AMM 第 12169 号问题的解法

刘胤辰
(上海市上海中学, 200231)

本文给出美国数学月刊 (AMM) 第 12169 号问题的一个解法.

给定整数 $n \geq 2$. 求最小的正实数 α, 使得

$$(n-1)\sqrt{1+\alpha\sum_{1\leq i<j\leq n}(x_i-x_j)^2}+\prod_{i=1}^{n}x_i \geq \sum_{i=1}^{n}x_i.$$

对所有非负实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 成立.

解 α 的最大值为 $\frac{1}{n-1}$.

首先令 $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = a, x_n = 0$, 则条件不等式变为

$$(n-1)\sqrt{1+\alpha(n-1)a^2} \geq (n-1)a,$$

于是 $\frac{1}{a^2} + \alpha(n-1) \geq 1$. 令 $a \to \infty$, 可得

$$\alpha(n-1) \geq 1 \Rightarrow \alpha \geq \frac{1}{n-1}.$$

下证 $\alpha = \frac{1}{n-1}$ 时结论成立, 即证:

$$(n-1)\sqrt{1+\frac{1}{n-1}\sum_{1\leq i<j\leq n}(x_i-x_j)^2}+\prod_{i=1}^{n}x_i \geq \sum_{i=1}^{n}x_i. \tag{1}$$

由对称性, 不妨设

$$0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_s < 1 \leq x_{s+1} \leq \cdots \leq x_n.$$

若 $s = 0$ 或 $s = n$, 则由贝努利不等式,

$$(1)\text{ 的左边} \geq n-1+\prod_{i=1}^{n}x_i \geq \sum_{i=1}^{n}x_i.$$

下设 $1 \leq s \leq n-1$. 并记

$$A = s - \sum_{i=1}^{s}x_i,\ \ B = \sum_{j=s+1}^{n}x_j - (n-s),$$

修订日期: 2020-04-01.

则 $A,B\geq 0$. 且

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i<j\le n}(x_i-x_j)^2&\geq\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=s+1}^{n}(x_i-x_j)^2\\&=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=s+1}^{n}(1-x_i+x_j-1)^2\\&=\sum_{i=1}^{s}(1-x_i)^2(n-s)+2AB+\sum_{j=s+1}^{n}(x_j-1)^2s,\end{aligned}$$

再由 Cauchy 不等式知,

$$\sum_{1\le i<j\le n}(x_i-x_j)^2\geq\frac{(n-s)A^2}{s}+\frac{sB^2}{n-s}+2AB. \tag{2}$$

(i) 若 $0\leq A\leq 1$. 则由贝努利不等式,

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n}x_i&=(x_1\cdots x_s)(x_{s+1}\cdots x_n)\\&\geq(x_1+\cdots+x_s-(s-1))(x_{s+1}+\cdots+x_n-(n-s-1))\\&=(1-A)(B+1).\end{aligned}\tag{3}$$

注意到 (1) 的右边 $=B-A+n$, 结合 (2), (3) 知要证 (1), 只需证

$$(n-1)\sqrt{1+\frac{1}{n-1}\left(\frac{(n-s)A^2}{s}+\frac{sB^2}{n-s}+2AB\right)}+(1-A)(B+1)\geq B-A+n.$$

将上式第二项移项, 再平方, 并整理得

$$\frac{(n-s)A^2}{s}+\frac{sB^2}{n-s}\geq\frac{A^2B^2}{n-1}. \tag{4}$$

若 A,B 中有一项为 0, 则 (4) 显然成立.

下设 A,B 均不为 0. 这时 (4) 等价于

$$\frac{(n-s)}{sB^2}+\frac{s}{(n-s)A^2}\geq\frac{1}{n-1}. \tag{5}$$

注意到 $s\geq 1,\ 0<A\leq 1$ 及

$$\frac{s}{(n-s)A^2}\geq\frac{1}{(n-1)A^2}\geq\frac{1}{n-1},$$

故 (5) 成立.

(ii) 若 $A>1$, 则由 $\prod\limits_{i=1}^{n}x_i>0$ 和 (2) 知,

$$(1)\text{ 的左边}\geq(n-1)\sqrt{1+\frac{1}{n-1}\left(\frac{(n-s)A^2}{s}+\frac{sB^2}{n-s}+2AB\right)}$$

而

$$(1)\text{ 的右边}<B+n-1.$$

故要证 (1) 仅需证明

$$(n-1)\sqrt{1+\frac{1}{n-1}\left(\frac{(n-s)A^2}{s}+\frac{sB^2}{n-s}+2AB\right)} \geq B+n-1.$$

注意到上式左边关于 A 单增, 故只需证 $A=1$ 的情形:

$$(n-1)\sqrt{1+\frac{1}{n-1}\left(\frac{(n-s)}{s}+\frac{sB^2}{n-s}+2B\right)} \geq B+n-1.$$

两边平方并整理可知, 要证上式等价于

$$\frac{n-s}{s}+\frac{sB^2}{n-s} \geq \frac{B^2}{n-1}, \tag{6}$$

由 $1 \leq s \leq n-1$ 知 $\frac{sB^2}{n-s} \geq \frac{B^2}{n-1}$, 故 (6) 成立.

综上便知 (1) 成立! $\square$