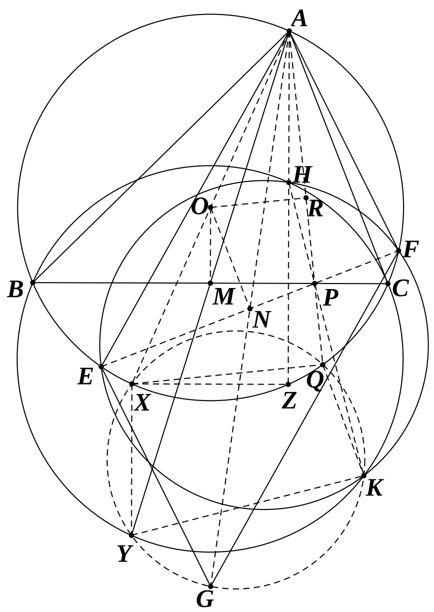
第四十八期问题征解解答与点评

张端阳

第一题 在 $\triangle ABC$ 中, H 为垂心, M 为 BC 的中点. X 为 A 的对径点, Y 为 A 关于 M 的对称点. 过 H 作一个圆与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于点 E, F, 与 $\triangle BHC$ 的外接圆交于另一点 K. 作平行四边形 $AEGF$, 证明: G, K, X, Y 四点共圆.

(深圳中学学生 邓博文 供题)

证明 (根据供题者的解答整理):



对 $\triangle ABC$ 的外接圆、$\triangle BHC$ 的外接圆、四边形 $HEKF$ 的外接圆用蒙日定理, 得 BC, HK, EF 交于一点, 设为 P.

延长 AP 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 Q, 我们证明 G, K, Q, X, Y 五点共圆.

一方面, 设 AG, AQ, AX 的中点分别为 N, R, O, 则 N 也是 EF 的中点, O 是 $\triangle ABC$ 的外心. 因为 $ON \perp EF, OR \perp AQ, OM \perp BC$, 所以 N, R, M 都在以 OP 为直径的圆上. 以 A 为中心作 $2:1$ 的位似得, G, Q, X, Y 共圆.

另一方面, 因为

$$AP \cdot PQ = BP \cdot PC = HP \cdot PK,$$

所以 A, H, Q, K 共圆. 由垂心的性质, HY 是 $\triangle BHC$ 外接圆的直径. 延长 AH 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 Z, 则

$$\begin{aligned} \angle QKY &= \angle HKY - \angle QKH = 90^\circ - \angle QAH \\ &= 90^\circ - \angle QXZ = 180^\circ - \angle QXY, \end{aligned}$$

其中最后一步用到的 $\angle ZXY = 90^\circ$ 由 $XY \perp BC, XZ \parallel BC$ 得到, 所以 K, Q, X, Y 共圆.

故 G, K, Q, X, Y 五点共圆. □

评注 (1). 也可以取 AK 的中点, 直接证明其与 N, O, M 共圆.

(2). 华南师大附中戴子一、彭子晋, 长沙一中张浩鹏, 北大附中王子豪, 深圳高级中学丁立轩, 广州大学附属中学何金熹, 北京一零一中学牟思特, 浏阳市新翰高中吴高旺, 衢州二中周胤帆, 上海市华育中学龚逸晨, 上海中学杨镇, 上海市大同中学卫达, 巴蜀中学王瑜, 西工大附中杨泽宇, 镇海中学卢一端等同学也给出了本题的正确解答.

第二题 设正实数 x, y 满足 $x + y < 1$. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_2 = a, a_{n+2} = xa_{n+1} + ya_n$. 证明: 若 $a > -y$, 则对任意正整数 n, 均有

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n < \frac{1 - x + a}{1 - x - y}.$$

(温州育英中学学生 胡俊浦 供题)

证明 1 (根据供题者的整理):

对 n 归纳.

当 $n = 1$ 时,

$$1 < \frac{1 - x + a}{1 - x - y} \Leftrightarrow a > -y,$$

成立.

当 $n = 2$ 时,

$$1 + a < \frac{1 - x + a}{1 - x - y} \Leftrightarrow a > -\frac{y}{x + y},$$

由 $a > -y$ 及 $x + y < 1$ 知成立.

假设 n 和 $n + 1$ 时命题成立, 来看 $n + 2$ 时的情形.

