好题与妙解 (二)

——2016 年新星寒假班中的若干问题

冷岗松

2016 年春节前, 在上海数学新星寒假班上, 我提供了一份题为“数学问题精选 30 例”的讲义提纲. 这些问题大多是从国内外最新的竞赛资料中挑选出来的代数问题. 本文对其中的 11 个问题进行讨论, 介绍其背景及解法, 其中有些解法是参加寒假班的学生们提供的.

题 1. 设 $a \geq b \geq c > 0$, 证明: 对任何 $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$ 有

$$\frac{a-b}{a\sin t + b\cos t} + \frac{b-c}{b\sin t + c\cos t} + \frac{c-a}{c\sin t + a\cos t} \geq 0. \tag{1}$$

(Titu Andreescu, Math. Relf. **3**(2015))

先看 Math. Relf. 上的解答.

证法一 去分母, 则不等式 (1) 等价于

$$\begin{aligned}&(a^2b + b^2c + c^2a - 3abc)\sin t(\cos t - \sin t)\\ &+ (ab^2 + bc^2 + ca^2 - 3abc)\cos t(\cos t - \sin t)\\ &+ (a-b)(b-c)(a-c)\sin t\cos t \geq 0,\end{aligned} \tag{2}$$

再由算术–几何平均值不等式易得

$$a^2b + b^2c + c^2a - 3abc \geq 0, \tag{3}$$

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 - 3abc \geq 0. \tag{4}$$

注意到 $\cos t \geq \sin t$ $(t \in [0, \frac{\pi}{4}])$, 由 (3), (4) 便知 (2) 成立, 从而 (1) 得证. □

上述证法尽管篇幅不长, 但对代数变形技巧的要求是比较高的.

黄冈中学的陈耀斌同学提供了下面较自然且简单的解法.

证法二 应用 Cauchy不等式, 我们有

$$\frac{a-b}{a\sin t + b\cos t} + \frac{b-c}{b\sin t + c\cos t}$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{(a-b)^2}{(a-b)(a\sin t+b\cos t)}+\frac{(b-c)^2}{(b-c)(b\sin t+c\cos t)}\\
&\ge\frac{(a-c)^2}{(a-b)(a\sin t+b\cos t)+(b-c)(b\sin t+c\cos t)}.
\end{aligned}
$$

因此要证 (1), 只需证明:

$$(a-b)(a\sin t+b\cos t)+(b-c)(b\sin t+c\cos t)\le(a-c)(a\cos t+c\sin t),$$

这等价于

$$(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)(\sin t-\cos t)\le 0. \tag{5}$$

又注意到两个熟知的结果: $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$, $\cos t\ge\sin t(t\in[0,\frac{\pi}{4}])$, 便知 (5) 显然成立. 因此 (1) 得证. □

下面的解法由华南师大附中的任秋宇同学提供, 也是自然而有趣的.

证法三 易见不等式等价于

$$\frac{a-b}{a\tan t+b}+\frac{b-c}{b\tan t+c}+\frac{c-a}{c\tan t+a}\ge 0. \tag{6}$$

记 $x=\tan t$, 则 $x\in[0,1]$. 这时 (6) 等价于

$$\frac{a-b}{xa+b}+\frac{b-c}{xb+c}\ge\frac{a-b}{xc+a}+\frac{b-c}{xc+a}.$$

进一步它等价于

$$(b-c)\cdot\frac{a-xb-(1-x)c}{(xb+c)(xc-a)}\ge(a-b)\cdot\frac{-(1-x)a+b-xc}{(xa+b)(xc+a)}. \tag{7}$$

记 $a-b=m\ge 0$, $b-c=n\ge 0$, 这时 (7) 可等价重写为

$$m\cdot\frac{m+(1-x)n}{(xb+c)}\ge m\cdot\frac{-(1-x)m+xn}{(xa+b)}. \tag{8}$$

下证 (8) 成立.

事实上, 若 (8) 式右边是非正的, 则结论成立.

否则, 由 $xb+c\le xa+b$ 知要证 (8) 成立, 只须证

$$n\big(m+(1-x)n\big)\ge m\big(xn-(1-x)m\big),$$

这等价于 $(1-x)(mn+m^2+n^2)\ge 0$, 它是显然成立的. 故 (8) 得证. □

题 2. 设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$ 满足

$$\frac{1}{a^3+b^3+1}+\frac{1}{b^3+c^3+1}+\frac{1}{c^3+a^3+1}\ge 1,$$

证明:

$$(a+b)(b+c)(c+a)\le 6+\frac{2}{3}(a^3+b^3+c^3).$$

(Nguyen Viet Hung, Math. Relf. **3**(2015))

先看 Math Relf. 上的解答.

