第四十七期问题征解解答与点评

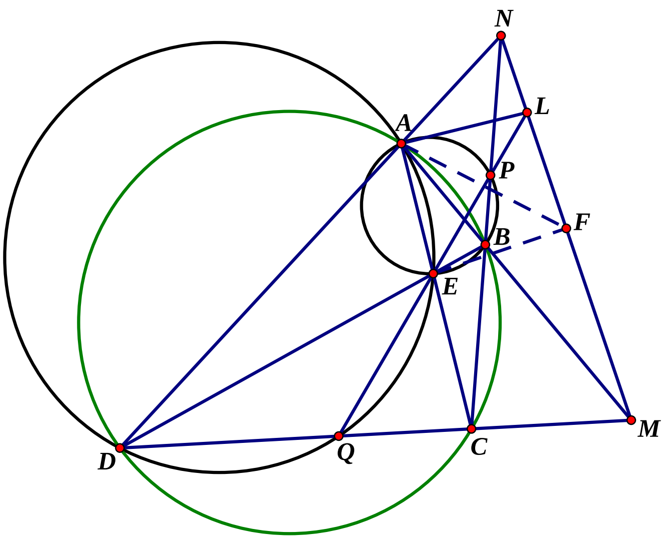
张端阳

第一题 在圆内接四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC, BD 交于点 E, 延长 AB, DC 交于点 M, 延长 AD, BC 交于点 N. 设 $\triangle ABE$ 的外接圆与直线 BC 交于点 P, $\triangle ADE$ 的外接圆与直线 CD 交于点 Q, 直线 PQ, MN 交于点 L.

证明: (1) $AL \perp AC$; (2) 直线 BQ, PD 的交点在直线 AL 上.

(成都树德中学学生 李雨航 供题)

证明 (根据嘉兴一中姚云皓同学的解答整理):



(1) 因为

$$\angle AEP = \angle ABP = \angle ADC = \angle CEQ,$$

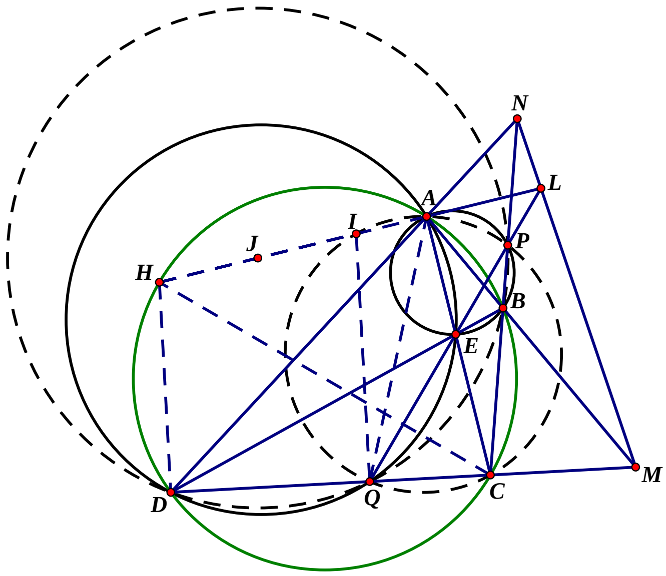
所以 L, P, E, Q 共线.

设 F 是完全四边形 $NADCMB$ 的密克点, 由 Brocard 定理, F 在 MN 上, 且 $EF \perp MN$.

结合 F, B, A, N 共圆, 知

$$\angle FLE = \angle PNL + \angle NPL = \angle FAB + \angle BAE = \angle FAE.$$

于是 F, E, A, L 共圆, 故 $\angle LAE = \angle EFM = 90°$.



(2) 因为

$$\angle EAQ = \angle EDQ = \angle EAB = \angle EPB,$$

所以 A, P, C, Q 和 B, P, D, Q 分别共圆.

设直线 AL 与 A, B, C, D 所共圆及 A, P, C, Q 所共圆分别交于点 H、I, J 是 HI 的中点.

