

走近数学 (4)

数学与智慧之三：充分条件

冯跃峰

本文介绍“充分条件”在生活实际中的应用.

寻找使问题结论成立的一个充分条件, 是数学处理问题的常见的思维策略. 这一策略在处理生活中的相关问题时, 常常能收到出奇制胜的效果. 比如, 三国时期, 诸葛亮“草船借箭”的计谋, 本质上就是创造了一个“让敌人主动射箭”的充分条件.

“充分条件”有三种常见方式: 条件替代、条件两难、条件嵌入.

(1) 我们先介绍“充分条件”的第一种方式, **条件替代**.

所谓“条件替代”, 就是直接用充分条件替换相关问题的讨论, 它往往比直接讨论原问题更具可行性, 或者其寓意更为巧妙和深刻.

我们看下面的例子.

例 1 宋徽宗赵佶喜爱书画, 创建并主管了世界上最早的皇家画院. 历史上他虽为昏君, 但倒也是一位杰出书画家. 他开设画学, 亲自授课, 建立考试制度, 亲自出题批卷, 培养绘画人才, 开创了一代画风. 当时画院的考试标准是: 笔意俱全.



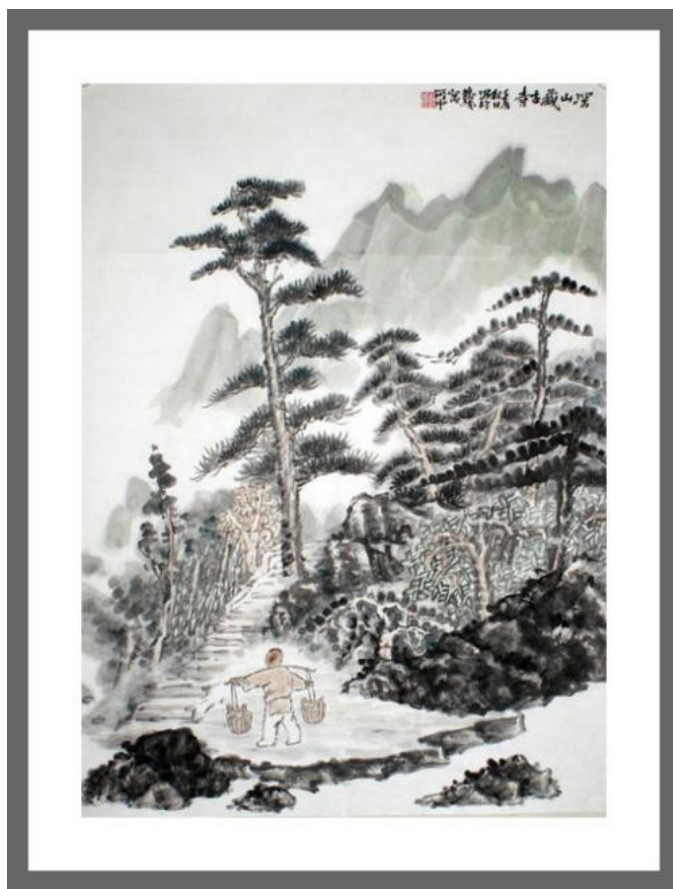
在一次考试中, 他出的一个题目是“深山藏古寺”.

众多的应试者, 有的在山腰间画座古庙, 有的把古庙画在丛林深处, 有的只画山而无寺, 有的则只画了寺庙的一角. 他看了很多幅画, 都不很满意.

修订日期: 2023-04-06.

就在他感到失望的时候, 有一幅画深深地吸引了他, 这幅画别出心裁, 画了一个小和尚, 挑着一担水沿着弯弯的山道拾级而上.

这幅画作得到宋徽宗的连连称赞: “好, 好, 这才是‘魁选’之作呀!”



【赏析】世人对这幅画作也是极力推崇与赞赏的, 认为它构思奇特, 画中没有庙, 只有一个挑水的和尚, 就把“深山藏古寺”这个题目表现得淋漓尽致. 画家过人之处, 未见得是绘画技术, 而是他精巧的构思, 能启发别人的联想.

然而, 从数学的角度看, 他的这一构思其实也很简单: 所采用的技巧, 不过是将所画内容, 用“藏古寺”的一个充分条件来替代而已.

因为由“挑水上山的和尚”, 必然推出山中有寺庙, 和尚不会挑着水走亲戚、做好事或化缘. 正因为寺庙是由画中的景象“推理”出来的, 从而巧妙地实现了“藏”的效果.

