2020 年普特南数学竞赛试题浅析

周世龙
(武汉大学, 430079)

2020 年第 81 届普特南数学竞赛因疫情延期, 最终于北京时间 2021 年 2 月 21 日在线上举行, 面向美国高校开放. 形式与往年相同, 试题分 A, B 两组, 每组各 6 题, 规定时间各为三小时.

总体来看, 本次试题难度适中, 但计算量大, 对书写有一定要求. 题目大多较为初等, 相比往年分析的比例略有提升, 且没有出现线性代数题. 总体来说, 是较好的训练素材.

本文旨在给出全部题目尽量忠实的翻译和 (一种) 解题方法, 供读者参考. 由于笔者水平有限, 若文章中存在疏漏之处, 恳请读者指正!

I. 试 题

A1. 有多少个正整数 N 满足以下三个条件?

(i) N 被 2020 整除;

(ii) N 的十进制表示有至多 2020 位;

(iii) N 的十进制表示是由一串 1 后接一串 0 构成的.

A2. 设 k 为一非负整数. 求

$$\sum_{j=0}^{k} 2^{k-j}\binom{k+j}{j}.$$

A3. 设 $a_0=\frac{\pi}{2}$, 并令 $a_n=\sin(a_{n-1}), n\geq 1$. 确定 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 是否收敛.

A4. 考虑一画有 $N+2$ 个方格的水平条带, 其中首尾两个方格涂黑, 其余方格仍为白色. 随机地选取一白色方格, 并等概率地选取该方格的一个相邻格, 若它不是黑色则将它涂黑. 重复这一过程, 直至所有剩余白色方格的相邻方格都为黑色. 令 $w(N)$ 表示剩余白色方格数量的数学期望, 求 $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{w(N)}{N}$.

修订日期: **2021-03-10.**

A5. 设 a_n 为满足 $\sum\limits_{k\in S} F_k = n$ 的正整数集 S 的数量, 这里 $(F_k)_{k\geq 1}$ 为 Fibonacci 数列, 满足 $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$, 初值为 $F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3$. 求使得 $a_n = 2020$ 的最大正整数 n.

A6. 对于某一正整数 N, 函数 f_n 定义如下:
$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{N + \frac{1}{2} - n}{(N+1)(2n+1)} \sin(2n+1)x.$$
求使得 $f_N(x) \leq M$ 对于所有 N 和所有实数 x 成立的最小常数 M.

B1. 对于正整数 n, 定义 $d(n)$ 为 n 的二进制表示下的数字和 (例如, $d(13) = 1+1+0+1 = 3$). 令
$$S = \sum_{k=1}^{2020} (-1)^{d(k)} k^3.$$
求 S 模 2020 的值.

B2. 设 k, n 为满足 $1 \leq k < n$ 的整数. Alice 和 Bob 玩一个游戏: 在一条直线上排有 n 个洞, 这些洞中有 k 个塞子. 在游戏的开始, 塞子位于最左边的 k 个洞. 一次合法的移动指将某塞子移至其右端的某个空洞中. 两玩家交替移动, 由 Alice 开始.当塞子被挪动至最右边 k 个洞时游戏结束, 此时不能进行下一次移动的玩家输掉游戏. 对于哪些 n 和 k 的值, Alice 有必胜策略?

B3. 令 $x_0 = 1$, δ 为某一满足 $0 < \delta < 1$ 的常数. 递归地, 对于 $n = 0, 1, 2, \cdots, x_{n+1}$ 从区间 $[0, x_n]$ 中随机取出, 令 Z 为使得 $x_n < \delta$ 的最小正整数值. 将 Z 的数学期望表示为 δ 的函数 (注: 这里的"随机取出"是指 $x_{n+1} \sim U[0, x_n]$).

B4. n 为某一正整数, 并用 V_n 表示 $(2n+1)$ 维数组 $\mathbf{v} = (s_0, s_1, \cdots, s_{2n-1}, s_{2n})$ 组成的集合, 其中 $s_0 = s_{2n} = 0$, 并且 $|s_j - s_{j-1}| = 1$ 对 $j = 1, 2, \cdots, 2n$ 成立. 定义
$$q(\mathbf{v}) = 1 + \sum_{j=1}^{2n-1} 3^{s_j},$$
并设 $M(n)$ 为 $\frac{1}{q(\mathbf{v})}$ 的均值, 这里 $\mathbf{v} \in V_n$. 计算 $M(2020)$.

B5. 对于 $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, 令 z_j 为满足 $|z_j| = 1$ 且 $z_j \neq 1$ 的复数. 证明
$$3 - z_1 - z_2 - z_3 - z_4 + z_1 z_2 z_3 z_4 \neq 0.$$

B6. 令 n 为一正整数. 证明
$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{\lfloor k(\sqrt{2}-1) \rfloor} \geq 0,$$
其中, $\lfloor x \rfloor$ 表示不小于 x 的最小整数.

II．解答与评注

A1. 有多少个正整数 N 满足以下三个条件？

(i) N 被 2020 整除;

(ii) N 的十进制表示有至多 2020 位;

(iii) N 的十进制表示是由一串 1 后接一串 0 构成的.

解 满足条件的正整数 N 有 504×1009 个.

由条件(iii), 设某一满足题目要求的正整数为 $N = \overbrace{11\cdots1}^{x\text{个}}\overbrace{00\cdots0}^{y\text{个}}$.

从条件来看, (i) $\Leftrightarrow 20 \mid N$且$101 \mid N$.

显然 $20 \mid N \Leftrightarrow y \geq 2$; 而 $101 \mid N \Leftrightarrow 4 \mid x$.下面对此稍作说明.

注意到 $(10, 101) = 1$, 故 N 是否被101整除取决于 x ; 而 $1111 = 101 \times 11$, 故当 $4 \mid x$ 时, 由于 $1111 \mid \overbrace{11\cdots1}^{x\text{个}} \Rightarrow 101 \mid N$.

另外, 注意到若 4 不整除 x 或 $y < 2$, 则 N 不能被 2020 整除.

而条件(ii) $\Leftrightarrow x + y \leq 2020$. 至此我们完成了条件的等价转换.