由 (1) 知 $\angle IQM = \angle HDC = 90°$, 所以 J 在 DQ 的中垂线上. 同理, J 也在 BP 的中垂线上, 故 J 是 B, P, D, Q 所共圆的圆心.

对圆内接四边形 $BPDQ$, 对角线交于点 E, 一组对边交于点 C. 因为 $CE \perp AL$, 且 AL 经过圆心 J, 所以由 Brocard 定理知 DP, BQ, AL 交于一点.

综上, 命题得证. $\square$

评注 (1). 本题本质上与 2018 年美国数学奥林匹克第五题相同:

在圆内四边形 $ABCD$ 中, 直线 AC 与 BD 交于点 E, 直线 AB 与 CD 交于点 F, 直线 BC 与 DA 交于点 G, 已知 $\triangle ABE$ 的外接圆与 BC 交于 B, P, 且 C, B, P, G 按此顺序排列, $\triangle ADE$ 的外接圆与直线 CD 相交于 D, Q, 且 C, Q, D, F 按此顺序排列. 证明: 若直线 FP 与 GQ 相交于 M, 则$\angle MAC = 90°$.

(2). 除了解答中的方法, 常见的方法还有利用梅涅劳斯定理、调和、反演等.

(3). 江苏省扬州中学林圣, 福州三中李佳鸿, 哈尔滨师范大学附属中学汤盛宣, 海亮初级中学王圣迪, 江苏省昆山中学李子腾, 南昌二中万煜翔, 宁波市第十五中学庄子曰, 衢州二中周胤帆, 上海市实验学校潘柏桦, 深圳高级中学丁立轩, 深圳

中学邓博文, 巴蜀中学王瑜, 人大附中叶天宸、袁奕等同学也给出了本题的正确解答.

第二题 令 $n=2022, m=37$. 求最小的正实数 c, 使得存在非负实数 x_i, y_i $(i=1,2,\cdots,n)$, 满足:

(1) $x_i x_{i+1} \geq \sum\limits_{j=i}^{i+m-1} y_j$ 对任意 $i=1,2,\cdots,n$ 成立, 其中下标按模 n 理解;

(2) $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i=1, \sum\limits_{i=1}^{n} x_i=c$.

(上海中学学生 江城 供题)

解 (根据巴蜀中学王瑜同学整理):

取 $x_1=x_2=\cdots=x_{38}=1$ 且 $y_{38}=1$, 其余变量均为 0, 此时条件成立且 $c=38$. 下面证明总有 $c \geq 38$.

因为 $1=\sum\limits_{i=1}^{n} y_i \geq \sum\limits_{j=i}^{i+m-1} y_j$, 所以结合 (1) 知,

$$\min\{1, x_i x_{i+1}\} \geq \sum_{j=i}^{i+m-1} y_j.$$

求和得,

$$\sum_{i=1}^{n} \min\{1, x_i x_{i+1}\} \geq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{i+m-1} y_j=m.$$

因此只需证明, 对 $1 \leq k \leq 19$, 若

$$\sum_{i=1}^{n} \min\{1, x_i x_{i+1}\} \geq 2k-1,$$

则 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \geq 2k$.

对 k 归纳.

当 $k=1$ 时, 若存在 i 使 $x_i x_{i+1} \geq 1$, 则 $x_i+x_{i+1} \geq 2\sqrt{x_i x_{i+1}} \geq 2$, 命题成立. 若对任意 i 都有 $x_i x_{i+1}<1$, 则条件即为

$$\sum_{i=1}^{n} x_i x_{i+1} \geq 1.$$

因为 $n \geq 4$, 所以由熟知的结论,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \geq 4 \sum_{i=1}^{n} x_i x_{i+1} \geq 4,$$

开方即证.

假设命题对 $k-1$ 成立, 来看 k 时的情形.

构造图 $G(V, E)$, 其中 $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, $v_i v_{i+1} \in E$ 当且仅当 $x_i x_{i+1} \geq 1$.

