例说数学阅读与思考

冷 岗 松

上海大学数学系

2016 年 5 月 • 福州

一. 数学课外阅读的重要性

1. 数学课外学习的两个主要方面
- 数学阅读
- 解题练习

关系：阅读是数学学习的核心;不可偏废;相辅相成.

2. 注意点
- 选择高质量的阅读材料;
- 切忌贪多，精读为主;
- 难度上循序渐进;
- 品种多样化(书;书的某些章节;论文;拼接材料等).

二. 数学阅读的三个层次

数学阅读应是深层阅读 (而不是表层阅读).

1. 数学阅读的三个层次
- 弄懂
- 索源
- 求新

1) 弄懂
- 明白所有的逻辑关系;
- 弄清层次结构;
- 条件用在何处;
- 简洁直观地重述;

2) 索源
- 方法的合理性分析;
- 关键点分析;
- 寻找问题的关联 (背景相似的问题;方法类似的问题).

3) 求新
- 新方法;
- 新视角;
- 新问题.

求新是追求有新意, 并不要求原创.

求新的初级形式是“新写”.

学生的任何求新尝试都应受到特别的激励.

例 1.

设 X 是一个非空集合, $P(X)$ 是 X 的所有子集的集合, 且 $f: P(X) \to P(X)$. 若对 $P(X)$ 中满足 $A \subseteq B$ 的任意 A, B, 必有 $f(A) \subseteq f(B)$. 证明：存在 $T \in P(X)$ 使得 $f(T) = T$.

1. 先将书中证明抄录如下：

证明: 作集合 S, T:

$$S = \{A \mid A \in P(X) \text{ 且 } A \subseteq f(A)\},$$

$$T = \bigcup_{A \in S} A.$$

下证：$f(T) = T$.

事实上, 对任意 $A \in S$, 注意到 $A \subseteq T$, 则有

$$A \subseteq f(A) \subseteq f(T),$$

故由 A 的任意性知 $T \subseteq f(T)$.

另一方面, 由 $T \subseteq f(T)$ 可得

$$f(T) \subseteq f\left(f(T)\right),$$

这说明 $f(T) \in S$, 因此 $f(T) \subseteq T$.

综上便知 $f(T) = T$. $\square$

2. 阅读的分层展开

1) 看懂每一步的推理依据, 特别要弄清 $\bigcup\limits_{A\in S} A$ 的意义:

对任何集族 $\{A_\alpha\}$, $\alpha \in \mathrm{I}$,

$$\bigcup_{\alpha\in \mathrm{I}} A_\alpha = \{x \mid \text{ 存在 } \alpha \in \mathrm{I} \text{ 使得 } x \in A_\alpha\}.$$

常见错误: 对无穷集列 $A_1, A_2, \cdots$, 有

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \lim_{n\to\infty} \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

2) 简洁直观表述: 单调集映射存在不动点.

3) 解法的合理性分析:

解法的关键在于集合 S, T 的构造.

构造 S 的合理性:

要找的不动点 $T = f(T)$ 首先满足 $T \subseteq f(T)$, 因此要从集族 $\{A \mid A \in P(X), A \subseteq f(A)\}$ 中去找.

构造 T 的合理性:

由于 S 中每个元通过 f 的作用变 “大” 了, 故 S 中的 “最大元” (并集) 就不能再变大, 应当就是不动点 T 了.

4) 新法(非本质): 令

$$S = \{A \mid A \in P(X), f(A) \subseteq A\}, \quad T = \bigcap_{A \in S} A,$$

则 $f(T) = T$.

5) 相关问题:

题 (Lipschitz 不动点定理)

设函数 $f : [a, b] \to [a, b]$ 使得

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|, \forall x \neq y, x, y \in [a, b].$$

证明: 存在 $x_0 \in [a, b]$ 使得 $f(x_0) = x_0$.

6) 学生常犯的错误: 用数学归纳法来证此题 (默认 X 是有限集).