下面开始求解. 令 n 表示满足条件的正整数 N 的个数, 并令

$$n_x := \#\{N \mid N \text{ 形如} \overbrace{11\cdots1}^{x\text{个}}\overbrace{00\cdots0}^{y\text{个}}, y \geq 2\},$$

则

$$n_x = 2020 - (x+2) + 1 = 2019 - x.$$

从而

$$n = \sum_{\substack{4 \mid x \\ 0<x<2020}} (2019 - x) = \sum_{k=1}^{504} (2019 - 4k) = 504 \times 1009. \qquad \square$$

评注 较为简单的一道小题, 注意计算上不要出错.

A2. 设 k 为一非负整数. 求

$$\sum_{j=0}^{k} 2^{k-j} \binom{k+j}{j}.$$

解 该表达式的值为 4^k.

令

$$S_k := \sum_{j=0}^{k} 2^{k-j} \binom{k+j}{j},$$

并规定 $\binom{n}{-1} = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

利用熟知的恒等式 $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$, 我们可以得到

$$\begin{aligned}
S_k&=\sum_{j=0}^{k}2^{k-j}\left(\binom{k+j-1}{j}+\binom{k+j-1}{j-1}\right)\\
&=\sum_{j=0}^{k}2^{k-j}\binom{k+j-1}{j}+\sum_{j=1}^{k}2^{k-j}\binom{k+j-1}{j-1}\\
&=2\sum_{j=0}^{k-1}2^{k-1-j}\binom{k-1+j}{j}+\binom{2k-1}{k}+\sum_{j=0}^{k-1}2^{k-1-j}\binom{k+j}{j}\\
&=2S_{k-1}+\binom{2k-1}{k-1}+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k-1}2^{k-j}\binom{k+j}{j}\\
&=2S_{k-1}+\frac{1}{2}\left(\binom{2k}{k}+\sum_{j=0}^{k-1}2^{k-1-j}\binom{k+j}{j}\right)\\
&=2S_{k-1}+\frac{1}{2}S_k.
\end{aligned}$$

从而 $S_k=4S_{k-1},k\in\mathbb{N}^*$.

又注意到 $S_0=1$, 故 $S_k=4^k$. □

评注 这是一个优雅的组合恒等式.

上面给出的做法是纯粹的代数运算. 需要指出的是, 该恒等式有较为简单的组合意义, 留给读者思考.

A3. 设 $a_0=\frac{\pi}{2}$, 并令 $a_n=\sin(a_{n-1}),n\geq 1$. 确定 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 是否收敛.

解 该数项级数发散.

首先注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 这是因为 $\{a_n\}$ 单调递减且有界, 故极限存在. 从而

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sin a_{n-1}=\lim_{n\to\infty}\sin a_n\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

我们下面来级数的一般项进行阶的估计.

引理 成立 $a_n\sim\sqrt{\frac{3}{n}},n\to\infty$.

证明 由于数列 $\{a_n\}$ 以 0 为极限, 所以

$$a_n=\sin a_{n-1}=a_{n-1}-\frac{1}{6}a_{n-1}^3+O(a_{n-1}^5),n\to\infty.$$

对于 $\beta\in\mathbb{R}$, 注意到

$$\begin{aligned}
a_n^\beta-a_{n-1}^\beta&=\sin^\beta a_{n-1}-a_{n-1}^\beta\\
&=\left(a_{n-1}-\frac{1}{6}a_{n-1}^3+O(a_{n-1}^5)\right)^\beta-a_{n-1}^\beta\\
&=a_{n-1}^\beta\left(1-\frac{1}{6}a_{n-1}^2+O(a_{n-1}^4)\right)^\beta-a_{n-1}^\beta
\end{aligned}$$

$$= a_{n-1}^{\beta}\left(-\frac{\beta}{6}a_{n-1}^2 + O(a_{n-1}^4)\right).$$

在上式中取 $\beta = -2$, 可以得到

$$\begin{aligned} a_n^{-2} - a_{n-1}^{-2} &= \frac{1}{3} + O(a_{n-1}^2) = \frac{1}{3} + o(1), n \to \infty \\ \Rightarrow \frac{1}{a_n^2} &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k^2} - \frac{1}{a_{k-1}^2}\right) + \frac{1}{a_0^2} = \frac{1}{3}n + O(\sum_{k=1}^{n} a_{k-1}^2) + \frac{4}{\pi^2} \\ &= \frac{1}{3}n + \frac{4}{\pi^2} + o(n) \sim \frac{1}{3}n, n \to \infty. \end{aligned}$$

这就证明了引理.

而结合引理及比较审敛法, 显然 a_n^2 与 $O(\frac{1}{n})$ 同阶, 从而该数项级数发散. □

评注 本题是一道有意思且难度中等的数学分析习题.

就笔者的视角看, 本题的关键在于对该级数发散有直观的认识. 在此基础上, 不论是如上直接对阶进行估计, 或是用归纳法证明存在一个一般项不超过 a_n 的发散级数, 都是可行的.

A4. 考虑一画有 $N+2$ 个方格的水平条带, 其中首尾两个方格涂黑, 其余方格仍为白色. 随机地选取一白色方格, 并等概率地选取该方格的一个相邻格, 若它不是黑色则将它涂黑. 重复这一过程, 直至所有剩余白色方格的相邻方格都为黑色. 令 $w(N)$ 表示剩余白色方格数量的数学期望, 求 $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{w(N)}{N}$.

解 该极限值为 $\frac{1}{e}$.

首先, 通过观察可以得到 $w(0) = 0, w(1) = w(2) = 1$. 下面来求 $w(n)$ 的递推式.

