数学新星问题征解

第四十九期 (2023.04)

主持: 张端阳

第一题. 用 $\Omega(x)$ 表示正整数 x 的最大素因子, 对正整数 m,n, 记

$$f_{m,n}(x)=x^{\tau(\sigma(n)\varphi(n))+m}-1.$$

(1) 证明: 对任意正整数 n, 存在无穷多个正整数 m, 使得

$$\Omega(f_{m,n}(x))<\frac{1}{2}(f_{m,n}(x))^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{4}$$

对任意大于 2 的整数 x 成立;

(2) 证明: 对任意正整数 m, 存在无穷多个正整数 n, 使得

$$\Omega(f_{m,n}(x))<(f_{m,n}(x))^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}$$

对任意大于 2 的整数 x 成立.

(长沙一中学生 刘志源 供题)

第二题. 在 $\triangle ABC$ 中, I 是内心, 内切圆与 BC,CA,AB 分别切于点 D,E,F. $\odot(ABE),\odot(ACF)$ 的根轴与 BC 交于点 W、与 $\odot(ABC)$ 交于另一点 V. 设 Q 是 I 关于 W 的对称点, M 是弧 $\widehat{BAC}$ 的中点, 直线 MA,BC 交于点 J, 直线 AD,VJ 交于点 S. 证明: $\odot(MIS)$ 与 $\odot(IQJ)$ 相切.

(成都树德中学学生 李雨航 供题)

第三题. 设整数 $n\geq 2$, 实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n\geq 1$, 满足对任意 $1\leq i\leq n$, $|a_i-a_{i+1}|\geq 1$, 其中 $a_{n+1}=a_1$. 证明:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i-1}{a_{i+1}}\geq\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil.$$

(中国人民大学附属中学 张端阳 供题)

第四题. 设整数 $c > 5$. 定义平面上的"无限折线"为只有相邻线段相交 (于端点) 的射线 A_1X, A_kY 和线段 $A_1A_2, A_2A_3, \cdots, A_{k-1}A_k$ 组成的点集. 平面上有 n 条无限折线产生了 m 个交点 (其中任意三条无限折线不共点), 将平面分成了 $n+m+1$ 个区域. 已知对其中任意两个区域, 最多有 c 条无限折线, 两者的边界上均有某一段被其中一条折线包含. 定义一个区域的大小为其边界上不同折线的数量. 证明: 存在常数 C, 使得对任意正整数 m, n, 这些区域的大小的平方和不超过 $C(n^2+m)$.

(上海中学学生 江城 供题)