一个 Helly 型组合问题

冷岗松　施柯杰

匈牙利的 Kömal 杂志 **A608** (2014) 是一道十分有趣的组合问题, 可叙述如下:

问题 1. 设平面上的凸多边形 P_1, P_2, P_3 满足对任意的 $A \in P_1, B \in P_2, C \in P_3$, $\triangle ABC$ 的面积不超过 1. 证明: P_1, P_2, P_3 中某两个的面积之和不超过 8.

供题人是匈牙利的 Tamas Fleiner 教授. Fleiner 教授是近年来 Kürschak competition 委员会的主席, 而 Kürschak competition 是匈牙利最重要也是历史最悠久的数学竞赛. Fleiner 教授来信告诉我们, 这个 Helly 型组合问题是 Kürschak competition 的预选题, 因考虑到它作为考试题可能太难, 因而他们提出了一个简化版本作为 2013 年 Kürschak competition 的试题, 这就是:

问题 2. 设平面上的凸多边形 P_1, P_2, P_3 满足对任意 $A \in P_1, B \in P_2, C \in P_3$, $\triangle ABC$ 的面积不超过 1. 证明:

(i) P_1, P_2, P_3 中至少有一个面积不超过 4;

(ii) 可以构造具有上述性质的三个凸多边形 P_1, P_2, P_3 使得其中两个的面积都大于 4.

问题 1 的难度真的像 Fleiner 教授所说一样吗? 这两年, 我们把这个问题给过多位高手征解, 但仅有深圳的女学生吴东晓 (2015 年中国国家集训队队员) 给出了一个解答. 对于中学生来说, 这可真是个难题!

问题 1 的解 (**根据吴东晓解答整理**):

不妨设 P_1, P_2, P_3 中 P_1 的直径 (即凸多边形内部两点的最大距离) 最大, 并设 P_1 的直径为 A_1A_2. 设 A_1A_2 所在直线为 x 轴. 对任意一点 M, 记 x_M, y_M 分别为 M 的横坐标和纵坐标, 则任取 P_2 中一点 B, P_3 中一点 C, 下证

$$|y_B - y_C| \leq \frac{4}{|A_1A_2|}. \qquad (*)$$

由对称性不妨设 $|y_B| \geq |y_C|$, 且 $y_B \geq 0$ (否则以 x 轴为对称轴翻转图形即

可), 那么 B,C 的位置关系有以下三种情况:

(i) C 在 $\angle A_1BA_2$ 内. 此时

$$\frac{1}{2}|A_1A_2|(y_B-y_C)=S_{A_1BA_2C}=S_{\triangle A_1BC}+S_{\triangle A_2BC}\le 2.$$

故

$$y_B-y_C\le\frac{4}{|A_1A_2|}.$$

(ii) C 在 $\angle A_1BA_2$ 外, 且在 x 轴下方. 不妨设 C 与 A_2 在直线 A_1B 的两侧, 此时

$$\frac{1}{2}|A_1A_2|(y_B-y_C)=S_{A_1A_2B}+S_{A_1A_2C}\le S_{\triangle A_1BC}\le 1.$$

故

$$y_B-y_C\le\frac{2}{|A_1A_2|}\le\frac{4}{|A_1A_2|}.$$

(iii) C 在 $\angle A_1BA_2$ 外, 且在 x 轴上方. 不妨设 C 与 A_2 在直线 A_1B 的两侧, 作平行四边形 $A_1B'BC$, 则 $y_{B'}=y_B-y_C\le y_B$, 从而

$$\frac{1}{2}|A_1A_2|(y_B-y_C)=S_{\triangle A_1A_2B'}\le S_{\triangle A_2BC}\le 1.$$

故

$$y_B-y_C\le\frac{2}{|A_1A_2|}\le\frac{4}{|A_1A_2|}.$$

综上便知 $(*)$ 式得证.

设 P_2 中纵坐标最大, 最小的点分别为 B_1,B_2, P_3 中纵坐标最大, 最小的点分别为 C_1,C_2, 则

$$y_{B_1}-y_{B_2}+y_{C_1}-y_{C_2}\le|y_{B_1}-y_{C_2}|+|y_{C_1}-y_{B_2}|\le\frac{8}{|A_1A_2|}.$$

再设 P_2 中横坐标最大, 最小的点分别为 B_1',B_2', P_3 中纵坐标最大, 最小的点分别为 C_1',C_2', 则由 $|A_1A_2|$ 的最大性知

$$x_{B_1'}-x_{B_2'}\le|A_1A_2|,\quad x_{C_1'}-x_{C_2'}\le|A_1A_2|.$$

故

$$\begin{aligned}S_{P_2}+S_{P_3}&\le(x_{B_1'}-x_{B_2'})(y_{B_1}-y_{B_2})+(x_{C_1'}-x_{C_2'})(y_{C_1}-y_{C_2})\\&\le|A_1A_2|\cdot\frac{8}{|A_1A_2|}=8.\end{aligned}$$

即 P_2,P_3 的面积之和不超过 8. □

问题 2 的 (i) 显然是问题 1 的直接推论, (ii) 则说明了 (i) 中结论的某种最优性.

问题 2 (ii) 的解 (根据王逸轩解答整理):

构造 P_1,P_2,P_3 均是以 O 为中心的正八边形, 且 P_1,P_2 的外接圆半径均为 $\sqrt{2}-\varepsilon$ (P_2 可以是 P_1 的一个旋转像), P_3 的外接圆半径为 ε, 其中 ε 是一个充分小的正数.

现对任意 $A\in P_1, B\in P_2, C\in P_3$, 则

$$CA\le CO+OA\le\sqrt{2},\quad CB\le CO+OB\le\sqrt{2}.$$

因此 $S_{\triangle ABC}\le\frac{AC\cdot AB}{2}\le 1$, 且

$$S_{P_1}=S_{P_2}=(\sqrt{2}-\varepsilon)^2\cdot 8\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin 45^\circ=2\sqrt{2}(\sqrt{2}-\varepsilon)^2>4, (\text{当 } \varepsilon\to 0^+ \text{ 时}).$$

这说明我们构造的 P_1,P_2,P_3 满足条件且 P_1,P_2 的面积均大于 4. $\square$

组合几何中著名的 Helly 定理可叙述为: 设 Γ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个紧凸集族, 使得其中任意 $n+1$ 个元素的交非空, 则 Γ 中所有元素的交非空.

Helly 定理有很多推广和变形. 问题 1 这一类型问题出现在最近的 Helly 定理的相关研究中 ([1,2]). 下面再介绍这方面的一个有趣的结果 (这里不介绍证明).

问题 3 [2]. 设 $P_1,P_2,\cdots,P_k$ $(k\ge 2)$ 是平面上的凸多边形 (有界闭集) 使得不同集合中的任意两个点的距离不超过 1, 则存在 $1\le i\le k$ 使得 $\bigcup\limits_{j\ne i}P_j$ 能被直径为 1 的三个圆的并集覆盖.

参考文献

[1] A.V. Akopyan, Combinatorial generalizations of Jung's Theorem [J]. *Discrete Compt. Geom.* **49** (2013), 478-484.

[2] J. Jerómimo-Castro, A. Magazinov, P. Soberón, On a problem by Dol'nikov [J]. *Discrete Math.* **338** (2015), 1577-1585.