我们将初始的 N 个白色方格从左至右依次编号 $1, 2, \cdots, n$. 据题意, 不难分析当 $N \geq 3$ 时, 编号为 $1, N$ 的白色方格和两端的黑色方格被选中的概率均为 $\frac{1}{2N}$, 其余方格被选中的概率为 $\frac{1}{N}$. 而选定编号为 $k(1 \leq k \leq N)$ 并涂黑后, 其左侧有 $k-1$ 个白色方格, 右侧有 $N-k$ 个白色方格.据此我们就能得到

$$w(N+1) = \frac{w(N)}{2(N+1)} \times 2 + \sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{N+1}\left(w(k) + w(N-k)\right) + \frac{w(N+1)}{2(N+1)} \times 2.$$

上式经整理, 得到

$$Nw(N+1) = 2\sum_{k=1}^{N-1} w(k) + w(N), N \in \mathbb{N}^*.$$

用 $N-1$ 替 N, 并比较两式, 得到二阶递推:

$$\begin{aligned} Nw(N+1) &= (N-1)w(N) - w(N-1) + 2w(N-1) + w(N) \\ &= Nw(N) + w(N-1). \end{aligned}$$

整理得

$$w(N+1)=w(N)+\frac{w(N-1)}{N}, N\in\mathbb{N}^*.$$

下面回到原题. 为求该极限, 我们考虑母函数

$$f(z):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w(n-1)}{n}z^n.$$

不难发现

$$\begin{aligned}f^{'}(z)&=\sum_{n=1}^{\infty}w(n-1)z^{n-1}=z+\sum_{n=3}^{\infty}\left(w(n-2)+\frac{w(n-3)}{n-2}\right)z^{n-1}\\&=z(1+f^{'}(z)+f(z)).\end{aligned}$$

解该微分方程, 得到

$$f(z)=\tfrac{C}{e^z(1-z)}-1, C\in\mathbb{R}.$$

又由 $w(0)=0\Rightarrow C=1$. 最后只需考察 $f(z)$ 的麦克劳林展开式, 立即得到

$$\frac{w(N)}{N+1}=f^{(N+1)}(0)=\sum_{j=0}^{N+1}\frac{(-1)^j}{j!}\Rightarrow\lim_{N\to\infty}\frac{w(N)}{N+1}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!}=\frac{1}{e}.$$

从而 $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{w(N)}{N}=\frac{1}{e}$, 即证. □

评注 表面上是道概率论问题, 实际上建立递推式的过程是自然的, 麻烦的点还是求递推数列的极限.

这里利用母函数是直觉上较易想到的方法, 也是较为一般的手段. 也许有更简单的解法.

A5. 设 a_n 为满足 $\sum\limits_{k\in S}F_k=n$ 的正整数集 S 的数量, 这里 $(F_k)_{k\geq 1}$ 为 Fibonacci 数列, 满足 $F_{k+2}=F_{k+1}+F_k$, 初值为 $F_1=1, F_2=1, F_3=2, F_4=3$. 求使得 $a_n=2020$ 的最大正整数 n.

解 我们来说明, 最大的正整数 $n=F_{4040}-1$.

在开始证明前, 我们给出如下定理, 它有时也被称为“Fibonacci 进制表示”.

定理 对于任意正整数 n, 存在唯一数集 $S\subset\mathbb{N}^*$, 使得 $n=\sum\limits_{k\in S}F_k$, 其中 S 中元素两两不相邻, 即 $\forall k_1\neq k_2, k_1, k_2\in S$, 必有 $|k_1-k_2|\geq 2$.

定理的证明概要如下:

存在性可由贪心算法导出. 对 $\forall n\in\mathbb{N}^*$, 记 $k_1:=\max\{k\in\mathbb{N}^*|F_k\leq n\}$, $n_1:=n-F_{k_1}$. 易见 $n_1<F_{k_1-1}$. 重复上述过程, 我们递归地得到数列 $\{k_i\}_{i=1}^r$. 记 $S:=\{k_i|1\leq i\leq r\}$, 易验证 S 符合我们的要求.

对于唯一性, 我们不妨假设存在两个数集 S, S', 使得 $n=\sum\limits_{k\in S}F_k=\sum\limits_{k\in S'}F_k$.

考虑 $T_1:=S\backslash S'$, $T_2:=S'\backslash S$. 若 $T_1=\varnothing$, 由两集合元素和相等可以导出 $T_2=\varnothing$, 这说明 $S=S'$; 否则不失一般性, 设 $\max T_1<\max T_2$, 我们用 $\sqcup$ 表示集合的无交并, 不难见得

$$\sum_{k\in T_1}F_k<F_{\max T_1+1}\le F_{\max T_2}\le\sum_{k\in T_2}F_k.$$

从而

$$\sum_{k\in S}F_k=\sum_{k\in(S\cap S')\sqcup T_1}F_k<\sum_{k\in(S\cap S')\sqcup T_2}F_k=\sum_{k\in S'}F_k.$$

立得矛盾, 从而唯一性得证, 定理证毕.

由上述定理保证, 对任意正整数 n, 我们有如下表示: $n:=\left(\overline{b_kb_{k-1}\cdots b_2}\right)_F$, 其中 $b_i\in\{0,1\}, 2\le i\le k, b_k=1$, 且相邻两项不同时为 1.

下面的引理是本题的关键性结论.

引理 设 $n=\left(\overline{b_kb_{k-1}\cdots b_2}\right)_F$, 其中 $b_k=1$, 则成立 $a_n\ge a_{F_k}=\left[\frac{k}{2}\right]+1$.

证明 对 k 用数学归纳法. $k=2,3,4,5$ 的情形是成立的, 只需对 $n=1,2,\cdots,12$ 分别验证引理即可.

对 $\forall\tilde{n}=\left(\overline{b_kb_{k-1}\cdots b_2}\right)_F$, 假定 $a_{\tilde{n}}\ge\left[\frac{k}{2}\right]+1$.

下考虑 $n=(\overline{c_{k+2}c_{k+1}\cdots c_2})_F$, 其中 $c_{k+2}=1$, 我们来说明

$$a_n\ge\left[\frac{k+2}{2}\right]+1=\left[\frac{k}{2}\right]+2.$$

我们来对 c_k 进行分类讨论.

(i) 若 $c_k=1$, 则 $n=c_{k+2}F_{k+2}+\tilde{n}, \tilde{n}:=(\overline{c_k\cdots c_2})_F$.

由归纳假设知 $a_{\tilde{n}}\ge\left[\frac{k}{2}\right]+1$.