若 $|E|\ge 2k$, 则存在 k 条端点互不相同的边. 对每条这样的边 v_iv_{i+1}, 对应的 $x_i+x_{i+1}\ge 2\sqrt{x_ix_{i+1}}\ge 2$, 因此相加知命题得证.

若 $|E|\le 2k-1$, 则这些边的端点至多有 $4k-2$ 个. 对于余下至少 $n-4k+2>2$ 个点, 若其中有两个下标 (模 n 意义下) 差不为 1 且对应的 x 均非零, 设为 v_r, v_s. 令 $x'_r=x_r+\varepsilon, x'_s=x_s-\varepsilon$, 其余 $x'_j=x_j$, 此时 $\sum\limits_{i=1}^{n}x'_i=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$. 因为 $\sum\limits_{i=1}^{n}\min\{1,x_ix_{i+1}\}$ 中无 x_rx_s 项, 所以关于 ε 在一个含 0 的闭区间上是一次函数, 于是当 ε 取为区间的一个端点时 $\sum\limits_{i=1}^{n}\min\{1,x_ix_{i+1}\}$ 更大 (条件仍成立). 此时要么 v_r, v_s 中至少有一个连边, 要么 x_r, x_s 中至少有一个为 0.

若某一时刻 $|E|\ge 2k$, 则由上面的讨论即证.

若否, 则这些不连边的 v_i 中至多有两个对应的 x_i 非零 (当恰有两个时这两个 v_i 下标差为 1). 此时必存在 j, 使得 v_j 与 v_{j-1}, v_{j+1} 中恰一个连边, 而另一个对应的 x 是 0. 这是因为有多于两个点不连边, 所以必有一个对应的 x 为 0. 取一段极长的连续的 0, 则两端之外的下一个数非零. 由前面的证明, 这两数对应顶点一定有一个连边, 记此顶点为 v_j 即可. 现在不妨设 $j=1$, 且 v_1v_2 连边, $x_n=0$.

这时

$$\min\{1,x_nx_1\}+\min\{1,x_1x_2\}+\min\{1,x_2x_3\}\le 2,$$

所以

$$\sum_{i=3}^{n-1}\min\{1,x_ix_{i+1}\}\ge(2k-1)-2=2(k-1)-1,$$

于是由归纳假设 (将 x_1, x_2 视为 0), $\sum\limits_{i=3}^{n}x_i\ge 2k-2$. 又 $x_1+x_2\ge 2\sqrt{x_1x_2}\ge 2$, 故 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\ge 2k$.

归纳证毕.

综上, 所求最小值为 38. □

评注 本题源于对 2020 年全国高中数学联赛加试 (A 卷)第二题的讨论:

给定整数 $n\ge 3$. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_{2n},b_1,b_2,\cdots,b_{2n}$ 是 $4n$ 个非负实数, 满足

$$a_1+a_2+\cdots+a_{2n}=b_1+b_2+\cdots+b_{2n}>0,$$

且对任意 $i=1,2,\cdots,2n$, 有 $a_ia_{i+2}\ge b_i+b_{i+1}$ (这里 $a_{2n+1}=a_1, a_{2n+2}=a_2, b_{2n+1}=b_1$). 求 $a_1+a_2+\cdots+a_{2n}$ 的最小值.

本题与原题做法区别很大, 本题做法只能解决 m 是奇数的情形, 原题 m 是偶数.

第三题 对正整数 m, 设集合 $A_m=\{2022m-2021,2022m-2020,\cdots,2022m\}$. 是否存在正整数 t 及集合 $B_1,B_2,\cdots,B_t$, 满足 $B_i\subseteq A_i,1\le i\le t$, 且对任意正整数 N, 存在 $1\le i\le t$, 使得 N 的正因子集与 A_i 的交集恰为 B_i?

(重庆南开中学学生 沈星余 供题)

解 (根据供题者的解答整理): 存在.

