

走近数学 (1)

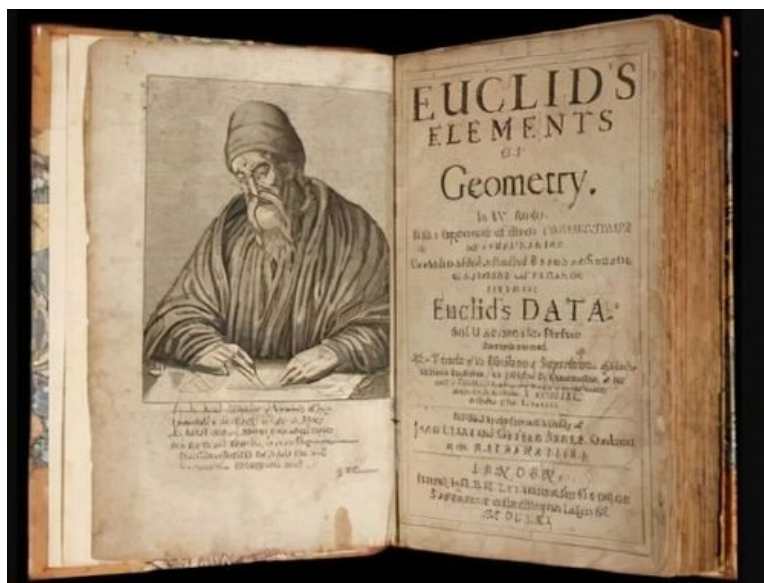
数学是什么

冯跃峰

数学是什么？难道就是一些抽象的符号和复杂的公式、定理？这种理解虽不能说是完全错误的，但至少可以说是不全面的。

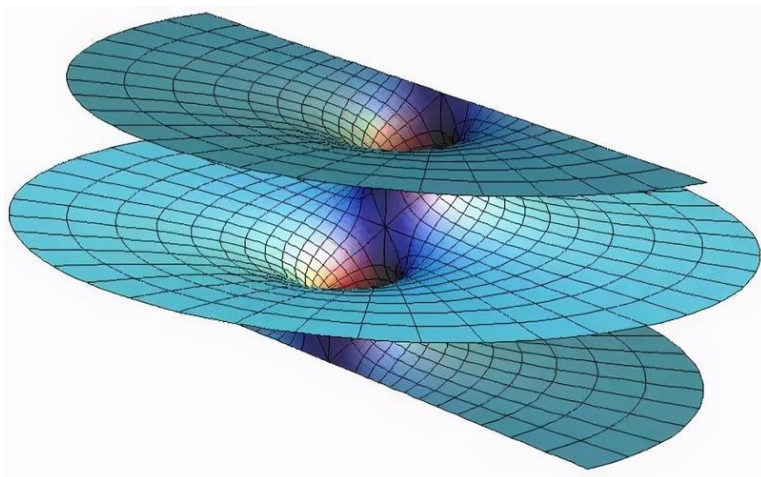
数学是一种高度抽象的理论模型，它的抽象首先来自于对客观事物、现象、规律的模拟，但又不被客观事物所限定，可以按自身的规律发展。

最初的数学不过是算术与几何，几何来源与土地的测量，算术来源与劳动果实的统计与分配。因此可以说，对客观事物的模拟或抽象是数学的一大特点，但这并非数学的全部。



公理化体系使几何成为一门真正的科学，而公理化的变异，则导致了非欧几何的诞生。非欧几何是数学自身发展的产物，而不是来源于对客观事物的抽象，它恰恰把数学最初的产生过程颠倒过来——不是由客观事物抽象为理论进而完善理论，而是从抽象的理论出发，通过自身的完善，反过来刻画自然。