【创新】请你仿照上面的方法, 采用“充分条件”的策略, 设计一个新的答题方案.

我们也仿照上面的方法, 草拟了一个新的方案如下, 请大家指正.

可以这样作画: 画上若干个信男信女, 带着各式各样的香烛贡品, 一步一拜地向深山前行.

下面看一个多次使用“条件替代”的例子.

例 2 一次, 天才幽默大师卓别林被歹徒用枪指着头打劫. 卓别林知道自己处于劣势, 所以不做无谓抵抗, 乖乖奉上钱包.



但是, 他对劫匪说: “这些钱不是我的, 是我老板的, 现在这些钱被你拿走了, 老板一定认为我私吞公款. 兄弟, 我想和你商量一下, 拜托你在我帽子上开两枪, 证明我被打劫了.”

歹徒心想, 有了这笔钱, 这个小小要求当然可以满足, 于是便对着帽子开了两枪.

卓别林再次恳求: “兄弟, 可否在我衣服和裤子上再各补一枪, 让我老板更深信不疑.”

头脑简单、被钱冲昏了头的劫匪统统照做, 6 发子弹全部打光了. 这时, 卓别林一拳挥去, 打昏了劫匪, 取回钱包笑嘻嘻地离去了.

【赏析】不幸遇到劫匪, 首先要想到的是如何保命. 交了钱也许能保命, 但也不尽然, 因为谋财害命的事并不少见. 如何才能确保性命呢? 这就要去掉对自己性命的最大威胁——匪徒手中的枪.

显然, 直接夺枪是不可取的. 现在的问题是, 要不夺枪也能保命, 那就要创造第一个充分条件: 枪中没有子弹. 也就是说, 要让匪徒把枪中的子弹打光.

这样的情节电影中经常看到, 技术高超的人常能躲过枪手的多次射杀, 等其

没有子弹的时候将其制服. 现在的问题是, 卓别林并不具备这一技术本领, 只能再找第二个充分条件, 让匪徒自愿地打光枪中的子弹.

当然, 匪徒的枪是用来杀人的, 要不杀人而开抢, 这就要构造虚拟的枪杀“现场”, 这也是刑侦型电影中常见的情节. 现在, 只需将“人”更换为“衣帽”, 然后找一个充足的理由——第三个充分条件, 让匪徒能对着“衣帽”开抢. 至此, 自然想到编造一个虚拟的故事, 便产生了上面卓别林死里逃生的应对方法.

下面看一个古代县令创设充分条件判案的例子.

例 3 一天, 有两个人来衙门打官司, 他们拿来了一匹绢布, 都说这绢是自己的.

县令说: “好吧, 你们都说是自己的, 我看这样好了, 把绢剪了, 一分为二, 各人一半, 这样算公平吧?”

于是, 他命令手下把绢布剪了, 一人一半. 两人只好各自拿着半匹绢布回家了.

等他们走后, 县令对手下说: “你们分别去他们家, 看看他俩分别是什么表现. 难过的人是绢的主人, 高兴的那个就抓起来.”

衙役暗中观察, 果然看见一人很开心, 一人很难过. 他们就把那个高兴的人抓了起来. 经审问, 绢布当真不是他的.

【赏析】察言观色, 是判案的常用技术. 但如何才能使罪犯显露出与案情紧密相关的一些异样表情, 则颇有讲究. 其中, 找一个使某种表情出现的充分条件, 是一种非常有效的策略.

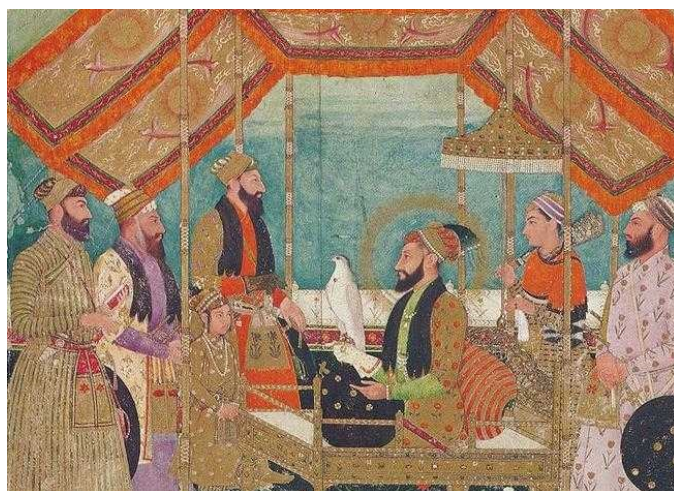
属于自己的东西被损坏, 而且还被别人瓜分一部分, 这个人当然很难过了; 反之, 那个得到了不属于自己东西的人, 肯定会很开心. 聪明的县令, 就是利用了常人的这一心理, 巧妙设置一个充分条件的小“陷阱”, 让那个贪婪的人自己往里钻.