另外, 注意到当 $n\ge 4$ 时, 存在数集 $S\subset\{1,2,\cdots,k\}$, $\tilde{n}=\sum\limits_{j\in S}F_j$, 且 $k\notin S$. (这一结论不难说明, 留给读者)

从而

$$n=\sum_{j\in S\cup\{k+2\}}F_j=\sum_{j\in S\cup\{k,k+1\}}F_j.$$

这给出了 n 的另一种分解方法, 因此有 $a_n\ge a_{\tilde{n}}+1=\left[\frac{k}{2}\right]+2$.

(ii) 若 $c_k=0$, 不妨设 $t:=\max\{s\in\mathbb{N}^*\mid s\le k-1, c_s=1\}$, $\tilde{n}$ 意义同上, 则 $n=c_{k+2}F_{k+2}+\tilde{n}$.

于是 F_{k+2} 可分解为

$$\sum_{\substack{t_i\text{互异}\\ t_i>t}}F_{t_i}.$$

这样的分解方式有 $\left[\frac{k+1-t}{2}\right]+1$ 种, 结合 $t\le k-1\Rightarrow\left[\frac{k+1-t}{2}\right]+1\ge 2$.

由归纳假设, $a_{\tilde{n}}\ge\left[\frac{t}{2}\right]+1\ge 2$.

当 $\left(\left[\frac{k+1-t}{2}\right]+1,\left[\frac{t}{2}\right]+1\right)\ne(2,2)$ 时, 我们有

$$a_n\ge\left(\left[\frac{t}{2}\right]+1\right)\left(\left[\frac{t}{2}\right]+1\right)\ge\left[\frac{k+1-t}{2}\right]+1+\left[\frac{t}{2}\right]+1+1\ge\left[\frac{k}{2}\right]+2.$$

而注意到

$$\left(\left[\frac{k+1-t}{2}\right]+1,\left[\frac{t}{2}\right]+1\right)=(2,2)\Rightarrow k\le 5,$$

这些情形已经在归纳假设中被验证成立. 故归纳完毕, 引理得证.

回到原题, 结合引理知满足题意的 n 一定不超过 $F_{4040}-1$. 最后只需说明 $a_{F_{4040}-1}=2020$. 这部分没有本质困难, 交由读者验证. □

评注 这是一道思维难度不高, 但很考验书写的题目.

"Fibonacci 进制"是竞赛试题中出现频率较高的题材之一, 对此较为熟悉的读者经过摸索可以很快地得到引理的结论, 但证明它需要处理不少的细节.

A6. 对于某一正整数 N, 函数 f_n 定义如下:

$$f_N(x)=\sum_{n=0}^{N}\frac{N+\frac{1}{2}-n}{(N+1)(2n+1)}\sin(2n+1)x.$$

求使得 $f_N(x)\le M$ 对于所有 N 和所有实数 x 成立的最小常数 M.

解 最小常数 $M=\frac{\pi}{4}$.

首先, 不妨设 $x\in[0,2\pi]$.

作为引理, 我们给出如下(熟知的)和式.

引理 1 对 $\forall N\in\mathbb{N}^*$, 恒成立如下和式:

$$\sum_{n=0}^{N}\cos(2n+1)x=\frac{\sin(2N+2)x}{2\sin x};$$
$$\sum_{n=0}^{N}\sin(2n+1)x=\frac{1-\cos(2N+2)x}{2\sin x}.$$

证明是容易的, 等式两端同乘 $2\sin x$ 后积化和差即可.

对于题目给出的函数 f_N, 我们有如下两个结论:

引理 2 成立 $f_N(x)\le f_N(\frac{\pi}{2}),\forall x\in[0,2\pi]$.

证明 首先, 我们对 f_N 进行如下的代数变形:

$$\begin{aligned}f_N(x)&=\sum_{n=0}^{N}\frac{(N+1)-(n+\frac{1}{2})}{(N+1)(2n+1)}\sin\left((2n+1)x\right)\\&=\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2(N+1)}\right)\sin\left((2n+1)x\right).\end{aligned}\qquad(*)$$

求导, 得 (结合引理 1)

$$
\begin{aligned}
f_N'(x) &= \sum_{n=0}^{N}\cos\left((2n+1)x\right) - \frac{1}{2(N+1)}\sum_{n=0}^{N}(2n+1)\cos\left((2n+1)x\right)\\
&= \frac{\sin\left((2N+2)x\right)}{2\sin x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2(N+1)}\sum_{n=0}^{N}\sin\left((2n+1)x\right)\right)\\
&= \frac{\sin\left((2N+2)x\right)}{2\sin x} - \frac{(2N+2)\sin x\sin\left((2N+2)x\right)-\left(1-\cos\left((2N+2)x\right)\right)\cos x}{4(N+1)\sin^2 x}\\
&= \frac{\left(1-\cos\left(2N+2\right)x\right)\cos x}{4(N+1)\sin^2 x}. \qquad (**)
\end{aligned}
$$

$(**)$ 式虽然有多个导零点, 但经观察可以得知 f' 的正负性由 $\cos x$ 确定, 亦即

$$\operatorname{sgn}(f_N'(x)) = \operatorname{sgn}(\cos x),$$

从而可以立即得到 f_N 在 $[0,2\pi]$ 上存在唯一极大值点 $x=\frac{\pi}{2}$.

故 $f_N(x)\le f_N(\frac{\pi}{2})$, 引理 2 得证.

引理 3 成立 $f_N(\frac{\pi}{2})\le f_{N+2}(\frac{\pi}{2}), \forall N\in\mathbb{N}^*$.

证明　由于

$$
\begin{aligned}
f_N(\frac{\pi}{2}) &= \sum_{n=0}^{N}(-1)^n\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2(N+1)}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{N}(-1)^n\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(N+1)} - \frac{1}{2(N+1)}\mathbf{1}_{\{2|N\}}.
\end{aligned}
$$

其中 $\mathbf{1}_X$ 为集合 X 的示性函数.

至此只需对 N 的奇偶性进行讨论即可.

(i) 若 N 为奇数, 则

$$f_{N+2}(\frac{\pi}{2}) - f_N(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2N+3} - \frac{1}{2N+5} > 0;$$

(ii) 若 N 为偶数, 则

$$f_{N+2}(\frac{\pi}{2}) - f_N(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2N+5} - \frac{1}{2N+3} - \frac{1}{2N+6} + \frac{1}{2N+2} > 0.$$

得证.