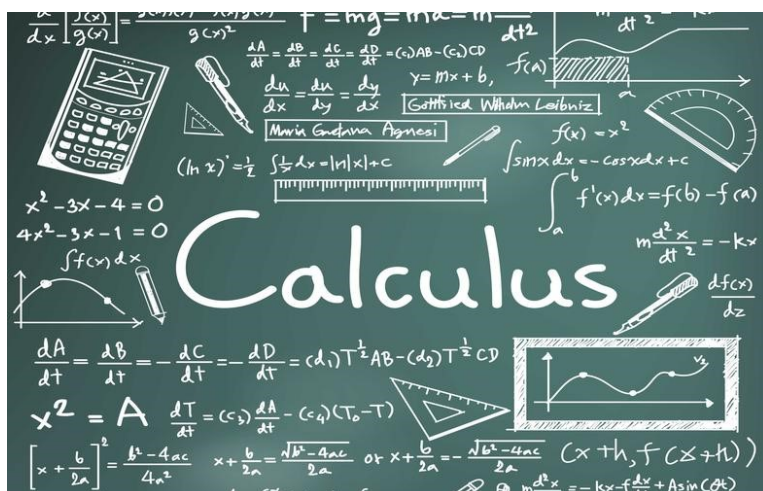
修订日期: 2022-07-11.



几何的发展是如此, 算术的发展也是如此. 近世代数中的群、环、域并不是对自然现象的模拟, 而是数学研究中的进一步抽象. 实际上现代数学中的大量内容都不再是对客观事物的简单模拟和抽象, 它是在一定的理论假设 (公理体系) 下, 不断丰富发展起来的构架, 所有数学结果都可以看作是这座构架中的果实或枝叶.

所以, 通过自身理论的完善产生新的理论反过来又刻画自然是数学的另一特点.

微积分的创立, 更能说明数学的上述两个特点. 从研究变速运动的瞬时速度、曲线的切线的斜率等问题入手, 引入了“导数”概念 (对客观事物模拟); 从“导数”的逆运算引入了“不定积分” (自身理论的完善); 从曲边梯形的面积计算引入了“定积分” (对客观事物的模拟); 而通过数学发现, 建立了牛顿—莱布尼兹公式, 把从两个截然不同的问题入手得到的数学抽象紧密地联系在一起 (自身理论的完善), 反映出数学的美妙和奇特.



今天的微积分远远不只反映切线斜率、变速运动中的瞬时速度、曲边梯形

面积了, 这就是数学发展的魅力所在.

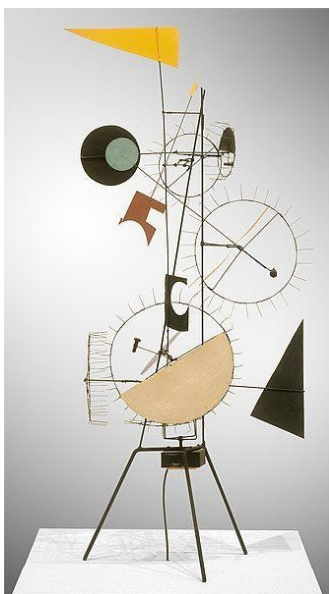
我们知道, 数学曾一度被定义为“研究数量关系和空间形式的科学”. 但数学发展到今天, “数量关系”和“空间形式”已不能反映数学的全貌. 我们也无须给出“数学”的精确定义, 因为它并不影响我们研究数学及进行数学教育, 更何况今天给出的定义很难预料在明天还能概括出不断发展后的数学的内涵.

但从数学的发展可以看出, 数学的丰富内容远远不止是一些概念、公式、定理, 这些只是数学的外在表现形式. 其本质的内容至少应包含这样两个方面:一是对客观事物的模拟或抽象, 二是自身理论的完善与扩展.

根据这样的理解, 我们把数学划分为“数学建构”和“数学发现”两个方面.

所谓“数学建构”, 就是扩充原有的数学理论体系或创造新的数学理论体系. 比如:引入符号、命名、下定义、设定公理等.

所谓“数学发现”就是在已有的理论体系中发现新的数学结论. 比如:发现定理、公式、法则、原理以及解决有关数学问题的方法等.



数学建构和数学发现实际上都属于数学创造的范畴, 由数学创造产生了数学知识. 但数学创造和数学知识也并不能概括数学的全貌. 比如说, 人们创造这些知识干什么? 回答这一问题靠的并不是别的什么学科, 而是靠数学本身.

因此, 数学的另一个重要的方面就是数学应用.

数学应用包括应用数学知识解决纯数学问题和应用数学知识解决生产、生活、教育、科研中一些非数学的实际问题.

事实上, 数学自诞生之日起就与广泛的应用密不可分. 但数学并没有一开始就形成一门系统的学科.