(2) 下面介绍“充分条件”的第二种方式, **条件两难**.

所谓“条件两难”, 就是当前所创设的条件, 虽然可产生多种结果, 但其中一些结果明显导致对方处于不利境地, 迫使对方只能选择剩下的唯一结果. 这样, 所创条件便能收到与“充分条件”相同的效果. 我们看下面的例子.

例 4 从前, 古印度有一位皇帝很自负, 有一次他郑重其事向天下臣民昭告: 如果有臣民能讲一个故事他没听过的, 他就会将自己的女儿嫁给他. 此话一出, 引得全国男人蜂拥而至, 尤其是朝内贵族公子每天都准备好了精彩故事献给皇

帝, 每一次别人讲完故事皇帝都说听过了, 讲故事的人自然也就娶不到皇帝的女儿. 但因为可以见到皇帝, 人们还是乐此不疲, 皇帝也玩得很高兴.



有一天, 来了一位很聪明的农民, 他讲了一个故事, 皇帝不得不说“没听过”, 老老实实地把女儿嫁给了他. 你知道那位农民讲了一个怎样的故事吗?



他跟皇帝说: “我说一个真实的故事给陛下听, 不知您有没有兴趣?” 皇帝很好奇, 叫他赶紧说.

这位农民说: “陛下, 从前你爷爷和我爷爷是非常要好的朋友, 他们一起玩耍, 一起做生意, 那时我爷爷很有钱, 你爷爷因为做生意向我爷爷借了 100 块金币, 他向我爷爷许诺, 发达之后, 要您将金币还给我并将你女儿嫁给我. 陛下, 这个故事您有没有听过啊?”

皇帝听后, 一下哑口无言, 只好乖乖的将女儿嫁给他.

实际上, 皇帝如果说听过, 按照他爷爷的许诺, 不但要还金币而且要嫁女儿, 所以只能说没听过, 也就把女儿嫁给了他.

【赏析】我们先来分析一下这个问题. 我们的目标是: 讲一个故事, 使皇帝不得不说“没听过”.

这相当于故事中含有一个充分条件, 在这个条件下, 可推出皇帝的回答只能是“没听过”. 这看似是不可能的, 按通常的理解, 无论你讲怎样的故事, 皇帝都可以说“听过”.

但利用“条件两难”的策略就不同了, 也就是说, 皇帝若回答“听过”, 则会对皇帝更为不利. 这也就意味着, “听过”蕴含了比嫁女儿更吃亏的事, 比如“人财两空”.

这样, 只需在故事中虚构这样一个事件: 有人交代皇帝既要嫁女儿, 又要赔钱财.

当然, 故事中光有这一情节是不够的, 因为皇帝不一定听“故事中那个人”的话. 现在, 再找一个充分条件, 让皇帝必须听那个人的话, 这只需“那个人的话”是先皇留下的“遗嘱”即可. 再注意到皇帝父亲可能还健在, 于是可构造虚拟的遗嘱是皇帝爷爷留下的.

这样, 皇帝如果回答说“听过”, 那他就必须执行爷爷的遗嘱, 皇帝当然不会这么做. 至此, 那个农民讲的故事也就顺利产生了.

【创新】请你仿照上面的方法, 采用“充分条件”策略, 设计一个新的应对方案.

我们也仿照上面的方法, 草拟了一个新的方案如下, 请大家指正.

其实, 虚构的故事有很多可能, 只要虚构一个皇帝决不允许发生的遗嘱即可. 皇帝最不愿发生的事情当然是别人篡夺皇位, 据此, 我们草拟了另外一个“故事”如下:

我爷爷曾救过您爷爷的命, 为了感恩, 您爷爷承诺: 如果我有机会与您面对面交谈, 那么, 您应当将皇位让给我. 陛下, 这个故事您有没有听过啊?

下面介绍发生在电影院中的一个有趣故事.

