从立体到平面—线性化技巧

聂子佩

1. 线性化技巧介绍

在读高中的时候, 作者喜欢看 Matrix67 的博客, 他常常写一些科普文字, 读来引人入迷. 在他的博客里, 文章《几个把平面几何问题的辅助线做到空间去的数学趣题》介绍了几种将平面图形视为立体图形的投影的解题手段, 其中第一个问题是根心定理在三个圆两两相交时的特例, 即证明两两相交的三个圆两两的公共弦共点. 在这个证明中, 我们把这三个圆盘视为三个球面在它们的球心所在平面上的投影, 则这三个圆两两的公共弦成为了这三个球面两两交集的投影, 由于这三个球面有公共点, 所以这三条公共弦共点.

为了让这份证明适用于一般情形, 我们希望这三个圆在三维空间中所对应的曲面在一般情形下两两相交. 平面是满足这样性质的曲面, 而球面上的圆可以对应这个圆所在的平面, 所以我们得到球面上的根心定理: 定义球面上两个圆的根轴为它们各自所在平面的交线, 则球面上的三个圆两两根轴共点. 当这个球的半径趋于无穷时, 我们期望球面上的圆的投影椭圆趋于圆形, 而两平面交线的投影趋于两圆的根轴, 这样我们就会得到一般情形下的根心定理, 注意到后者在两圆相交的情形下是容易看出其正确性的.

在这个证明中, 我们发现球面保证了平面与之相交总是圆形, 然而我们真正想要的是它在一个固定平面上的投影趋于圆形. 为了简化这个过程, 我们希望找另一种曲面来替代球面, 使得平面与其相交得到的图形的投影总是圆形. 这个曲面是抛物面.

设单位抛物面

$$U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = x_1^2 + x_2^2\}, \tag{1}$$

则平面

$$P = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\} \tag{2}$$

上的圆

$$C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 = r^2, x_3 = 0\} \tag{3}$$

对应着平面

$$h=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3:2a_1x_1+2a_2x_2-x_3-a_1^2-a_2^2+r^2=0\}. \tag{4}$$

我们还可以赋予平面 h 一个定向，即令半空间

$$h^+=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3:2a_1x_1+2a_2x_2-x_3-a_1^2-a_2^2+r^2>0\}. \tag{5}$$

这样一来 $h\cap U$ 在平面 P 上的投影是圆 C, 而 $h^+\cap U$ 在 P 上的投影是圆 C 的内部. 我们可以验证平面 P 上的两圆对应的平面的交集是这两圆的根轴, 如此这般, 便得到了根心定理.

我们称这种将低维的半代数集(即用一些代数方程和代数不等式界定的点集)转化为高维的多胞形(即多边形和多面体的高维推广) 的方法为线性化技巧, 这将许多组合几何与实代数几何中的问题转化为多胞形理论中的问题. 圆形远不是仅有的可以被线性化的图形, 如果我们需要线性化平面上的所有二次曲线, 那么我们可以用

$$U'=\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\mathbb{R}^5:x_3=x_1^2,x_4=x_1x_2,x_5=x_2^2\} \tag{6}$$

这个五维空间中的曲面来替代原先使用的单位抛物面 U. 一般地, 在最糟糕的情形下, 我们总可以利用 Veronese 映射来线性化一组次数有界的半代数集.

2. 例子

我们给下面的定理以两种证明.

定理 1. *设 n 为正整数, $C_1,C_2,\ldots,C_n$ 是平面上的 n 个两两不同的圆. 那么, 不存在 $6n$ 个不同的点 $P_1,P_2,\ldots,P_{6n}$, 使得每个点都是其中两个圆的交点, 且不在其它圆上或其内部.*

证明 1. 构造 n 个顶点的简单图 G, 使得对于 $1\le i<j\le n$, 第 i 个顶点与第 j 个顶点相邻当且仅当存在 C_i 和 C_j 的一个交点在其它每个圆的外部.