由归纳假设,

$$a_1+a_2+\cdots+a_n<\frac{1-x+a}{1-x-y},$$

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}<\frac{1-x+a}{1-x-y}.$$

因为 $x,y>0$, 所以

$$\begin{aligned}&y(a_1+a_2+\cdots+a_n)+x(a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1})\\<&y\cdot\frac{1-x+a}{1-x-y}+x\cdot\frac{1-x+a}{1-x-y}.\end{aligned}$$

结合递推公式得,

$$xa_1+a_3+a_4+\cdots+a_{n+2}<(x+y)\cdot\frac{1-x+a}{1-x-y}.$$

故

$$\begin{aligned}a_1+a_2+\cdots+a_{n+2}&<(x+y)\cdot\frac{1-x+a}{1-x-y}-x+1+a\\&=\frac{1-x+a}{1-x-y}.\end{aligned}$$

归纳得证. □

证明 2 (根据北大附中王子豪同学的整理):

因为 $y>0$, 所以方程 $r^2-xr-y=0$ 有两个不等实根 s,t, 不妨设 $s>t$. 由 $x+y<1$ 知 $s<1$.

易知

$$a_n=\frac{a-t}{s-t}\cdot s^{n-1}-\frac{a-s}{s-t}\cdot t^{n-1},$$

所以

$$\begin{aligned}a_1+a_2+\cdots+a_n&=\frac{a-t}{s-t}(1+s+\cdots+s^{n-1})-\frac{a-s}{s-t}(1+t+\cdots+t^{n-1})\\&=\frac{a-t}{(s-t)(s-1)}(s^n-1)-\frac{a-s}{(s-t)(t-1)}(t^n-1)\\&=b_n-b_0,\end{aligned}$$

其中

$$b_n=\frac{a-t}{(s-t)(s-1)}s^n-\frac{a-s}{(s-t)(t-1)}t^n.$$

因为

$$\begin{aligned}b_0&=\frac{a-t}{(s-t)(s-1)}-\frac{a-s}{(s-t)(t-1)}\\&=\frac{s+t-a-1}{(s-1)(t-1)}=\frac{x-a-1}{1-x-y}\\&<\frac{-y-a}{1-x-y}<0,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \frac{(a-t)s}{(s-t)(s-1)} - \frac{(a-s)t}{(s-t)(t-1)} \\
&= \frac{st-a}{(s-1)(t-1)} = \frac{-y-a}{1-x-y} < 0,
\end{aligned}
$$

又有递推公式 $b_{n+1} = xb_{n+1} + yb_n$ 及 $x, y > 0$, 所以对任意正整数 n 都有 $b_n < 0$.

这样,

$$
a_1 + a_2 + \cdots + a_n < -b_0 = \frac{1-x+a}{1-x-y}.
$$

□

评注 (1). 也可以先将命题等价地转化为: 对任意正整数 n 都有 $a_{n+1}+ya_n > 0$, 再归纳证明.

(2). 本题的提出源于如下事实的一种归纳证法:

对任意正整数 n, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} < 2$.

证明: $n = 1$ 时显然成立. 假设 n 时成立, $n+1$ 时,

$$
\begin{aligned}
1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} &= 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\
&< 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 2.
\end{aligned}
$$

该证法有意思的地方在于, 虽然不等式左边关于 n 单调递增, 但并没有使用加强归纳.

本题将等比数列推广为二阶线性递推 (两个等比数列之和), 得到类似的结果.

(3). 北京一零一中学牟思特, 华南师大附中戴子一、彭子晋, 浏阳市新翰高中吴高旺, 衢州二中石芷润, 上海中学杨镇, 深圳中学伍知行, 巴蜀中学王瑜, 西工大附中杨泽宇, 浙江省淳安中学徐海天等同学也给出了本题的正确解答.

第三题 对 $i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{Z}, |j| \le i$, 定义 $a_{i,j}$ 为 $\left(x + 1 + \frac{1}{x}\right)^i$ 的 j 次项系数模 2 的最小非负剩余. 将 $a_{i,j}$ 标记在平面直角坐标系的点 $(j, -i)$ 处. 将距离为 1 的两个标 0 的点连一条边, 则 y 轴右侧所有标 0 的点构成一个无限图 G. 证明: G 是连通图.

(湖南师大附中学生 刘子昂 供题)

证明 (根据西工大附中杨泽宇同学的解答整理):

以下都在模 2 的意义下进行. 先证明几个结论.

(1) 对任意正整数 k,

$$
\left(x + 1 + \frac{1}{x}\right)^{2^k} = x^{2^k} + 1 + \frac{1}{x^{2^k}}.
$$

这由
$$\left(x+1+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2x+3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=x^2+1+\frac{1}{x^2}$$
及归纳法即证.

(2) $a_{i,j}=a_{i-1,j-1}+a_{i-1,j}+a_{i-1,j+1}$, 其中当 $|j|>i$ 时, 约定 $a_{i,j}=0$.

这由
$$\left(x+1+\frac{1}{x}\right)^i=\left(x+1+\frac{1}{x}\right)^{i-1}\left(x+1+\frac{1}{x}\right)$$
展开并比较系数即证.

(3) $a_{i,0}=1$.