例 2. (Mihaly Bencze, Elem. Math. 2007)

设 $z \in \mathbb{C}$, n 是正整数 $(n \geq 2)$, 证明:

$$\left|1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}\right|^2 \leq \left(1+|z|^2+\frac{2}{n-1}Re(z)\right)^{n-1}.$$

1. 先将书中证明抄录如下:

证明:

$$\begin{aligned}1+z+z^2+\cdots+z^{n-1} &= \frac{z^n-1}{z-1} = \frac{\prod_{k=1}^{n}(z-e^{\frac{2\pi ik}{n}})}{z-1} \\ &= \prod_{k=1}^{n-1}(z-e^{\frac{2\pi ik}{n}}),\end{aligned}$$

注意到

$$\prod_{k=1}^{n} e^{\frac{2\pi ik}{n}} = 0 \Longleftrightarrow \prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{2\pi ik}{n}} = -1,$$

因此

$$
\left|1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}\right|^{\frac{2}{n-1}}=\prod_{k=1}^{n-1}\left|z-e^{\frac{2\pi ik}{n}}\right|^{\frac{2}{n-1}}
$$

$$
=\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-z\cdot e^{\frac{-2\pi ik}{n}}-\overline{z}\cdot e^{\frac{2\pi ik}{n}}+|z|^2\right)^{\frac{1}{n-1}}
$$

$$
\leq\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1-z\cdot e^{\frac{-2\pi ik}{n}}-\overline{z}\cdot e^{\frac{2\pi ik}{n}}+|z|^2}{n-1}=1+|z|^2+\frac{z+\overline{z}}{n-1}
$$

$$
=1+|z|^2+\frac{2}{n-1}Re(z).
$$

□

2. 阅读的分层展开

$$1)\ \text{弄清知识结构}\begin{cases} 1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}\ \text{的根的性质;} \\ \text{复数模的平方运算;} \\ \text{算术-几何均值不等式.} \end{cases}$$

2) 弄清证明的关键点:

对 n 个数 $|z-e^{\frac{2i\pi k}{n}}|^2,(k=1,2,\cdots n)$ 用均值不等式, 这是因为 $\sum\limits_{k=1}^{n}|z-z_k|^2$ 这种和式便于运算, 几何上是“圆结构”.

3) 方法上类似的问题

题 1. (Jeremy Bern, Crux Math. 1994)

给定 $n \in N^*$, 复数集

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|z-k|} \geq 1 \right\}$$

在复平面上对应的区域面积为 A. 证明: $A \geq \frac{\pi}{12}(11n^2+1)$.

评析: 这是十分有趣的且有难度的一个问题. 因为 M 不是易于计算面积的图形. 因此我们希望找 M 的一个易计算面积的特殊子集, 因为不等式的右边有 π, 自然希望找的特殊子集是一个圆, 注意到 M 可写为

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|z-k|}} \leq n \right\}.$$

M 中的不等式说明 $|z-1|, |z-2|, \cdots, |z-n|$ 的调和平均值不超过 n, 故下面几个集合:

$$M_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} |z-k|} \le n \right\},$$

$$M_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |z-k| \le n \right\},$$

$$M_3 = \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} |z-k|^2}{n}} \le n \right\}.$$

均是 M 的子集. 但其中仅有 M_3 是圆, 这样问题就转化为计算圆 M_3 的面积, 是一个较简单的问题.

4) 新题

注意到例 2 的几个特点:

a) 条件的本质是模为 1 的 n 个根的质心在原点;

b) 局部特点 (删去一个根 1 后的结果);

c) 方法上是对模的平方用均值不等式.

如果我们保持条件的本质, 把局部特点发展到整体, 隐藏模的平方的处理, 这样就产生了下面的新题:

题 2.

设 $z_1, z_2, \cdots z_n$ 是 n 次多项式 $P(z)$ 的 n 个模为 1 的根, 且满足 $z_1 + z_2 + \cdots + z_n = 0$. 证明:

$$\sum_{k=1}^{n} \left| \frac{P(z)}{z - z_k} \right|^{\frac{1}{n-1}} \leq n\sqrt{1 + |z|^2}.$$

四. 例说数学地思考

下面通过展示一个数学奥林匹克问题发展到研究型问题的实例, 说明怎样通过数学地思考提出和发现新问题.