证法一 通过去分母及整理, 条件等价于

$$2(1+a^3+b^3+c^3)\ge(a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3).\tag{$*$}$$

因为 $a^3+b^3\ge 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^3$, 由 $(*)$ 可得

$$2(1+a^3+b^3+c^3)\ge 8x^3,\tag{$**$}$$

其中 $x=\frac{1}{8}(a+b)(b+c)(c+a)$.

因此

$$2(a^3+b^3+c^3)+18-24x\ge 8x^3-24x+16=8(x-1)^2(x+2)\ge 0;$$

故

$$2(a^3+b^3+c^3)+18\ge 24x,$$

这就是要证的不等式. □

上述解法的关键是将条件改写为 $(*)$, 再由一个简单的局部不等式得到 $(**)$. 此法并不容易想到.

下面是东北育才学校邱梓航同学的解法.

证法二 由 Hölder 不等式知

$$(a^3+b^3+1)(1+1+c^3)(1+1+1)\ge(a+b+c)^3,$$

因此

$$\frac{1}{a^3+b^3+1}\le\frac{3c^3+6}{(a+b+c)^3},$$

故

$$\sum\frac{1}{a^3+b^3+1}\le\frac{3(a^3+b^3+c^3)+18}{(a+b+c)^3}.$$

这样由条件便得

$$3(a^3+b^3+c^3)+18\ge(a+b+c)^3\tag{1}$$

再注意到恒等式

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a),$$

由 (1) 便得所证不等式. □

题 3. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_{19}$ 是均不超过 93 的正整数, $y_1,y_2,\cdots,y_{93}$ 均是不超过

19 的正整数. 证明: 存在 $\{x_i\}_{i=1}^{19}$ 的一些数 (非空) 的和等于 $\{y_j\}_{j=1}^{93}$ 中一些数的和.

(MOSP, 2004; 22 届前苏联, 1988)

证明 不妨设 $x_1+x_2+\cdots+x_{19}>y_1+y_2+\cdots+y_{93}$. 对任意 $1\le i\le 19, 1\le j\le 93$, 考虑和

$$S_i=x_1+x_2+\cdots+x_i,\quad T_j=y_1+y_2+\cdots+y_j.$$

对每个 $1\le j\le 93$, 令 $f(j)$ 是使得 $T_j\le S_i$ 成立的所有下标 i 的最小者 (因 $T_j\le T_{19}<S_{93}$, 这样的下标是存在的), 则

$$S_{f(j)-1}<T_j\le S_{f(j)},$$

且 $f(j)$ 是 j 的不减函数.

现考虑差 $S_{f(j)}-T_j\ (1\le j\le 93)$. 因为

$$93\ge x_{f(j)}=S_{f(j)}-S_{f(j)-1}>S_{f(j)}-T_j>0,$$

所以 $S_{f(j)}-T_j$ 是小于 93 的非负整数.

若存在 $j\ (1\le j\le 93)$ 使得 $S_{f(j)}-T_j=0$, 则结论已成立; 若对任意 $1\le j\le 93$, $S_{f(j)}-T_j$ 均不等于 0, 则 $S_{f(j)}-T_j$ 仅取 1到 92 间的整数. 由抽屉原理知存在 $1\le i<k\le 93$ 使得

$$S_{f(i)}-T_i=S_{f(k)}-T_k.$$

亦即

$$x_{f(j)+1}+x_{f(j)+2}+\cdots+x_{f(k)}=y_{i+1}+y_{i+2}+\cdots+y_k.$$

结论成立. □

评注. 此题是一个用组合方法来处理的代数问题. 解法的关键是找与 $T_j\ (1\le j\le 93)$ 最接近的 $S_{f(j)}$, 从而差 $S_{f(j)}-T_j$ 的取值范围就很小了, 进而可由抽屉原理解决了.

题 4. 证明: 对任意正实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$. 若 $x_1x_2\cdots x_n=1$. 则

$$n\left(\prod_{i=1}^{n}(1+x_i^n)\right)^{\frac{1}{n}}\ge\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}.$$

(选自 [1])

先看 [1]中介绍的解答.