回到原题. 结合上述两引理, 直接可以得到

$$
\begin{aligned}
f_N(x) \le f_N(\frac{\pi}{2}) \le \lim_{N\to\infty} f_N(\frac{\pi}{2}) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}\\
&= \arctan x\Big|_{x=1} = \frac{\pi}{4}, \forall N\in\mathbb{N}^*, x\in[0,2\pi].
\end{aligned}
$$

通过上述讨论, 可见最小常数为 $M=\frac{\pi}{4}$. □

评注 面对此题, 给人的第一感觉是 f_N 的形式较为复杂. 好在很容易发

现 f_N 可以做代数变形 (即 $(*)$ 式).

本题的难点在于 $f_N'(x)$ 有多个零点, 从而难以讨论极大值点. 我们用引理 2 避开了这一困难, 之后的讨论就水到渠成了.

另外, f_N 的形式容易让人猜测是否与 Fourier 分析有关.其实读者也可以发现 $\lim\limits_{N\to\infty} f_N(\frac{\pi}{2})$ 其实是某一方波函数的 Fourier 级数, 具体可参见 [1].

B1. 对于正整数 n, 定义 $d(n)$ 为 n 的二进制表示下的数字和 (例如, $d(13) = 1+1+0+1=3$). 令

$$S = \sum_{k=1}^{2020} (-1)^{d(k)} k^3.$$

求 S 模 2020 的值.

解 $S \equiv 1990 \pmod{2020}$.

我们定义 $f(k) := (-1)^{d(k)}k^3$. 来证明一关键结论:

引理 成立

$$\sum_{n=16k}^{16k+15} f(k) = 0, \forall k \in \mathbb{N}.$$

证明 注意到, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} f(16k) + f(16k+1) &= (-1)^{d(16k)} \left((16k)^3 - (16k+1)^3\right) \\ &= (-1)^{d(16k)} - (768k^2 + 48k + 1). \end{aligned}$$

同理可以计算得到

$$f(16k+2) + f(16k+3) = (-1)^{d(16k)} \left(768k^2 + 240k + 19\right);$$
$$f(16k+4) + f(16k+5) = (-1)^{d(16k)} \left(768k^2 + 432k + 61\right);$$
$$f(16k+6) + f(16k+7) = (-1)^{d(16k)} - \left(768k^2 + 624k + 127\right).$$

因此

$$\sum_{n=16k}^{16k+7} f(k) = (-1)^{d(16k)} - 48.$$

同理可验证

$$\sum_{n=16k+8}^{16k+15} f(k) = (-1)^{d(16k)} 48.$$

故确有 $\sum\limits_{n=16k}^{16k+15} f(k) = 0$, 引理得证.

回到原题, 可见

$$S = \sum_{n=1}^{2020} f(n) = \sum_{n=0}^{2020} f(n) = \sum_{n=0}^{2015} f(n) + \sum_{n=2016}^{2020} f(n)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{125} \sum_{n=16k}^{16k+15} f(n) + \sum_{n=2016}^{2020} f(n) = \sum_{n=2016}^{2020} f(n) \\
&\equiv (-4)^3 - (-3)^3 - (-2)^3 + (-1)^3 = -30 \equiv 1990 \pmod{2020}.
\end{aligned}
$$

$\square$

评注 看起来有点吓人的题目, $d(k)$ 的定义让人一时不知怎么处理.

不过稍作尝试后就不难注意到, $(-1)^{d(n)}$ 有较为规律的正负交错的特性, 从而考虑某些项求和后是否为常数, 问题至此也就基本解决了.

B2. 设 k, n 为满足 $1 \le k < n$ 的整数. Alice 和 Bob 玩一个游戏: 在一条直线上排有 n 个洞, 这些洞中有 k 个塞子. 在游戏的开始, 塞子位于最左边的 k 个洞. 一次合法的移动指将某塞子移至其右端的某个空洞中. 两玩家交替移动, 由 Alice 开始.当塞子被挪动至最右边 k 个洞时游戏结束, 此时不能进行下一次移动的玩家输掉游戏. 对于哪些 n 和 k 的值, Alice 有必胜策略?

解 我们来说明: 当且仅当 k, n 不全为偶数时, Alice 有必胜策略.

为叙述简便, 做如下简化: 将 n 个洞从左到右分别用编号 $1, 2, \cdots, n$ 代指; 将 Alice 称为 A, Bob 称为 B; 对于 k 个塞子, n 个洞的游戏, 用二元数组 (k, n) 代指; 另外, 我们用 $i \mapsto j$ 表示将 i 处塞子移至 j 的一次操作, 其中 j 处在操作前没有塞子(要求 $i < j$).

先对 (k, n) 均为偶数的情形进行讨论, 用引理的形式呈现如下.

引理 当 k, n 均为偶数时, B 有必胜策略.

证明 记 $T_i := \{2i-1, 2i\}, 1 \le i \le \frac{n}{2}$. 对于 $\forall x \in T_i$, 我们记 $\bar{x}$ 为 T_i 中另一元素.

B 的策略如下: A 进行操作 $x \in T_i \mapsto y \in T_j$ 时, B 进行操作 $\bar{x} \mapsto \bar{y}$.这一操作总是合法的 (读者可自行验证). 因此 B 总能在 A 后相应地走一步, 从而 B 依据上述策略必胜, 引理得证.

下面只需说明, 当 k, n 不全为偶数时, A 有必胜策略.分情况讨论如下:

(i) k 为偶数, n 为奇数: A 取第一步操作为 $1 \mapsto k+1$, 不难看出经这一步后, 可以认为此时游戏变为 $(k, n-1)$ 情形, 此时 A 为后手;

(ii) k 为偶数, n 为奇数:A 取第一步操作为 $k \mapsto n$, 不难看出经这一步后, 可以认为此时游戏变为 $(k-1, n-1)$ 情形, 此时 A 为后手;

(iii) k 为偶数, n 为奇数: A 取第一步操作为 $1 \mapsto n$, 不难看出经这一步后, 可以认为此时游戏变为 $(k-1, n-2)$ 情形, 此时 A 为后手;

以上三种情形覆盖了所有情况, 且据引理知这三种情形 A 均有必胜策略.

