

数学新星问题征解

第十六期 (2016.08)

主持: 牟晓生

第一题. 锐角 $\triangle ABC$ 的三条高分别为 AD, BE, CF , 垂心为 H . DE 交 CF 于 M , DF 交 BE 于 N . 过 A 作 MN 的垂线交 OH 于 K . 证明: $OA = 2KD$.

(广西南宁市第二中学学生 陈宝麟 供题)

第二题. 设 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 m 维整系数向量的数列. 证明存在正整数 N , 使得每个 A_n 都能表示为 $A_n = \sum_{i=1}^N k_{n,i} \cdot A_i$ 的形式, 其中 $k_{n,i}$ 为整数.

(湖北武钢三中学生 王逸轩 供题)

第三题. 在 $n \times n$ 方格表的每个格中填入一个实数. 称 n 个不同行也不同的格子为一个“好组”. 已知每个好组中 n 个数之和非负, 且每个格子都在至少一个和为零的好组中. 证明: 每个好组的数之和都是零.

(人大附中学生 欧阳明晖 供题)

第四题. 设正整数 $n > 5$. 证明 $n!$ 不整除它的正约数之和.

(哈佛大学 牟晓生 供题)