证法一 由算术–几何平均值不等式及条件可得

$$\frac{x_1^n}{1+x_1^n}+\frac{x_2^n}{1+x_2^n}+\cdots+\frac{x_{n-1}^n}{1+x_{n-1}^n}+\frac{1}{1+x_n^n}\geq\frac{nx_1x_2\cdots x_{n-1}}{\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n}(1+x_i^n)}}=\frac{n}{x_n\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n}(1+x_i^n)}},$$

$$\frac{1}{1+x_1^n}+\frac{1}{1+x_2^n}+\cdots+\frac{1}{1+x_{n-1}^n}+\frac{x_n^n}{1+x_n^n}\geq\frac{nx_n}{\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n}(1+x_i^n)}}.$$

将上面两个不等式相加可得

$$n\geq\frac{n}{x_n\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n}(1+x_i^n)}}+\frac{nx_n}{\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n}(1+x_i^n)}},$$

亦即

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(1+x_i^n)}\geq x_n+\frac{1}{x_n}. \tag{$*$}$$

同理对 $x_{n-1},\cdots,x_1$ 写出类似于 $(*)$ 的局部不等式, 再将这 n 个不等式相加便得所证结果. □

这是一个技巧性很强的解法. 下面是上海中学学生高皓天 (2016 年国家集训队队员) 的解答.

证法二 一方面, 注意到

$$\begin{aligned}\text{左边}&=\left(\prod_{i=1}^{n}n(1+x_i^n)\right)^{\frac{1}{n}}\\&=\left(\prod_{i=1}^{n}\big(\underbrace{1+\cdots+1}_{n\text{ 个}}+\underbrace{x_i^n+\cdots+x_i^n}_{n\text{ 个}}\big)\right)^{\frac{1}{n}}.\end{aligned}\tag{$*$}$$

另一方面, 由 Hölder 不等式

$$\begin{aligned}&\big(1+\underbrace{x_1^n+x_1^n+\cdots+x_1^n}_{n-1\text{ 个}}+x_1^n+\underbrace{1+\cdots+1}_{n-1\text{ 个}}\big)\\&\cdot\big(x_2^n+1+\underbrace{x_2^n+\cdots+x_2^n}_{n-2\text{ 个}}+1+x_2^n+\underbrace{1+\cdots+1}_{n-2\text{ 个}}\big)\\&\cdot\big(x_3^n+x_3^n+1+\underbrace{x_3^n+\cdots+x_3^n}_{n-3\text{ 个}}+1+1+x_3^n+\underbrace{1+\cdots+1}_{n-3\text{ 个}}\big)\\&\cdots\\&\cdot\big(\underbrace{x_n^n+x_n^n+\cdots+x_n^n}_{n-1\text{ 个}}+\underbrace{1+\cdots+1+1}_{n\text{ 个}}+x_n^n\big)\\\geq&\big(x_2x_3\cdots x_n+x_1x_3\cdots x_n+\cdots+x_1x_2\cdots x_{n-1}+x_1+x_2+\cdots+x_n\big)^n\end{aligned}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} + \sum_{i=1}^{n} x_i \right). \tag{$**$}$$

由 $(*)$ 和 $(**)$ 便得所证结果. $\square$

还有一个简洁的用 Hölder 不等式导出局部不等式的方法.

证法三 由 Hölder 不等式

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(1+x_i^n)} = \sqrt[n]{\left(\prod_{j\neq i}(1+x_j^n)\right)(x_i^n+1)}$$
$$\geq x_i + \prod_{j\neq i} x_j = x_i + \frac{1}{x_i}, \quad i=1,2,\cdots,n$$

将上面 n 个不等式相加便得所证结果. $\square$

题 5. 试求所有函数 $f:\mathbf{N}^* \to \mathbf{R}^+$, 满足

(i) $f(2)=2$;

(ii) 任取 $m,n\in\mathbf{N}^*$, $f(m,n)=f(m)f(n)$;

(iii) 任取 $m<n$, $f(m)<f(n)$.

这似乎是一个经典问题, 如 [2] 中就系统研究过这个问题. 这个问题是确定 $\mathbf{N}^* \to \mathbf{R}^+$上的函数, 且由条件 (ii) 易知 $f(2^k)=2^k$. 这诱发我们用极限推出 $\mathbf{N}^*$ 上也有 $f(x)=x$ 这一性质.