综合以上讨论, 我们完成了证明. □

评注 必胜策略问题, 经过对 k,n 较小情形的尝试后, 不难发现 A 是否有必胜策略与 k,n 的奇偶性相关.

k,n 均为偶数时运用的配对想法是很标准的, 而其他的情况可以化归为上述情形, 从而使问题得到解决.

B3. 令 $x_0=1$, δ 为某一满足 $0<\delta<1$ 的常数. 递归地, 对于 $n=0,1,2,\cdots,x_{n+1}$ 从区间 $[0,x_n]$ 中随机取出, 令 Z 为使得 $x_n<\delta$ 的最小正整数值. 将 Z 的数学期望表示为 δ 的函数 (注: 这里的“随机取出”是指 $x_{n+1}\sim U\,[0,x_n]$).

解 $E(Z)=1-\ln\delta$. 下面给出求解过程.

易由题意得到 $P(Z=1)=\delta$. 对于 $k\geq 2$, 我们有

$$P(Z=k)=\int_\delta^1 \mathrm{d}x_1\int_\delta^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_\delta^{x_{k-2}}\mathrm{d}x_{k-1}\int_0^\delta f(x_1,\cdots,x_k)\mathrm{d}x_k,$$

其中 $f(x_1,\cdots,x_k)$ 为随机变量 $(x_1,\cdots,x_k)$ 的联合概率密度.

事实上, 不难注意到 $f(x_1,\cdots,x_k)=\frac{1}{x_1x_2\cdots x_{k-1}}$. 整理得

$$P(Z=k)=\delta\int_\delta^1\frac{\mathrm{d}x_1}{x_1}\int_\delta^{x_1}\frac{\mathrm{d}x_2}{x_2}\cdots\int_\delta^{x_{k-2}}\frac{\mathrm{d}x_{k-1}}{x_{k-1}}.$$

下面求积分. 我们用数学归纳法证明

$$P(Z=k)=\frac{\delta\ln^{k-1}\frac{1}{\delta}}{(k-1)!},\forall k\in\mathbb{N}^*.$$

$k=1$ 的情形已经证明. 设命题对 $\leq k$ 的情形均成立, 则 $k+1$ 时

$$\begin{aligned}
P(Z=k+1)&=\delta\int_\delta^1\frac{\mathrm{d}x_1}{x_1}\int_\delta^{x_1}\frac{\mathrm{d}x_2}{x_2}\cdots\int_\delta^{x_{k-2}}\frac{\mathrm{d}x_{k-1}}{x_{k-1}}\int_\delta^{x_{k-1}}\frac{\mathrm{d}x_k}{x_k}\\
&=\delta\int_\delta^1\frac{\mathrm{d}x_1}{x_1}\int_\delta^{x_1}\frac{\mathrm{d}x_2}{x_2}\cdots\int_\delta^{x_{k-2}}\frac{\mathrm{d}x_{k-1}}{x_{k-1}}\left(\ln x_{k-1}-\ln\delta\right)\\
&=\delta\int_\delta^1\frac{\mathrm{d}x_1}{x_1}\int_\delta^{x_1}\frac{\mathrm{d}x_2}{x_2}\cdots\int_\delta^{x_{k-2}}\frac{\ln x_{k-1}\mathrm{d}x_{k-1}}{x_{k-1}}+\frac{\delta\ln^k\frac{1}{\delta}}{(k-1)!}\\
&=\cdots\overset{!}{=}\delta\ln^k\frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{1!(k-1)!}+\cdots+\frac{(-1)^{k-2}}{(k-1)!1!}+\frac{(-1)^{k-1}}{0!k!}\right)\\
&=\frac{\delta\ln^k\frac{1}{\delta}}{k!}\sum_{j=1}^k\binom{k}{j}(-1)^j=\frac{\delta\ln^k\frac{1}{\delta}}{k!}\times 1=\frac{\delta\ln^k\frac{1}{\delta}}{k!}.
\end{aligned}$$

标 ! 的等式用到了归纳假设. 从而归纳完毕.

回到原题.注意到

$$E(Z)=\sum_{k=1}^\infty kP(Z=k)=\delta\sum_{k=1}^\infty k\frac{\delta\ln^k\frac{1}{\delta}}{(k-1)!}$$

$$= \delta\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\delta\ln^k\frac{1}{\delta}}{(k-2)!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\delta\ln^k\frac{1}{\delta}}{(k-1)!}\right)$$
$$= \delta\times\frac{1}{\delta}(1+\ln\frac{1}{\delta}) = 1+\ln\frac{1}{\delta} = 1-\ln\delta.$$

□

评注 这是一道比较标准的概率论习题.

只要对多维随机向量的分布函数有正确的认识, 列出积分式都是不困难的, 较为棘手的事情仍然是计算, 这也是本届试题的一个特点.

B4. n 为某一正整数, 并用 V_n 表示 $(2n+1)$ 维数组 $\mathbf{v}=(s_0,s_1,\cdots,s_{2n-1},s_{2n})$ 组成的集合, 其中 $s_0=s_{2n}=0$, 并且 $|s_j-s_{j-1}|=1$ 对 $j=1,2,\cdots,2n$ 成立. 定义

$$q(\mathbf{v}) = 1+\sum_{j=1}^{2n-1}3^{s_j},$$

并设 $M(n)$ 为 $\frac{1}{q(\mathbf{v})}$ 的均值, 这里 $\mathbf{v}\in V_n$. 计算 $M(2020)$.

解 $M(2020)=\frac{1}{4040}$.

对 $S\ni\mathbf{v}:=(s_0,\cdots,s_{2n})$ (注: 下文中 $\mathbf{v}$ 的定义相同), 定义 $\tilde{\mathbf{v}}:=(s_0,\cdots,s_{2n-1})$.

我们考虑二元关系 $\sim$: $\mathbf{v}\sim\mathbf{v_i}$ 当且仅当存在 $0\le t\le 2n-1$, 使得

$$\tilde{\mathbf{v_i}} = (0, s_{t+1}-s_t,\cdots,s_{t+2n-1}-s_t),$$

其中下标按 $\mod 2n$ 理解.

容易验证 $\sim$ 是等价关系, 此处不再赘述.