问题 A (IMO, 2003)

设 n 为正整数, 实数 $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$, 则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j|\right)^2 \leq \frac{2(n^2-1)}{3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2.$$

随后, 上述不等式的逆形式出现在一些论文和论坛中(例如 AoPS, 数学新星网).

问题 B

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是实数, 则

$$\left(\sum_{1\le i<j\le n} |x_i - x_j|\right)^2 \ge (n-1) \sum_{1\le i<j\le n} (x_i - x_j)^2.$$

思考 1: 研究平移不变性产生的等价版本.

注意上述问题 B 是平移不变的 (即在变换 $x_i \to x_i + t$ 下不变), 问题 B 可写为如下形式:

问题 C

设实数 $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$, 且 $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = 0$, 则

$$\left(\sum_{k=1}^{n} kx_k\right)^2 \ge \frac{n(n-1)}{4} \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

思考 2: 复数形式成立吗?

我们猜想问题 B 的复数形式也成立:

问题 D

设 $z_1, z_2, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$, 则

$$\Big(\sum_{1\le k<j\le n} |z_k - z_j|\Big)^2 \ge (n-1) \sum_{1\le k<j\le n} |z_k - z_j|^2.$$

雅礼中学学生李师铨证明了我们的猜测, 他的文章《一个复数不等式的证明》最近发表于数学新星网学生专栏 2016.03 期.

思考 3 : 单位圆上的版本

把问题 D 中的复数限制在单位圆上, 得到稍弱的不等式. 但我们可以把它加强为下面的问题:

问题 E

设 n 个单位圆上的复数 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 且满足 $\sum\limits_{k=1}^{n} z_k = 0$, 则

$$\sum_{1\le k<j\le n} |z_k - z_j| \ge \frac{n^2}{2}.$$

证明:

$$\sum_{1\le k<j\le n} |z_k - z_j| = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |z_k - z_j|$$

$$\ge \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\Big|\sum_{j=1}^{n}(z_k - z_j)\Big| = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} n|z_k| = \frac{n^2}{2} \qquad \square$$

思考 4: 上式的下界是最优的吗?

问题 F

设 n 个单位圆上的复数 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 满足 $\sum\limits_{k=1}^{n} z_k = 0$, 记

$$S := \sum_{1 \le k < j \le n} |z_k - z_j|.$$

(1) 当 n 为偶数时, 则 S 的最小值是 $\frac{n^2}{2}$;

(2)* 当 n 为奇数时, 求 S 的最小值.

注意: (2)* 未完全解决, 付云皓猜测最小值点的分布情况, 并证明了一个稍弱的下界; 牟晓生完整解决了 $n = 5$ 的情形.

思考 5: 又来考虑反问题.

下面是问题 F 的反问题:

问题 G

已知单位圆上的 n 个复数 $z_1, z_2, \cdots, z_n$, 求

$$\sum_{1 \le k < j \le n} |z_k - z_j|$$

的最大值.

答案: 最大值为 $n \cot \frac{\pi}{2n}$.

当 n 个点构成正 n 边形的顶点时取到最大值.

评注: 问题 G 是下面著名的 Thomson 问题的二维情形.

Thomson 问题

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的单位球面上的 n 个点, 求

$$\sum_{1\leq k<j\leq n} |x_k - x_j|$$

的最大值.

当 $m = 3$, 该问题是菲尔茨奖获得者 Smale 于 1998 年提出的 "21 世纪数学问题" 中的第七大问题.

总结:

(1) 问题 E, F 实际上是 Thomson 问题的二维反问题.

m 维 Thomson 问题的反问题

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的单位球面上的 n 个点. 且 $\sum_{i=0}^{n} x_i = 0$ (质心在原点). 求 $\sum_{1\le k<j\le n} |x_k - x_j|$ 的最小值.

这似乎是一个有难度的新的研究问题!

(2) 问题 A 的背景:

现在我们弄清楚了 这道 IMO 试题的背景: 它是 1 维 (实数集) Thomson 问题.

参考文献

[1] 冯跃峰. 数学阅读的三个层次 [J]. 数学新星网 · 冯跃峰专栏, 2015/11/10.