解 由条件 (ii) 可得 $f(2^k)=2^k, k\in\mathbf{N}^*$. 任取 $m\in\mathbf{N}^*$, 并设 $f(m)=l\in\mathbf{R}$. 下证 $l=m$, 从而确定了满足题设条件的函数为 $f(x)=x, x\in\mathbf{N}^*$.

事实上, 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, 由条件 (ii) 有

$$f(m^n)=l^n.$$

又注意到存在 $k\in\mathbf{N}^*$ 使得

$$2^k \leq m^n < 2^{k+1}, \tag{1}$$

因此由条件 (iii) 便得

$$f(2^k)\leq f(m^n) < f(2^{k+1}),$$

亦即

$$2^k \leq l^n < 2^{k+1}. \tag{2}$$

这样由 (1), (2) 有

$$\frac{1}{2} < \left(\frac{m}{l}\right)^n < 2, \quad \forall n\in\mathbf{N}^*. \tag{3}$$

如果 $m>l$, 令 $n\to+\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{m}{l}\right)^n=+\infty$, 这与 (3) 右边的不等式矛盾; 如果 $m<l$, 令 $n\to+\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{m}{l}\right)^n=0$, 这与 (3) 左边的不等式矛盾. 这就证明了 $m=l$. $\square$

题 6. 求所有函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 满足

$$f(xy)\le yf(x)+f(y),\quad x,y\in\mathbf{R}. \tag{1}$$

(2015, 希腊)

这是一个给定函数不等式求函数的问题, 解题过程中当尽量出现反向不等式, 把其转化成函数方程 (等式型) 来处理.

解 在条件中用 $-y$ 替代 y 可得

$$f(-xy)\le -yf(x)+f(-y). \tag{2}$$

将 (1), (2) 相加可得

$$f(xy)+f(-xy)\le f(y)+f(-y),\quad x,y\in\mathbf{R}. \tag{3}$$

在 (3) 中令 $y=1$ 可得

$$f(x)+f(-x)\le f(1)+f(-1),\quad x\in\mathbf{R}. \tag{4}$$

在 (3) 中将 x 用 $\dfrac{1}{y}$ 替代可得

$$f(1)+f(-1)\le f(y)+f(-y),\quad y\ne 0. \tag{5}$$

由 (4) 和 (5) 立得

$$f(y)+f(-y)=f(1)+f(-1)=C,\quad y\ne 0.$$

这时由 (2) 便有

$$C-f(xy)\le -yf(x)+C-f(y),$$

亦即

$$yf(y)+f(y)\le f(xy),\quad x,y\ne 0. \tag{6}$$

再由 (1) 和 (6) 可得

$$f(xy)=yf(x)+f(y),\quad x,y\ne 0. \tag{7}$$

(7) 是关键的, 即将不等式 (1) 变成了等式. 在 (7) 中令 $x=y=1$ 得 $f(1)=0$. 在 (7) 中交换 x,y 可得

$$f(yx)=xf(y)+f(x),\quad x,y\ne 0. \tag{8}$$

由 (7), (8) 可得

$$yf(x)+f(y)=xf(y)+f(x),\quad x,y\neq 0.$$

进而有

$$\frac{f(x)}{x-1}=\frac{f(y)}{y-1},\quad x,y\neq 0,1.$$

这说明 $\frac{f(x)}{x-1}$ 是常数, 且注意 $f(1)=0$, 于是可设 $f(x)=a(x-1),x\neq 0$.

最后, 在 (1) 中令 $x=0$ 得到 $f(y)\geq(1-y)f(0),y\in\mathbf{R}$, 因此对所有 $y\neq 0$ 有 $a(y-1)\geq(1-y)f(0)$, 即 $(y-1)\left(a+f(0)\right)\geq 0,y\neq 0$, 这样必须 $a=-f(0)$. 故所求的函数

$$f(x)=f(0)(1-x),\quad x\in\mathbf{R}.$$

易验证, $f(x)=f(0)(1-x)$ 满足条件 (1). □

题 7. 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 满足

$$f\left(f^2(x)+f(y)\right)=xf(x)+y. \tag{1}$$

求 $f(x)$ 的解析式.

(2012, 吉尔吉斯坦)

这是一个典型的函数方程问题. 其解法的要点是: 先取函数的零点值确定初始值 (定位), 再利用函数是单满射的性质作了一个“回代变换”.