构造数列 $\{a_n\}$: $a_1=1$, 对 $n\ge 1$,

$$a_{n+1}=\frac{1}{2022}(2022a_n-2021)(2022a_n-2020)\cdots(2022a_n)+a_n.$$

则对 $k=1,2,\cdots,2022$, A_{a_n} 中的第 k 个元素 $2022a_n-2022+k$ 整除 $A_{a_{n+1}}$ 中的第 k 个元素

$$\begin{aligned}&2022a_{n+1}-2022+k\\=&(2022a_n-2021)(2022a_n-2020)\cdots(2022a_n)+2022a_n-2022+k.\end{aligned}$$

进一步, 对任意 $n<m$, A_{a_n} 中的第 k 个元素整除 A_{a_m} 中的第 k 个元素. $(*)$

取 $t=a_{2^{2022}}$, 对 $1\le n\le 2^{2022}$, 令 B_{a_n} 为 $2022a_n$ 与 C_{a_n} 中每个元素的差所构成的集合, 其中 $C_{a_1},C_{a_2},\cdots,C_{a_{2^{2022}}}$ 为 $\{0,1,\cdots,2021\}$ 的全体子集, 且元素个数单调不增. 对 $1\sim t$ 中的其余 i, 令 B_i 为 A_i 的任意子集. 下面证明此构造满足要求.

若不然, 存在 N 不合题. 令 N 的正因子集与 A_i 的交为 B_i', C_i' 为 $2022i$ 与 B_i' 中每个元素的差所构成的集合. 由 $(*)$, 对任意 $n<m$, 若 A_{a_n} 的第 k 个元素属于 B_{a_n}', 则 A_{a_m} 的第 k 个元素属于 B_{a_m}', 于是 $C_{a_n}'\supseteq C_{a_m}'$.

假设对任意 $1\le n\le 2^{2022}$, 都有 $B_{a_n}'\ne B_{a_n}$, 则 $C_{a_n}'\ne C_{a_n}$. 因为 C_{a_1} 是全集, 所以 $C_{a_1}'\subsetneq C_{a_1}$.

记 $i_1=1$, 对 $1\le s\le 2022$, 当 i_s 已构造且满足 $C_{a_{i_s}}'\subsetneq C_{a_{i_s}}$ 时, 取 i_{s+1} 满足 $C_{a_{i_{s+1}}}=C_{a_{i_s}}'$. 因为 $C_{a_1},C_{a_2},\cdots,C_{a_{2^{2022}}}$ 的元素个数单调不增, 且 $|C_{a_{i_{s+1}}}|<|C_{a_{i_s}}|$, 所以 $i_{s+1}>i_s$. 于是 $C_{a_{i_s}}'\supseteq C_{a_{i_{s+1}}}'$, 从而 $C_{a_{i_{s+1}}}'\subseteq C_{a_{i_{s+1}}}$, 又 $C_{a_{i_{s+1}}}'\ne C_{a_{i_{s+1}}}$, 故 $C_{a_{i_{s+1}}}'\subsetneq C_{a_{i_{s+1}}}$.

这样,

$$C_{a_{i_{2022}}}'\subsetneq C_{a_{i_{2022}}}=C_{a_{i_{2021}}}'\subsetneq C_{a_{i_{2021}}}=\cdots\subsetneq C_{a_{i_2}}=C_{a_{i_1}}'\subsetneq C_{a_{i_1}},$$

所以

$$|C_{a_{i_{2022}}}'|<|C_{a_{i_{2021}}}'|<\cdots<|C_{a_{i_1}}'|<2022.$$

从而 $|C_{a_{i_{2022}}}'|=0$, 故 $C_{a_{i_{2022}}}'=\emptyset=C_{a_{i_{2022}}}$, 与假设矛盾!

因此存在 $1\le n\le 2^{2022}$, 使得 $B_{a_n}'=B_{a_n}$, 这便说明上述构造满足要求.

