

## 走近数学 (3)

### ——数学与智慧之一 (分类处理)

冯跃峰

本文介绍“分类处理”在生活实际中的应用。

分类是数学中最常用的方法之一，在其外在形式上，表现为“化整为零，各个击破”。但其本质，是人为地“增设条件”。因为每一个分类前提，将讨论的对象限定在一个具有某种性质的较小范围，从而使问题变得容易处理。

下面举几个生活实际中利用分类处理的方法的例子。

例 1、南朝齐的开国皇帝萧道成（427 年 ~ 482 年），人称南齐太祖，擅长书法，而且不乐意自己的书法水平低于臣下。



南朝 齐高帝 (427—482) 清人绘

一天，齐太祖提出，要与当时书法艺术盖世的大书法家王僧虔（426 年—485 年）比试。君臣二人各自认真书写完一幅楷书后，齐太祖颇为自信地问王僧虔：“你说说，谁第一，谁第二？”

这下可为难了王僧虔：说自己第一吧，恐齐太祖不高兴，甚至还会招来杀身之祸；说齐太祖第一吧，自己又不甘认输，放不下这个面子。

只见他灵机一动，采用了巧妙分组的策略，度过了难关：“臣的书法，人臣中第一；陛下的书法，帝王中第一。”



齐太祖闻之，虽不很高兴，但其所言属实，只好一笑了之。

我们知道，将众多的人放在一起排名次，难免有旗鼓相当的人难分上下，有失公允。如果将他们归入不同的组，则可在不同组中分居第一，便可皆大欢喜。

这一方法其实被普遍运用的，比如，体育比赛中各种形式的小组赛，都是自觉或不自觉地运用了这一思想方法。

我们再看下面一个“碎花瓶理论”问题——

例 2、丹麦物理学家雅各布·波尔不小心打碎了一个花瓶，但他没有一味地悲伤叹惋，而是俯身精心地收集起满地的碎片。他把这些碎片按大小分类称出重量，结果发现： $10 \sim 100$  克的最少， $1 \sim 10$  克的稍多， $0.1 \sim 1$  克和  $0.1$  克以下的最多。

同时，这些碎片的重量之间表现为统一的倍数关系，即最大块的重量是次大块的重量的 16 倍，次大块的重量是小块的重量的 16 倍，小块的重量是小碎片的重量的 16 倍，…



后来，人们利用他的“碎花瓶理论”来恢复破损的文物、陨石等不知其原貌的物体，给考古学和天体研究带来了意想不到的效率。

显然，雅各布·博尔虽然使用的是物理学的手法：称碎片的重量。但他采用的思维方式却是数学的：首先是对碎片按大小分类，这是数学处理问题的常用方法；其次是研究各碎片重量之间的数量关系，而不是研究它们的物理特性。最重要的是，研究的数量关系，并非是所有碎片之间的关系，而是不同组中碎片重量之间的关系，它相当于得到“相邻”两组重量之间的一个关系“递归式”。因而可以说，他几乎是从数学的角度观察这些碎片，进而发现了“碎花瓶理论”的。

最后介绍我们用数学方法，使一个“世纪难题”得到彻底解决的例子。

例 3、有一个众人皆知的两难选择问题，从上世纪到本世纪，似乎一直没有很好的解决方案，姑且称之为“世纪难题”。这个两难选择问题就是——

女友问：“如果我和你妈同时掉水里，你先救谁？”



这个问题着实不好回答。若说先救母亲，又恐女友说他对她的感情不深；若说先救女友，又恐女友说他不孝顺。似乎很难有两全的回答，其实不然。——我们利用数学方法，可以使该问题得到彻底解决。

当我们遇到的问题，找不到一个划一的解决方案时，数学解决这类问题的常用技巧是分类处理：即采用“如果…，则…；如果…，则…”的“各个击破”的处理方式。

为了找到恰当的分类，先看问题提供了什么条件。显然，条件是一个假想的情境：“假设我和我你妈同时掉水里”，既然情境是假想的，我们也不妨增设一个假想的条件，使问题容易解决。

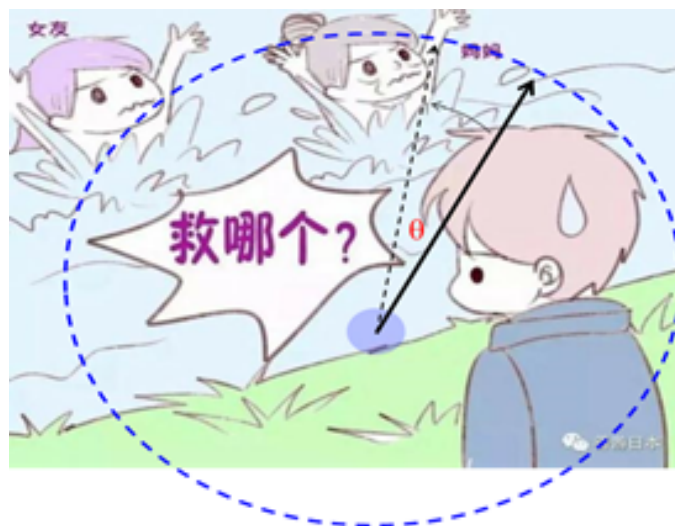
由于“假设”的前提，只描述了两个人同时掉水里，至于在水里什么位置并没有具体描述。这就可依据掉水里两人与自己的相对位置，来确定自己的施救方案。于是，一种合乎情理的回答方式由此产生。

男友：“如果母亲离我较近，则先救母亲；如果女友离我较近，则先救女友。”

但这一回答过于罗唆，可将它们合并为一个回答：“先救离我较近的人。”

当然，女友可能会不依不饶，继续追问：“如果两人离你一样近呢？”

此时，男友仍可继续增加“假设”，设置角度参数，机智地避开“相同”，寻找两者的差别，从而进行有效选择。应对方案如下——



男友：“这样的话，她俩在以我为圆心的同一个圆周上。我沿眼光的方向，按逆时针方向进行扫描，谁的转角小我就先救谁。”

因为两点在同一个圆周上时，相对于特定方向的转角是不同的，必定有一个转角小些，使得“施救”对象被确定的理由非常充分，女友再也无法为难你了。

以上处理方法，采用的是“增加假设前提”的策略。当一个两难选择问题不能简单地回答“是”或“不是”时，不妨对所提问题，增设不同的前提，在“相同”中寻找“不同”。然后依据不同的前提假设，采用不同的应对方式。

值得指出的是，在“相同”中寻找“不同”，其不同点应该是随机出现的，而不应该是事先固有的，否则你的决策方案就有“偏心”的嫌疑。比如，女友与母亲一个显然的不同是年龄。如果回答先救年龄大的，女友肯定不满意这个答案，尽管这个选择确实有一定的道理。

数学观念和数学机智为人们提供了思考问题的全新角度，也为人们提供了施展才华的广阔空间。对于运用数学解决问题的思维方式解决实际问题（并非是用数学知识解决实际问题），这方面讨论似不多见，这里举一些例子加以说明。尽管这些例子，都是众所周知的，但我们的出发点，是发掘其中数学思维方式的意義。