解 在条件 (1) 中令 $x=y=0$, 并记 $f(0)=s$, 则 $f(s^2+s)=0$. 这说明 s^2+s 是 $f(x)$ 的零点.

在 (1) 中令 $x=s^2+s$, 则得

$$f\big(f(y)\big)=y,\quad y\in\mathbf{R}. \tag{2}$$

现证明解 $f(x)$ 必须满足的一些性质:

(a) f 是满射; 这由 (2) 立得.

(b) f 是单射;

事实上, 若存在 $y_1\neq y_2$ 使得 $f(y_1)=f(y_2)$, 则由 (2) 知

$$0=f\big(f(y_1)\big)-f\big(f(y_2)\big)=y_1-y_2\neq 0,$$

矛盾!

(c) $f(0)=0$;

事实上, 在 (2) 中令 $y=0$ 得

$$f(s)=f\big(f(0)\big)=0=f(s^2+s),$$

再由 (b) 知 $s^2+s=s$, 故 $s=0$, 亦即 $f(0)=0$.

(d) 对任意实数 x 有 $f^2(x)=x^2$;

在条件 (1) 中令 $y=0$ 得

$$f\big(f^2(x)\big)=xf(x), \quad \forall x\in \mathbf{R}. \tag{3}$$

由 (a) 知对任意 $x\in\mathbf{R}$, 存在 $z\in\mathbf{R}$ 使得 $f(z)=x$.

这时由 (3), (2) 可得

$$f(x^2)=f\big(f^2(z)\big)=zf(z)=f\big(f(z)\big)f(z)=xf(x)=f\big(f^2(x)\big),$$

再由 (b) 知 $f^2(x)=x^2$, (d) 得证.

现在我们可断言 $f(x)=x$ 或 $f(-x)=-x$ 是问题的解. 事实上, 由 (d) 知 $f^2(x)=x^2$. 若存在 $x\in\mathbf{R}$ 使 $f(x)=-x$, 且同时存在 $y\in\mathbf{R}$ 使 $f(y)=y$, 此时将 $f(x)=-x$, $f(y)=y$ 代入 (1) 得

$$f(x^2+y)=y-x^2. \tag{4}$$

但由 (d) 知 $f(x^2+y)=x^2+y$ 或 $f(x^2+y)=-(x^2+y)$, 均与 (4) 矛盾! 这就证明了断言成立. □

题 8. 设正整数 $n>3$, $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 n 个正数, 满足 $x_1x_2\cdots x_n=1$. 证明:

$$\frac{1}{1+x_1+x_1x_2}+\frac{1}{1+x_2+x_2x_3}+\cdots+\frac{1}{1+x_n+x_nx_1}>1.$$

(2004, 俄罗斯)

在书 [3] 和 [4] 中介绍了该问题的如下十分巧妙的解法.

证法一 用如下方法减少各个加项:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1+x_1+x_1x_2}+\frac{1}{1+x_2+x_2x_3}+\cdots+\frac{1}{1+x_n+x_nx_1}\\ >&\frac{1}{1+x_1+x_1x_2+x_1x_2x_3+\cdots+x_1x_2\cdots x_{n-1}}\\ &+\frac{1}{1+x_2+x_2x_3+x_2x_3x_4+\cdots+x_2x_3\cdots x_n}+\cdots\\ &+\frac{1}{1+x_n+x_nx_1+x_nx_1x_2+\cdots+x_nx_1x_2\cdots x_{n-2}}.\end{aligned}$$

将第一个分式的分子分母同时乘以 x_n; 将第二个分式的分子分母同时乘以 x_nx_1; $\cdots$; 将第 n 个分式的分子分母同时乘以 $x_nx_1x_2\cdots x_{n-1}$, 并考虑到 $x_1x_2\cdots x_n=1$. 我们得到

$$\frac{1}{1+x_1+x_1x_2}+\frac{1}{1+x_2+x_2x_3}+\cdots+\frac{1}{1+x_n+x_nx_1}$$

$$
\begin{aligned}
&>\frac{x_n}{x_n+x_nx_1+x_nx_1x_2+x_nx_1x_2x_3+\cdots+x_nx_1x_2\cdots x_{n-1}}\\
&\quad+\frac{x_nx_1}{x_nx_1+x_nx_1x_2+x_nx_1x_2x_3+x_nx_1x_2x_3x_4+\cdots+x_nx_1x_2x_3\cdots x_{n-1}+x_n}\\
&\quad+\cdots+\frac{x_nx_1x_2x_3\cdots x_{n-1}}{x_nx_1x_2x_3\cdots x_{n-1}+x_n+x_nx_1+x_nx_1x_2+\cdots+x_nx_1x_2\cdots x_{n-2}}.\\
&=1.
\end{aligned}
$$