综上, 结论得证. $\square$

第四题 给定奇素数 p. 求不定方程 $ab+cd=p$ 的满足 $\min\{a,b\} \geq \max\{c,d\}$ 的正整数解 (a,b,c,d) 的个数.

(北京大学学生 张志成 供题)

解 (根据上海中学江城同学的解答整理):

设集合

$$A=\{(a,b,c,d) \in \mathbb{N}_+^4 \mid p=ab+cd, a \geq c, b \geq d\}.$$

对每个 $v=(a,b,c,d) \in A$, 定义区间 $I_v=\left[\frac{c}{b},\frac{a}{d}\right)$. 注意到固定 b,c 或固定 a,d 后可唯一地确定 v, 且 $\gcd(b,c)=\gcd(a,d)=1$, 故所有 I_v 的左端点互不相同、右端点也互不相同.

引理 1 若不存在 $u \in A$ 使 I_v 的左端点等于 I_u 的右端点, 则 I_v 的左端点 $\frac{c}{b} \leq \frac{2}{p+1}$.

证明 取 $t \in \mathbb{N}$ 使 $0<a-tc \leq c$.

若 $t \geq 1$, 则 $u=(c,d+tb,a-tc,b) \in A$, 且 I_u 的右端点为 $\frac{c}{b}$, 矛盾!

于是 $t=0$, 从而 $a=c=1, b+d=p$. 再由 $b \geq d$ 知 $\frac{c}{b} \leq \frac{2}{p+1}$.

引理 1 得证.

引理 2 若不存在 $u \in A$ 使 I_v 的右端点等于 I_u 的左端点, 则 I_v 的右端点 $\frac{a}{d} \geq \frac{p+1}{2}$.

证明与引理 1 类似.

回到原题. 对 $r>0$, 记

$$A(r)=\{(a,b,c,d) \in A \mid a>rd, rb \geq c\},$$

则对 $v \in A$, $v \in A(r)$ 当且仅当 $r \in I_v$. 我们将这些 I_v 首尾相接 (如 $[x,y),[y,z)$ 可以合成 $[x,z)$), 由引理, 合成后的每个大区间都包含 $\left[\frac{2}{p+1},\frac{p+1}{2}\right)$. 这表明 $r \in \left[\frac{2}{p+1},\frac{p+1}{2}\right)$ 时, $|A(r)|$ 是定值.

易知

$$A\left(\frac{2}{p+1}\right)=\{(1,b,1,d) \mid b,d \in \mathbb{N}_+, b+d=p, b \geq d\},$$

所以 $\left|A\left(\frac{2}{p+1}\right)\right|=\frac{p-1}{2}$, 于是 $|A(1)|=\frac{p-1}{2}$. 又原方程比 $A(1)$ 恰多一个解 $(1,p-1,1,1)$, 故原方程的解数为 $\frac{p+1}{2}$. $\square$

评注 (1). 本题是供题者在研究下述结论时得到的:

对奇素数 p, 不定方程 $ab+cd=p$ 的满足 $a,b,c,d<\sqrt{p}$ 的正整数解 (a,b,c,d) 的个数为

$$4(\varphi(1)+\varphi(2)+\cdots+\varphi([\sqrt{p}]))-p-1.$$

该结论也可以用来证明第 32 期征解第四题:

设 $p\equiv 3 \pmod 8$ 是素数, 且 $p>3$. 证明存在正整数 $a,b,c<\sqrt{p}$, 使得$p=a^2+bc$.

(2). 用本题结论可以证明费马两平方和定理.

事实上, 当素数 $p\equiv 1 \pmod 4$ 时, $\frac{p+1}{2}$ 是奇数, 所以对合 $(a,b,c,d)\mapsto(b,a,d,c)$ 有不动点 (a,a,c,c), 故 $p=a^2+c^2$ 可以表示为两个平方数之和.

致谢 感谢人大附中关乃鄰同学仔细审阅了第二题和第三题的解答, 并补充了若干细节.