由对称性, $a_{i,j}=a_{i,-j}$, 所以 $a_{i,0}=a_{i-1,-1}+a_{i-1,0}+a_{i-1,1}=a_{i-1,0}$, 再由 $a_{0,0}=1$ 及归纳法即证.

(4) $a_{i,i}=1$.

这由 $\left(x+1+\frac{1}{x}\right)^i$ 的展开式中 x^i 为最高次项即证.

(5) 当 i 是偶数, j 是奇数时, $a_{i,j}=0$.

因为
$$\left(x+1+\frac{1}{x}\right)^i=\sum_{k=0}^{i}\mathrm{C}_i^k\left(x+\frac{1}{x}\right)^k,$$
且当 k 是偶数时, $\left(x+\frac{1}{x}\right)^k$ 的展开式中 x 的指数都是偶数; 当 k 是奇数时, C_i^k 是偶数, 由此即证.

回到原题. 若对 $j\geq 0$, 有
$$a_{i,j}=1,a_{i,j+1}=a_{i,j+2}=\cdots=a_{i,j+k}=0,a_{i,j+k+1}=1,$$
则称其为第 i 行的一个 $k-$连通组. 进一步, 若存在 $1\leq h\leq k$, 使得 $a_{i+1,j+h}=0$, 则称上述 $k-$连通组可以向下延伸.

由 (3),(4), 若某行中有 0, 则必有连通组.

我们证明每个连通组必然向下延伸.

设 $a_{i,j+1},a_{i,j+2},\cdots,a_{i,j+k}$ 是第 i 行的一个 $k-$连通组.

当 $k\geq 3$ 时, $a_{i,j+1}=a_{i,j+2}=a_{i,j+3}=0$, 由 (2),
$$a_{i+1,j+2}=a_{i,j+1}+a_{i,j+2}+a_{i,j+3}=0.$$

当 $k=2$ 时, $a_{i,j}=1,a_{i,j+1}=a_{i,j+2}=0,a_{i,j+3}=1$. 由 (5), i 是奇数, 于是 $a_{i+1,j+1}$ 和 $a_{i+1,j+2}$ 中必有 0. (事实上再由 (2) 可知这种情形不存在)

当 $k=1$ 时, $a_{i,j}=1,a_{i,j+1}=0,a_{i,j+2}=1$, 由 (2),
$$a_{i+1,j+2}=a_{i,j+1}+a_{i,j+2}+a_{i,j+3}=0.$$

由 (1), 对任意正整数 n, $a_{2^n,1}, a_{2^n,2}, \cdots, a_{2^n,2^n-1}$ 是第 2^n 行的 $(2^n-1)-$连通组, 所以 $1 \sim 2^n-1$ 行中的连通组都可以向下延伸至第 2^n 行. 由此即知 G 是连通图.

综上, 命题得证. $\square$

评注 (1). y 轴右侧的前 16 行如下图所示:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
1 \\
0 & 1 \\
0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}$$

(2). 可以证明, 每个连通组的长度都是奇数.

(3). 本题的想法源自下题:

证明 $(x^2+x+1)^n$ 的展开式中至少有一项系数为偶数.

本题讨论 $\left(x+1+\frac{1}{x}\right)^n$ 的展开式系数模 2 构成的三角阵的几何性质, 自然联想到 $(x+1)^n$ 的展开式系数构成的三角阵, 即杨辉三角. 我们知道, 杨辉三角模 2 得到的数阵有很强的自相似性, 因此猜测题中的数阵也有自相似性, 这由 $a_{2^k+i,2^k+j} = a_{i,j} (1 \le i < 2^k, j \ge 0)$ 可以看出.

(4). 上海中学杨镇, 华南师大附中戴子一、彭子晋, 北京一零一中学牟思特, 衢州二中石芷润, 巴蜀中学王瑜等同学也给出了本题的正确解答.

第四题 设 $A_1, A_2, \cdots, A_{2022}$ 是集合 $\{1, 2, \cdots, 2022\}$ 的不同子集, 满足其中任意 100 个的并集的元素个数严格大于 2001. 证明: 其中必有 21 个两两交集非空.

(长郡中学学生 李瑾波 供题)

证明 1 (根据华南师大附中彭子晋同学的解答整理):

对 $1 \le i \le 2022$, 设 $A_1, A_2, \cdots, A_{2022}$ 中有 x_i 个含元素 i.

假设命题不成立, 则 $x_i \le 20$, 于是

$$|A_1| + |A_2| + \cdots + |A_{2022}| = x_1 + x_2 + \cdots + x_{2022} \le 20 \times 2022.$$

不妨设 $|A_1| \le |A_2| \le \cdots \le |A_{2022}|$, 则

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{100}| &\le |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_{100}| \\ &\le \frac{100}{2022}(|A_1| + |A_2| + \cdots + |A_{2022}|) \\ &\le \frac{100}{2022} \times 20 \times 2022 = 2000,\end{aligned}$$

与条件矛盾!