□

下面的解法是一个经典的代换 (代换的合理性请同学们思考): 令

$$x_i=\frac{a_{i+1}}{a_i}, i=1,2,\cdots,n.$$

其中 $a_{n+1}=a_1$. 通过这个代换, “消化”了条件 $x_1x_2\cdots x_n=1$, 而将不等式齐次化了.

证法二 作代换

$$x_1=\frac{a_2}{a_1}, x_2=\frac{a_3}{a_1},\cdots,x_n=\frac{a_1}{a_n},$$

则所证不等式等价于

$$\frac{a_1}{a_1+a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_2+a_3+a_4}+\cdots+\frac{a_n}{a_n+a_1+a_2}>1. \qquad (*)$$

下证 $(*)$.

因 $n>3$, 所以对任何 $1\le i\le n$ 有

$$a_i+a_{i+1}+a_{i+2}<a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

其中 $a_{n+1}=a_1, a_{n+2}=a_2$. 故

$$(*)\text{ 式左边}>\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_1+a_2+\cdots+a_n}=1.$$

□

题 9. 设$x_1,x_2,\cdots,x_n$, $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 是实数满足

$$\sum_{k=1}^{n}x_k^2=\sum_{k=1}^{n}y_k^2=1,$$

证明:

$$\left(x_1y_2-x_2y_1\right)^2\le 2\left(1-\sum_{k=1}^{n}x_ky_k\right).$$

(2001, 韩国)

证明 应用拉格朗日恒等式, 我们有

$$\left(x_1y_2-x_2y_1\right)^2\le\sum_{1\le i<j\le n}\left(x_iy_j-x_jy_i\right)^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\Big) - \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\Big)^2 \\
&= 1 - \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\Big)^2 \\
&= \Big(1 - \sum_{k=1}^{n} x_k y_k\Big)\Big(1 + \sum_{k=1}^{n} x_k y_k\Big). \qquad (1)
\end{aligned}
$$

而由 Cauchy不等式知

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \le \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1,$$

因此

$$0 \le 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \le 2. \qquad (2)$$

综合 (1), (2) 便得所证结果. □

评注. 上述解法的关键在于想到拉格朗日恒等式, 从而把局部一项放大到一个整体和.

题 10. 给定 $n \in \mathbf{N}^*$, 复数集

$$M = \left\{ z \in \mathbf{C} \Big| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|z-k|} \ge 1 \right\}$$

在复平面上对应的区域面积为 A. 证明:

$$A \ge \frac{\pi}{12}\big(11n^2 + 1\big).$$

(Jeremy Bern, Crux Math. 1994)

这是十分有趣的且有难度的一个问题. 因为 M 不是易于计算面积的图形. 因此我们希望找 M 的一个易计算面积的特殊子集, 因为不等式的右边有 π, 自然希望找的特殊子集是一个圆, 注意到 M 可写为

$$M = \left\{ z \in \mathbf{C} \middle| \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|z-k|}} \ge n \right\},$$

M 中的不等式说明 $|z-1|, |z-2|, \cdots, |z-n|$ 的调和平均值不超过 n, 故下面几个集合:

$$M_1 = \left\{ z \in \mathbf{C} \middle| \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} |z-k|} \le n \right\},$$

$$M_2 = \left\{ z \in \mathbf{C} \middle| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |z-k| \le n \right\},$$

$$M_3=\left\{z\in\mathbf{C}\left|\frac{\sqrt{\prod_{k=1}^{n}|z-k|^2}}{n}\leq n\right.\right\}.$$

均是 M 的子集. 但其中仅有 M_3 是圆, 这样问题就转化为计算圆 M_3 的面积, 是一个较简单的问题.

