外的某个方格跳回 S, 甲虫必然落在 S 中的某个白格, 也只能从 S 中的白格跳出 S. 甲虫至少一次跳回、跳出 S, 才能把 S 中剩下的格子恰好经过一次. 但这样要经过的 S 中的白格数就会多于经过的 S 中的黑格数. 这与 S 中黑格数和白格数相等矛盾！因此甲虫只能先跳遍 S 中所有方格再离开 S.

故引理 1 得证.

把第 $(2m+1)$ 列的白格从上到下依次记为 A_1, A_3, $\cdots$, A_{2m-1}, 把第 $(2m-1)$ 列的黑格从上到下依次记为 A_2, A_4, $\cdots$, A_{2m}. 除 A_2 以外, 甲虫从 S 中其他方格出发都无法在一步之内跳到 A_1, 故跳出 S 前最后一步应该是从 A_2 跳到 A_1. 在这里我们定义横跳: 如果一次跳跃从某一列跳到与之恰好相隔一列的另外一列, 则称之为一次横跳. (例如: 在下图中从 A_6 跳到 A_5 即为一次横跳.)



(图中所示为 $m=3$ 的情形, 涂上红色阴影的为 S 中的方格)

假设甲虫已经跳到 A_1, 则由引理 1 知甲虫经过的方格有且仅有 S 中所有方格, 此时甲虫即将跳出 S. 下面我们证明引理 2.

引理 2 甲虫跳出 S 后直到进入最后 $2m$ 之前的跳法是唯一确定的, 且具有周期性.

证明 把第 $2m$ 列的黑格从上到下依次记为 B_1, B_3, $\cdots$, B_{2m-1}, 把第(2m+2) 列的白格从上到下依次记为 B_2, B_4, $\cdots$, B_{2m}.

甲虫从 B_1 出发, 只能走马步跳到唯一一个没有被跳到过的方格, 即白格 B_2. 对 $k=2, 3, \cdots, m$, 甲虫从方格 B_{2k-1} 出发, 只能跳到两个没有被跳过的方格, 即 B_{2k-1} 和 B_{2k} 两个方格. 因此, 在接下来的 $2m$ 步中, 甲虫只能从 A_1 出发跳到 B_1, 再在第 $2m$ 列和第 $(2m+2)$ 列之间进行 $(2m-1)$ 次横跳, 直到跳到 B_{2m}. 现在假设甲虫已跳到 B_{2m}, 则它经过的方格有且仅有 S 中的所有方格以及 B_1, B_2, $\cdots$, B_{2m}, 所以甲虫只能跳到左边与之相邻的黑格(因为甲虫从这个黑格出发只能跳到一个没被跳过的白格), 类似可知甲虫只能在第 $(2m+1)$ 列和第 $(2m+3)$ 列之间进行 $(2m-1)$ 次横跳, 直到跳到第 $(2m+3)$ 列最上方的白格. 重复上述分析, 可知甲虫在离开 S 后只能按蓝色箭头所示的路径跳动, 直到跳进最后的 $2m$ 列, 故甲虫跳出 S 后所走的路径是唯一确定的. 又甲虫到达第 $(2m+3)$ 列最上方的白格后, 它经过的方格有且仅有前 $(2m+1)$ 列的所有黑格以及前 $(2m+3)$ 列没有被象控制的白格. 故甲虫接下来所走的路径可由甲虫到达 A_1 所走的路径向右平移 2 列后得到, 故甲虫跳出 S 后唯一能走的路径具有周期性.

引理 2 得证.

把集合 S 和方格 A_1, A_2, $\cdots$, A_{2m} 关于棋盘的中心点作中心对称, 后得到集合 S' 和方格 $A_1{}'$, $A_2{}'$, $\cdots$, $A_{2m}{}'$. 由 n 为奇数知, 方格 $A_1{}'$, $A_3{}'$, $\cdots$, $A_{2m-1}{}'$ 是黑色的, 且都在第 $n-2m$ 列;而方格 $A_2{}'$, $A_4{}'$, $\cdots$, $A_{2m}{}'$ 是白色的, 且都在第 $(n-2m+2)$ 列. 由引理 2 可知甲虫的跳跃方式是唯一确定的且具有周期性, 又 $n-2m-1$ 是偶数, 故甲虫会在第 $(n-2m-1)$ 列和第 $(n-2m+1)$ 列之间再进行 $(2m-1)$ 次横跳, 最后跳到 A_1' 右边的方格中.

此时, S' 外的所有方格都被甲虫跳过一次, 但甲虫没有经过 S' 中任何一个方格. 故甲虫接下来要从黑格 A_1' 进入 S', 跳遍 S' 中所有方格, 最后到达右上角的方格.

设甲虫从棋盘左下角的方格开始, 在不跳出 S 的情况下跳遍 S 中所有方格的方法数有 d 种. 由对称性可知, 甲虫从 A_1' 出发, 在不跳出 S' 的情况下跳遍 S' 中所有方格, 最后到达棋盘右上角的方格也是 d 种跳法. 所以甲虫共有 d^2 种不同的满足题意的跳法. 又因为 d 与 n 无关, 所以 d^2 也与 n 无关, 进而得出甲虫跳到棋盘右上角的方格所跳的路径数与 n 无关.

故原命题得证. $\square$

评注 这是一道较困难的组合计数问题, 难度在于很难求出显性的表达式, 但如果发现甲虫走出集合 S 后的跳法不仅唯一还有周期性, 就能以此为突破口, 得出甲虫跳到棋盘右上角的方格的方法数只与在 S 中的跳法数有关, 只需把甲虫在 S 外的跳法讨论清楚即可.