例 5 电影院一些女士戴着帽子观看, 部分观众为此提意见, 电影院便在放映前打出告示: 请大家不要戴着帽子观看电影.

此举引起一些女士的强烈不满, 于是, 电影院在放映前, 将告示改成了如下内容:

此前的声明有欠考虑, 特此向相关人士致歉! 本院改正错误, 允许年老者带着帽子观看电影.

告示一出, 所有帽子都被摘下.

【赏析】 这个故事, 是“两难条件”运用的一个非常生动的例子.

试想, 不管影院打出怎样的告示, 观众也许完全可以不理, 帽子照戴不误, 你又能把他怎样? 但若“告示”是一个“两难”型的条件, 效果就绝然不同了. 他若继续戴帽观影, 则会是自己处于一种很尴尬的境地, 这样就不得不脱下帽子观看电影了.

【创新】 请你仿照上面的方法, 采用“条件两难”的策略, 设计一个新的应对方案.

我们也仿照上面的方法, 草拟了一个新的方案如下, 请大家指正.

影院可打出这样的告示: 大家知道, 尊重别人的自尊心和保护他人的隐私, 是本院一直秉承的原则. 试想, 如果不是有特殊需要或某种难言之处, 有谁愿意在室内戴着帽子受罪? 因此, 对这些特殊人士, 出于关怀之心, 应容许其在本院带着帽子观看影片.

(3) 下面介绍“充分条件”的第三种方式, **条件嵌入**.

所谓“条件嵌入”, 就是当前情景中, 不留痕迹地嵌入一个充分条件, 以达到即刻获取某种结论的目的. 我们看下面的例子.

例 6 舞台上正演出京剧《战长沙》, 扮演关羽的演员急于上场, 拿错了道具, 将青龙偃月刀错拿成了长矛. 刚一上场, 台下观众就吼了起来, 演员顿时急得满头大汗.

情急之中, 计上心来. 一声叫板, 胡琴起调, 他开口唱道: “战长沙, 打了一仗, 失落了, 关某的大刀. 因此上, 向三弟, 借来八尺长矛. 叫儿郎, 快与爷, 四下寻找……”

跑龙套的也挺机灵, 赶紧从后台抬上了关羽用的大刀, 递了过来. 他接过大刀, 接着唱道: “这才是, 关某的青龙偃月刀.”

随即, 他来了个英武的亮相, 台下顿时掌声暴起.

【赏析】 拿错了道具, 立即想到的就是更换道具. 但若直接找人更换, 则会使演出情节出现断裂的痕迹, 这是演出之大忌! 因此, 必须将“换道具”也纳入戏剧中的一个环节. 这就要创设一个充分条件, 使台下助演能帮其把“青龙偃月刀”扛上来.

显然,唯一的办法,就是采用“条件嵌入”的手法,即兴自编唱词,诉说自己
在战斗中将“青龙偃月刀”丢失,要台下助演帮助寻找.

这是典型的“条件嵌入”方法的应用,当然,这也看出,演员具有丰富的演出
经验,只有遇乱不慌,随机应变,方能转危为安.

例 7 一个犯人收到妻子的来信,说家里的地没人翻,没法种庄稼,自己身体
又不好.犯人回复说,千万别翻地,地里埋了枪.

半个月后妻子又来信,说警察把地翻了三四遍也没找着枪,你到底把枪藏在
哪里了?

犯人回复说,本来就没枪,现在可以种地了.

【赏析】家里的地没有翻,自己又不能翻,那就只能请别人翻.花钱雇用劳
力,那是再平常不过的.不花钱又能让别人主动翻,那才显示其本事.

如何才能使别人不请自来主动翻地呢?这就要找一个充分条件,让其具有
无可抗拒的吸引力.

导致翻地的条件有很多,通常的条件是,要种庄稼或其它作物,这个条件显
然不合适.还有一个条件就是,要寻找某种东西.正所谓“掘地三尺,也要把它找
出来”,说的就是这个意思.

什么样的东西才能吸引警察寻找呢?当然是一些非法物品,最有吸引力的
莫过于枪支、毒品、金条等.其中枪支应为首选,因为它可以自制;而毒品获
取的渠道有限,容易被警察核实排除;至于金条,如果说是“偷来的”则应该有报
案,所以其可信度不大.经过这样一些思考,便有犯人那封嵌入充分条件“请君
入瓮”的家信诞生!