证明 设 $N=\left\{z\in\mathbf{C}|\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}|z-k|^2}{n}}\leq n\right\}$, 则对任意的 $z\in N$ 有

$$\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}|z-k|^2}{n}}\leq n.$$

因此

$$\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{|z-k|}}\leq\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}|z-k|^2}{n}}\leq n,$$

即

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{|z-k|}\geq 1.$$

这说明 $z\in M$. 因此 $N\subseteq M$.

又注意到

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}|z-k|^2}{n}}\leq n\Leftrightarrow&\sum_{k=1}^{n}(z-k)(\bar{z}-k)\leq n^3\\ \Leftrightarrow&\sum_{k=1}^{n}(z\bar{z}-kz-k\bar{z}+k^2)\leq n^3\\ \Leftrightarrow&z\bar{z}-\frac{n+1}{2}(z+\bar{z})+\frac{1}{6}(n+1)(2n+1)\leq n^3\\ \Leftrightarrow&(z-\frac{n+1}{2})(\bar{z}-\frac{n+1}{2})\leq\frac{11n^2+1}{12}\\ \Leftrightarrow&|z-\frac{n+1}{2}|^2\leq\sqrt{\frac{11n^2+1}{12}}.\end{aligned}$$

这说明 N 是复平面上以 $\frac{n+1}{2}$ 为圆心, 半径为 $\sqrt{\frac{11n^2+1}{12}}$ 的一个圆, 其面积为 $\frac{\pi}{12}(11n^2+1)$. 又 $N\subseteq M$, 故 M 的面积 $A\geq\frac{\pi(11n^2+1)}{12}$. □

题 11. 设 $a_1,a_1,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$ 为复数. 证明: 存在 $k\in\{1,2,\cdots,n\}$, 使得

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i-a_k|^2\leq\sum_{i=1}^{n}|b_i-a_k|^2,$$

或

$$\sum_{i=1}^{n}|b_i-b_k|^2\leq\sum_{i=1}^{n}|a_i-b_k|^2.$$

(王广廷, 2015 全国数学竞赛命题研讨会入选题)

证明 对任意 $j,k\in\{1,2,\cdots,n\}$, 记

$$f_{jk}=\left(|b_j-a_k|^2-|a_j-a_k|^2\right)+\left(|a_j-b_k|^2-|b_j-b_k|^2\right).$$

要证明结论成立, 仅需证存在整数 k $(1\le k\le n)$, 使得

$$\sum_{j=1}^{n}f_{jk}\ge 0. \tag{1}$$

下面证明:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f_{jk}\ge 0. \tag{2}$$

事实上,

$$\begin{aligned}f_{jk}=&(b_j-a_k)(\overline{b_j}-\overline{a_k})-(a_j-a_k)(\overline{a_j}-\overline{a_k})+\\&(a_j-b_k)(\overline{a_j}-\overline{b_k})-(b_j-b_k)(\overline{b_j}-\overline{b_k})\\=&-b_j\overline{a_k}-a_k\overline{b_j}+a_j\overline{a_k}+a_k\overline{a_j}-\\&a_j\overline{b_k}-b_k\overline{a_j}+b_j\overline{b_k}+b_k\overline{b_j}\\=&(a_j-b_j)(\overline{a_k}-\overline{b_k})+(\overline{a_j}-\overline{b_j})(a_k-b_k).\end{aligned}$$

记 $a_j-b_j=c_j$ $(j=1,2,\cdots,n)$. 则

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f_{jk}&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(c_j\overline{c_k}+\overline{c_j}c_k)\\&=\left(\sum_{k=1}^{n}\overline{c_k}\right)\left(\sum_{kj=1}^{n}c_j\right)+\left(\sum_{k=1}^{n}c_k\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\overline{c_j}\right)\\&=2|c_1+c_2+\cdots+c_n|^2\ge 0.\end{aligned}$$

式 (2) 成立.

由式 (2), 知必存在整数 k $(1\le k\le n)$, 使得式 (1) 成立, 证毕. □

参考文献

[1] T. Andreescu, V. Cirtoaje, G. Dospinescu and M. Lascu, Old and New inequalities, GIL Publishing House, 2004.

[2] 王伟叶, 熊斌, 函数迭代与函数方程, 上海科技教育出版社, 2010.

[3] 2004 年 IMO中国国家集训队教练组, 走向 IMO, 数学奥林匹克试题集锦 (2004), 华东师范大学出版社出版, 2004.

[4] H. X. 阿伽汉诺夫主编, 苏淳译, 全俄中学生数学奥林匹克.