从而考虑陪集族 $V_n/\sim=:\{\overline{\mathbf{v_1}},\cdots,\overline{\mathbf{v_r}}\}$, 其中 $\mathbf{v_j}\in\overline{\mathbf{v_j}}$, $\forall 1\le j\le r$.

我们来说明 $\overline{\mathbf{v_j}}$ 中 $\frac{1}{q(\mathbf{v})}$ 的均值(记为 $M_j(\mathbf{v})$)为 $\frac{1}{2n}$,$\forall 1\le j\le r$.

为此, 不妨记 $\#\overline{\mathbf{v_j}}=:k$, 这说明 $\mathbf{v_j}=:(s_{j,0},\cdots,s_{j,2n})$ 有长度为 k 的循环节, 从而

$$M_j(\mathbf{v}) = \frac{1}{k}\sum_{\mathbf{v}\in\overline{\mathbf{v_j}}}\frac{1}{q(\mathbf{v})} = \frac{1}{k}\sum_{\mathbf{v}\in\overline{\mathbf{v_j}}}\frac{1}{1+\sum\limits_{i=1}^{2n-1}3^{s_i}}$$
$$= \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1}\frac{1}{\left(1+\sum\limits_{i=1}^{2n-1}3^{s_{j,i}}\right)3^{-s_{j,l}}} = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1}\frac{3^{s_{j,l}}}{1+\sum\limits_{i=1}^{2n-1}3^{s_{j,i}}}$$
$$= \frac{1}{k}\frac{k}{2n} = \frac{1}{2n}, \forall 1\le j\le r$$

故显然有 $M(n)=\frac{1}{2n},\forall n\in\mathbb{N}^*$.

代入 $n=2020$, 即知 $M(n)=\frac{1}{4040}$. □

评注 这是一道比较有趣的题目.

从本题的目标(求均值)来看, 我们自然会思考: 能否将 V_n 分为若干个子集, 使得每一个都易求均值? 这样的想法将我们引向集合的分划, 进一步地, 自然会考虑用等价关系分划该集合.

基于以上思路进行完善, 就有了上述方案.

B5. 对于 $j \in \{1,2,3,4\}$, 令 z_j 为满足 $|z_j|=1$ 且 $z_j \neq 1$ 的复数. 证明

$$3 - z_1 - z_2 - z_3 - z_4 + z_1z_2z_3z_4 \neq 0.$$

证明 我们先证明如下引理:

引理 设复数 $z_j (1 \le j \le 3)$ 满足 $|z_j|=1$, 则如下的不等式恒成立:

$$|z_1z_2z_3 - 1| \le |z_1+z_2+z_3-3|.$$

并且等号成立当且仅当存在某个 $1 \le k \le 3$ 使得 $z_k = 1$.

证明 不妨 $z_j = \cos\theta_j + \mathrm{i}\sin\theta_j, \theta_j \in [0,2\pi], 1 \le j \le 3$, 从而

$$\begin{aligned}
&|z_1+z_2+z_3-3| - |z_1z_2z_3-1| \\
=&\sum_{j=1}^{3}((\cos\theta_j - 1)^2 + \sin^2\theta_j) - (\cos(\sum_{j=1}^{3}\theta_j) - 1)^2 - \sin^2(\sum_{j=1}^{3}\theta_j) \\
=&\, 4 - 2\sum_{j=1}^{3}\cos\theta_j + \cos(\sum_{j=1}^{3}\theta_j) =: f(\theta_1,\theta_2,\theta_3).
\end{aligned}$$

此时连续函数 f 定义在紧集 $[0,2\pi]^3$ 上, 从而存在最小值.下面只需说明该函数最小值为 0, 且最小值一定在边界上取到. 为此, 注意到

$$\nabla f(\theta_1,\theta_2,\theta_3) = \left(2\sin\theta_1 - \sin(\sum\theta_j), 2\sin\theta_2 - \sin(\sum\theta_j), 2\sin\theta_3 - \sin(\sum\theta_j)\right).$$

故

$$\nabla f(\theta_1,\theta_2,\theta_3) = 0 \Leftrightarrow \sin\theta_1 = \sin\theta_2 = \sin\theta_3 = \frac{\sin(\sum\theta_j)}{2}.$$

此时有且仅有如下两类可能性:

(i) 若 $z := z_1 = z_2 = z_3$, 设 $\arg z =: \theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2}\sin(3\theta) \Rightarrow \sin\theta = 0$.

(ii) 若 $z := z_1 = z_2 = \bar{z}_3$, 同样设

$$\begin{aligned}
\arg z =: \theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2}\sin(\theta + (2k+1)\pi) = -\frac{1}{2}\sin\theta \\
\Rightarrow \sin\theta = 0 (k=0,1).
\end{aligned}$$

而不难验证 $f(\pi,\pi,\pi) = 9$ 不是极小值, 这说明 f 在 $[0,2\pi]^3$ 的极小值必于边界上取到.

最后只需证明在边界上不等式恒成立, 不妨 $z_3=1$. 即只需说明

$$|z_1z_2-1|\le|z_1+z_2-2|.$$

到这里, 我们只需通过下面的演算来说明这一事实:

$$\begin{aligned}
&(1-z_1z_2)(1-\bar{z}_1\bar{z}_2)\le(2-z_1-z_2)(2-\bar{z}_1-\bar{z}_2)\\
\Leftrightarrow\ &2-z_1z_2-\bar{z}_1\bar{z}_2\le 6-2(z_1+\bar{z}_1)-2(z_2+\bar{z}_2)+z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2\\
\Leftrightarrow\ &(z_1+\bar{z}_1)(z_2+\bar{z}_2)-2(z_1+\bar{z}_1)-2(z_2+\bar{z}_2)+4\ge 0\\
\Leftrightarrow\ &(z_1+\bar{z}_1-2)(z_2+\bar{z}_2-2)\ge 0.
\end{aligned}$$

最后一个不等式是平凡的, 且等号成立当且仅当 z_1,z_2 中至少有一者为 1.

至此我们完成了引理的证明.下回到原题.

用反证法, 假设存在 $z_j,1\le j\le 4$ 使得 $3-z_1-z_2-z_3-z_4+z_1z_2z_3z_4=0$.下面来说明存在 $1\le k\le 4$, 满足 $z_k=1$.