让这 n 个圆的圆心代表 G 的顶点; 对于 $1\le i<j\le n$, 若存在 C_i 和 C_j 的一个交点在其它每个圆的外部, 让从 C_i 的圆心到 C_i 和 C_j 的一个满足定理要求的交点再到 C_j 的圆心的折线段代表 G 中对应的边. 由三角形不等式, 我们可以证明这些折线段只能相交于端点, 于是这是一个从 G 到平面的嵌入, 这便证明了 G 是一个平面图.

由于平面图 G 的边数不超过 $\max\{n-1,3n-6\}$, 而一条边至多对应两个满足定理要求的点, 所以这样的点的数目至多为 $2\max\{n-1,3n-6\}<6n$. $\square$

证明 2. 如前文定义单位抛物面 U, 平面 P 和与圆 C_i $(1 \le i \le n)$ 对应的平面 h_i 和半空间 h_i^+. 令凸多面体

$$K = \mathbb{R}^3 \Big\backslash \bigcup_{i=1}^{n} h_i^+, \tag{7}$$

则 K 至多有 n 个面, 故它至多有 $\max\{n-1, 3n-6\}$ 条棱. 对于 $1 \le i < j \le n$, 若存在 C_i 和 C_j 的一个交点在其它每个圆的外部, 则 $h_i \cap h_j \cap K$ 是 K 的一条棱. 由于两个圆至多有两个交点, 满足定理要求的点的数目至多为 $2\max\{n-1, 3n-6\} < 6n$. □

第一种证明利用了图论的方法, 类似的想法可以把定理 1 推广为如下形式.

定理 2. 设 n 为正整数, $C_1, C_2, \ldots, C_n$ 是平面上的 n 条简单闭曲线, 使得任何两条曲线或者不交, 或者交于两点, 并且每条曲线在交点处越过另一条曲线. 那么, 至多存在 $2\max\{n-1, 3n-6\}$ 个点, 使得它们至少在其中两条曲线上, 且不在其它曲线的内部.

更具体地, 我们先用调整法把它化归为具有以下附加条件的问题. 第一, 在每条曲线的内部都存在一点，不在任何其它曲线上或其内部; 第二, 任何三条曲线的内部的交集为空集. 然后我们构造平面图并得到结论.

第二种证明则是利用了线性化技巧. 一方面, 由于只有半代数集可以被线性化, 我们不可能用这种想法来处理定理 2. 另一方面, 在多胞形理论中, 有下面这样的上界定理.

定理 3. 对正整数 d, 存在常数 $c_d > 0$, 使得若一个 d 维的有界多胞形有 n 个 $d-1$ 维的面, 则它所有维数的面的总数不超过 $c_d n^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}$.

我们略过定理 3 的证明, 感兴趣的读者可以参考相关的教科书.

通过利用定理 3 和线性化技巧, 可以得到如下结果, 这是定理 1 的另一种推广.

定理 4. 对正整数 d, 存在常数 $c_d > 0$, 使得对每个正整数 n, 在 $\mathbb{R}^d$ 上的任何 n 个 d 维球的并集的边界都可以被划分为不超过 $c_d n^{\lceil \frac{d}{2} \rceil}$ 个 $d-1$ 维球面的连通子集.

值得一提的是, 定理 4 里提到的幂次 $\lceil \frac{d}{2} \rceil$ 是最佳的. 也就是说, 我们有这样的结果.

定理 5. 对正整数 d, 存在常数 $c_d > 0$, 使得对每个正整数 n, 在 $\mathbb{R}^d$ 上存在

n 个 d 维球, 它们的并集的边界不可以被划分为不超过 $c_d n^{\lceil \frac{d}{2} \rceil}$ 个 $d-1$ 维球面的连通子集.

欲证明定理 5, 最大的难点在 $d=3$ 的情形. 作者仅想为此给读者编个灯谜: 细长水管有棱角, 一排汤圆堵中央. (打定理 5 的证明)