例 8 一天,美国总统林肯感到有点身体不适,不想接见前来白宫唠唠叨叨
要求安排一官半职的人.但有个令人讨厌的家伙赖在林肯身旁,准备坐下来长
谈.

林肯非常厌烦,但出于礼貌不能直接把他赶走.这时,正好有总统的医生走
进房里.

林肯急忙向他伸出双手,问道:“医生,我手上的斑点到底是些什么东西?”

“那是假天花,就是轻度的天花.”医生会意地说.

“我全身都有,”林肯接着说,“我看它是会传染的,对吗?”

那位来客听了这番话,马上站了起来,大声喊道:“好吧,我现在不便多留了,
林肯先生.我没有什么事,只是来探望你的.”

“呀，不必这么急急忙忙嘛，先生。”林肯掩住笑容轻快地说。

“谢谢，先生，我下次再来看你。”说罢，他头也不回地朝门外走了。这时，林肯才敢笑出声来。

【赏析】林肯为了打发一位不速之客，想在当前的情境中嵌入一个充分条件，让其自动离开。什么条件才能使来客自动地走呢？无外乎两种情况：一是彼地有紧急事情发生，需来客前去处理；二是此地有预料之外的事情发生，且对来客非常不利。比如，存在某种危险性，使来客不得不回避。

前一种情形，因为距离较远，不好遥控，也不好凭空制造事端；而后一种情形，却可利用医生的参与配合，虚构了一个不利来客的事件：林肯患有轻度天花，便可使来客逃之夭夭，天衣无缝，可谓妙极。

最后介绍一个采用嵌入“充分条件”，破解“华为面试题”的例子。

例 9 网传，华为招聘中曾有如下一个面试题：

某日有 6 位贵宾到访，但办公室只剩下 5 支香烟。假定由你负责接待，你如何给贵宾分配香烟？

首先要说明的是，这并不是一个数学问题。否则，将 5 支香烟平均分给 6 位贵宾，每人应分得 $\frac{5}{6}$ 支香烟。照此方法，只好将每支香烟都切下六分之一，再将切下的部分新转成一支香烟。这在现实中显然是不可取的，因为这样做，每支香烟都不完整，这是很不礼貌的。

看似是一个难有正确解答的问题，借助寻找“充分条件”的策略，却可得到足够使测试者“满意的”解答。那么，解决这个问题，应从哪里入手呢？首先要明确解题的目标是什么，然后再考虑题中有哪些条件，进而联想相应的知识、方法解决问题。

对目前的问题，其解题目标是什么？——它实际上不过是一个开放性的情商测试题：不管以怎样的方式分配香烟，测试者所期待的问题的答案，就是要保证：百分百地不出现尴尬的场面——这才是问题的核心！

一种最容易想到的处理方式是，直接将 5 支香烟依次分给 6 位贵宾，这将发生如下两种情况：如果遇到有贵宾不抽烟，则分给下一位贵宾，这种情形下，5 支香烟就够分了；如果恰好每个贵宾都抽烟，则最后一位贵宾暂时不分配香烟，接待者对其说一句抱歉之类的话敷衍，或者让贵宾先等着，买来香烟后再分配。

显然，这虽是一种最自然的分配方式，但却是最为“笨拙”的方式。可能大多数人都会这么做，它显然没有达到“避免尴尬”的要求：让最后一位贵宾“干等着”，不就很尴尬的场面吗？

为了避免尴尬,一种稍好的处理方式是,在分配香烟时,先询问是否有哪位贵宾是不抽烟的.如果大家都抽烟,则先去买烟,然后再统一分配.

当然,这一处理方式仍然没有完全达到“避免尴尬”的要求,因为“询问是否有哪位贵宾不抽烟”,本身就是一件比较尴尬的事.

怎样处理才是最为妥当的呢?找充分条件就是一个有效的策略,只需在该条件下,既能避免询问贵宾“是否抽烟”,又能了解到各位贵宾的抽烟习惯.对此,一种较好的处理方法就是:将“直接询问”用一种自然而得体的、貌似“事先”准备好的“服务方式”来代替.

于是,一种可行的方式应运而生:先告知贵宾——为了避免不抽烟的贵宾被烟雾困扰,我们将接待室分为了无烟区和吸烟区两个区域.因此,请不抽烟的贵宾在左侧区域就坐,其余贵宾在右侧区域就坐(区分“抽烟与否”的一个充分条件).

这样,等各位贵宾就坐以后,其抽烟与否就一目了然了.