注意到此时有

$$\begin{aligned}
(z_1z_2z_3-1)z_4=z_1+z_2+z_3-3\Rightarrow z_4&=\frac{z_1+z_2+z_3-3}{z_1z_2z_3-1}\\
\Rightarrow 1=|z_4|&=\frac{|z_1+z_2+z_3-3|}{|z_1z_2z_3-1|}.
\end{aligned}$$

据引理知 $z_j(1\le j\le 3)$ 中必存在一者等于 1, 与假设矛盾.

综合上述讨论, 我们完成了本题的证明. □

评注 初看这个不等于号会让人觉得奇怪, 但稍加探索后就能发现本质上是形如引理的模长不等式.

我们用完全类似的方法, 可以将引理推广至 n 元, 得到一形式优美的不等式, 这里不再赘述.

B6. 令 n 为一正整数. 证明:

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{\lfloor k(\sqrt{2}-1)\rfloor}\ge 0,$$

其中, $\lfloor x\rfloor$ 表示不小于 x 的最小整数.

我们这里给出一简洁而优雅的证法, 思路启发自 [2], 经整理得到.

另外, 在此题的证明过程中, 不区分 $[\cdot]$ 与 $\lfloor\cdot\rfloor$ 两符号.

证明 我们记 $a_n:=\left[n(\sqrt{2}-1)\right],b_n:=\left[n(\sqrt{2}+1)\right],\forall n\in\mathbb{N}^*$. 写出 $\{a_n\}$ 的前几项后, 可以发现每个正整数都在该数列中出现, 且仅可能出现两次或三次.

自然地, 我们希望求得哪些正整数值会出现三次. 如下的关键引理回答了

这一问题:

引理　对 $\forall t\in\mathbb{N}^*$, 数列 $\{a_n\}$ 有连续三项为 t 当且仅当存在 $l\in\mathbb{N}^*, t=b_l$.

证明　设 t 满足题意, 于是存在 $n\in\mathbb{N}^*, t=a_n=a_{n+1}=a_{n+2}<t+1$.

记 $l:=n-2t$, 我们有(注意到 $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=1$)

$$\begin{aligned}&t=a_n=a_{n+1}=a_{n+2}<t+1\\ \Leftrightarrow\ & t<n(\sqrt{2}-1)<(n+2)(\sqrt{2}-1)<t+1\\ \Leftrightarrow\ & t(\sqrt{2}+1)<n<t(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}-1)\\ \Leftrightarrow\ & t(\sqrt{2}-1)<n-2t<(t+1)(\sqrt{2}-1)\\ \Leftrightarrow\ & l(\sqrt{2}+1)-1<t<l(\sqrt{2}+1)\\ \Leftrightarrow\ & t=\left[l(\sqrt{2}+1)\right]=b_l.\end{aligned}$$

回到原题, 我们利用无穷递降法.

假设 $N:=\min\left\{n\in\mathbb{N}^*\Big|\sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^{a_i}<0\right\}$.

由 N 的定义, 首先可以得到 $(-1)^{a_N}=-1$, 否则

$$\sum_{i=1}^{N-1}(-1)^{a_i}=\left(\sum_{i=1}^{N}(-1)^{a_i}\right)-1,$$

立得矛盾.

其次, a_N 在数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中出现三次, 否则 a_N 仅出现两次, 则可能有下述两种情形:

$$a_N=a_{N-1}=-1, a_{N-2}=a_{N-3}=1\Rightarrow\sum_{i=1}^{N-4}(-1)^{a_i}=\sum_{i=1}^{N}(-1)^{a_i}<0,$$

或

$$a_N=-1, a_{N-1}=1\Rightarrow\sum_{i=1}^{N-2}(-1)^{a_i}=\sum_{i=1}^{N}(-1)^{a_i}<0,$$

均得到矛盾.

从而由引理知存在 $l\in\mathbb{N}^*$, 使得 $a_N=b_l$. 且当 $N\geq 5$ 时, 成立

$$\frac{N}{2}>\left[N(\sqrt{2}-1)\right]=a_N=b_l=\left[l(\sqrt{2}+1)\right]\geq l.$$

故 $N>2l>l$, 而 $\sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^{a_i}<0\Rightarrow\{b_k\}_{k=1}^{l}$ 中值为奇数的项个数多于值为偶数的项的个数. 从而

$$\sum_{j=1}^{l}(-1)^{b_j}<0.$$

我们又注意到

$$b_k=\left[k(\sqrt{2}+1)\right]\equiv\left[k(\sqrt{2}-1)\right]=a_k\pmod 2$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{l}(-1)^{a_j}=\sum_{j=1}^{l}(-1)^{b_j}<0.$$

于是我们得到了 $l<N$ 使得 $\sum\limits_{j=1}^{l}(-1)^{a_j}<0$, 这与 N 的最小性矛盾.

这说明不存在这样的自然数 N, 进而题目所给的不等式恒成立. □

评注 本题给出的不等式颇吸引人, 不过有着一定的难度.

对于此题, 笔者想要传达的基本都体现在上述解答中. 事实上, 不难发现对和式的正负性起决定性作用的是在 $\{a_n\}$ 中出现三次的整数值, 引理对这样的值给出了一个成功的刻画; 后面利用无穷递降法, 本质上也是利用数学归纳法, 将命题转化为之前讨论过的情形.

以上的解法可以被称为"巧解", 利用的 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 同奇偶的性质难以推广. 对于本题, 或许可以进行进一步的探索, 如考虑对怎样的 $0<r<1$, $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{[kr]}\geq 0$ 对 $\forall n\in\mathbb{N}^*$ 恒成立, 有兴趣的读者可进行尝试.

参考文献

[1] Manjul Bhargava, Kiran Kedlaya, and Lenny Ng. Solutions to the 81st William Lowell Putnam Mathematical Competition [EB/OL], [2021-3-4]. https://kskedlaya.org/putnam-archive/2020s.pdf

[2] Putnam 2020 B6(Feburary 25, 2021) [EB/OL]. [2021-3-4]. https://artofproblemsolving.com/community/c7t441f7h2461222_putnam_2020_b6