因此, 数学还有一个往往被人忽视的方面就是数学总结. 它包括对数学已有的结构、知识、方法、应用等进行再改造, 使之更简单, 更实用, 更完美, 以及对数学已有的结构、知识、方法、应用等进行系统的整理, 使之形成完整的逻辑体系. 这一工作的历史典范就是欧几里德的《几何原本》的诞生.

以上我们讨论的数学创造, 数学应用, 数学总结都是数学的动态的内容, 我们可把这些内容概括为数学活动. 由此可见, 数学至少应包括静态内容—数学知识, 和动态内容—数学活动两个方面. 但这两个方面都是数学的显式形式. 我们认为, 数学还有一种隐式形式, 我们称之为数学素质.

什么是数学素质？数学素质是人的数学观念和数学机智的综合反映。

所谓数学观念,就是数学处理问题的思维方式,它是一种处理问题的宏观策略.在数学观念的作用下,人们习惯于从数学的角度思考问题,处理问题.它通常表现为如下两个方面:

一是从“问题数学化”的角度进行思考。比如, 遇到问题总数先考虑问题中各元素之间的数量关系, 位置关系, 因果关系, 空间形式, 结构特征; 或者透过问题的表象把握问题的本质, 并将其本质特征抽象为一些具体的符号或参数, 通过对符号的操作和认识来刻画事物的性态; 或者建立一个数学模型, 使问题中诸因素及其相互关系在模型中得以实现, 最后借助模型的变换解决问题等等。



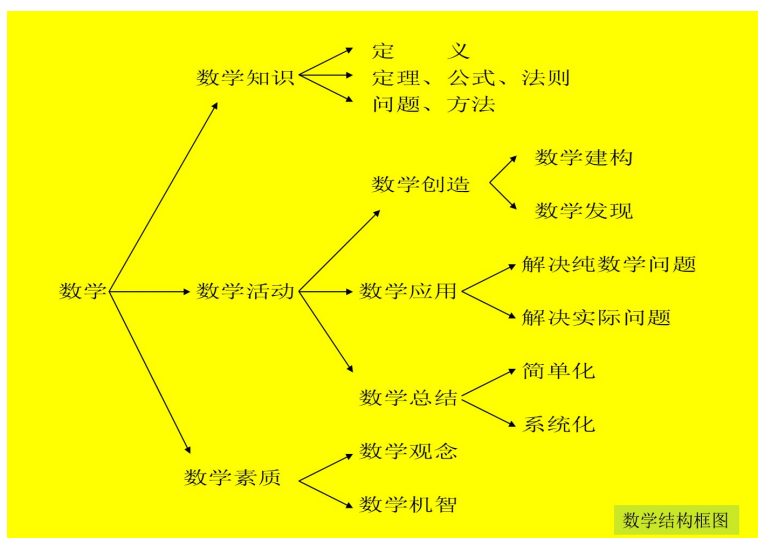
二是从“数学思想方法的应用”的角度进行思考,即将数学处理问题的思想方法迁移到当前的问题上.比如,在思考问题时,其潜意识总是想起数学是如何解决自身发展过程中存在的矛盾的;数学是如何在已有的系统中发现相关的结论和问题的,数学是如何解决面临的新问题的等等.这些思想方法的迁移,常可使人们发现解决问题的新途径.

所谓数学机智,是指人们在处理有关问题的具体手法上,不知不觉地表现出数学思维的特征,它常常表现为一些解决具体问题的微观方法或技巧,这种方

法或技巧的涌现是数学观念长期作用的结果. 数学观念总是要通过数学机智来体现, 而每次数学机智的产生, 则可能是多种数学观念综合作用的结果.

由上面的讨论, 我们对“数学是什么”这个问题的答案已有一个比较清晰的轮廓—数学可划分为数学知识, 数学活动和数学素质三个方面. 其中数学知识包括定义、定理公式法则、问题方法等内容; 数学活动又可分为数学创造、数学应用和数学总结三个方面. 其中数学创造包括数学建构和数学发现, 数学应用包括在数学中的应用和在实际问题中的应用, 数学总结包括将复杂的、零散的数学简单化和系统化; 数学素质可分为数学观念和数学机智.

我们可用框图表示如下:



其中知识是静态的, 素质是隐式的, 只有数学活动, 它既是显式的, 又是能动的, 因此数学活动尤其是数学思维活动是数学的核心.