如果碰巧大家都抽烟,那就只好请各位贵宾稍作休息,接待者先去买烟,然后再来统一分配香烟(这是迫不得已的事,但切不可只留下一位贵宾等待吸烟).如有可能,还可当着贵宾的面打电话给自己比较“靠谱”的同事,告诉其有贵宾到访,让其把“专为贵宾准备好”的香烟“送”过来.

只要同事是真的很“靠谱”,就自然明白“送烟”是怎么回事——不过是“救场”而已,从而可有效地化解“缺烟”的尴尬.

这一问题的解决,再一次看出“充分条件”的威力.

【练习】下面留几个例子给大家练习,答案附后.

1、比利时的一家鞋店,很少有故可光顾.老板为了招徕顾客,他想到了一个绝招,果然换来顾客盈门.你知道老板的绝招是什么吗?

2、传说,晋代大书法家王羲之做右军将军时,琅琊郡一带连年大旱,颗粒无收,穷人把草根树皮都吃光了,贪官豪绅们却见死不救.

王羲之于是写了道奏章,骑上快马,不分昼夜地直奔京城.皇帝看到奏章后,即刻下令放粮.你知道王羲之奏章上写了什么吗?

3、唐太宗时,西藏王松赞干布听说内地有个文成公主,又漂亮,又能干,就派大臣禄东赞前去求婚.这时,印度、波斯等好多国家也派了使臣到内地求婚.

唐太宗李世民决定让求婚的使臣们比赛智慧,说:“哪个最聪明,就把公主许配到他们那里去,”太宗叫人牵100匹马驹、100匹母马,叫使臣们找出哪匹小马驹是哪匹母马生的.别的使臣都把毛色相同的分在一起,以为白色的马驹

是白色的母马主的,黑色的马驹是黑色的母马生的,黄色的马驹是黄色的母马生的,结果都错了.

禄东赞却想出了一个良策,你知道他是怎样区分的吗?

4、夫妇逛商场,女的看中一套高档餐具,坚持要买,丈夫嫌贵,不肯掏钱.导购一看,悄悄对丈夫说了句话,他一听马上掏钱.你想想,是什么让他立马转变态度的?

5、一家星级宾馆招聘客房服务人员,经理给应聘者出了一道题目:

“假如你无意中把房间推开,看见女客一丝不挂地在沐浴,而她也看见你了,这时候你该怎么办?”

第一位答:“说声‘对不起’,就关门退出.”

第二位答:“说声‘对不起,小姐’,就关门退出.”

第三位也说了一句话,结果他被录用了.你知道他说了什么吗?

6、《摩登大笑话》中记载了这样一则故事:

一所女子学校在上体操课时,学生都借故请假,体操教师很着急.

一天,体操教师忽然想出一个办法,贴出一张布告,女生看到这张布告后,再也没有请假不上体操课的了.你知道布告是怎样写的吗?

【答案】

1、老板聘请了一位有名的设计师,为他制造了一部“鞋型汽车”,放在店门口.经过此处的人都不由得驻足观看,对此“怪车”评头论足.这样,一传十,十传百,引来许多人前来观看,无形之中给鞋店做了义务广告.来到这里的自然也顺便看看车主经营的鞋店,从而该店销售量大增.

2、王羲之奏章的标题就是两个字:“放粮”,而且写得格外潇洒醒目.皇帝接过奏章,不管上面是什么内容,却全神贯注地欣赏起王羲之的书法来.特别是奏章的“放粮”二字,飘如浮云,矫若游龙.皇帝边看边称赞:“放粮——好,好,好!”

话音刚落,只听王羲之在下面高声应道:“谢主龙恩!臣今日就去琅琊放粮.”

等皇上明白过来,已是泼水难收了.只好将错就错,封王羲之为放粮的钦差.王羲之当天就打着“奉旨放粮”的大旗,急急赶回琅琊郡.

3、禄东赞是这样分的:他先把马驹和母马分开关起来,隔了一夜才把母马一匹匹地放到马驹中去.马驹一见自己的妈妈来了,急忙扑上去吸奶,不一会,就全分出来了.

4、导购员对女士的丈夫说：“这么贵的餐具，你太太是不会舍得让你洗碗的。”

5、第三位幽默地回答：“说声‘对不起，先生’，就关门退出。”结果第三位应聘者被录取了。

6、布告内容为：“凡最近出嫁或已经怀孕者，可以免操。”从此，女生们都去上操，再无躲避者。