综上, 命题得证. □

证明 2 (根据巴蜀中学王瑜同学的解答整理):

我们证明更强的结论, 必有 92 个子集两两交集非空.

对 $i = 1, 2, \cdots, 2022$, 依次检查 A_i 中的元素. 对于 $a \in A_i$, 若对其他任意 99 个子集 $A_{j_1}, A_{j_2}, \cdots, A_{j_{99}}$, 有

$$|A_{j_1} \cup A_{j_2} \cup \cdots \cup A_{j_{99}} \cup (A_i \setminus \{a\})| > 2001,$$

则令 $A_i' = A_i \setminus \{a\}$, $A_j' = A_j (j \ne i)$. 若 $A_1', A_2', \cdots, A_{2022}'$ 中有 92 个两两交集非空, 则 $A_1, A_2, \cdots, A_{2022}$ 中对应的 92 个两两交集非空.

设将 $A_1, A_2, \cdots, A_{2022}$ 中的所有元素检查完毕后, A_i 剩余的元素组成 B_i. 任取 $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_{2022}$ 中的一个元素 b, 设 $b \in B_s$. 因为 b 不可删除, 所以存在不含 b 的 99 个集合 $B_{t_1}, B_{t_2}, \cdots, B_{t_{99}}$, 使得

$$|B_{t_1} \cup B_{t_2} \cup \cdots \cup B_{t_{99}} \cup B_s| = 2002,$$

这表明

$$k := |B_{t_1} \cup B_{t_2} \cup \cdots \cup B_{t_{99}}| \le 2001.$$

为了记号上的简便, 不妨设 $t_1 = 1, t_2 = 2, \cdots, t_{99} = 99$.

记

$$S = \{1, 2, \cdots, 2022\} \setminus (B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_{99}),$$

则 $|S|=2022-k$.

对 $100\le i\le 2022$, 因为

$$|B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_{99}\cup B_i|\ge 2002,$$

所以 $|B_i\cap S|\ge 2002-k$.

下面证明, 存在 S 中的一个元素至少属于 $B_{100},B_{101},\cdots,B_{2022}$ 中的 92 个. 假设不成立, 则

$$\sum_{i=100}^{2022}|B_i|\le 91|S|=91(2022-k).$$

又

$$\sum_{i=100}^{2022}|B_i\cap S|\ge 1923(2002-k),$$

所以 $1923(2002-k)\le 91(2022-k)$. 解得 $k>2001$, 矛盾!

综上, 命题得证. □

证明 3 (根据供题者的解答整理):

构造图 G: $A_1,A_2,\cdots,A_{2022}$ 是顶点, 若 $A_i\cap A_j\ne\emptyset$, 则在 A_i,A_j 之间连边. 本题即证图中存在 21−团.

先证明一个引理.

引理 设整数 $n\ge k\ge 3$, 若一个 n 阶图中无 $k-$团, 则图中至少有 $\lceil\frac{1}{k-1}n\rceil+r-1$ 个顶点的度不超过 $[\frac{k-2}{k-1}n]$, 这里 r 是 n 模 $k-1$ 的最小正余数.

证明　设 $n=q(k-1)+r_0\ (0\le r_0\le k-2, q\in\mathbb{N}_+)$.

(1) 若 $k-1\mid n$, 则

$$r_0=0, r=k-1, \left\lceil\frac{1}{k-1}n\right\rceil+r-1=q+k-2, \left[\frac{k-2}{k-1}n\right]=q(k-2).$$

假设结论不成立, 则至少有 $n-(q+k-2)+1=q(k-2)-k+3$ 个顶点的度不小于 $q(k-2)+1$, 记它们构成集合 S.

下面对 t 归纳证明, 对任意 $1\le t\le k-2$, 存在 $v_1,v_2,\cdots,v_t\in S$, 它们两两相邻, 且

$$\left|\left(\bigcap_{i=1}^{t}N(v_i)\right)\cap S\right|\ge q(k-t-2)-k+t+3.$$

当 $t=1$ 时, 任取 $v_1\in S$, 则

$$\begin{aligned}|N(v_1)\cap S|&=|N(v_1)|+|S|-|N(v_1)\cup S|\\&\ge(q(k-2)+1)+(q(k-2)-k+3)-q(k-1)\\&=q(k-3)-k+4,\end{aligned}$$

结论成立.

假设 t 时成立, 其中 $1 \le t \le k-3$, 设已选定 $v_1, v_2, \cdots, v_t$. 则 $t+1$ 时, 由

$$\left|\bigcap_{i=1}^{t} N(v_i) \cap S\right| \ge q(k-t-2)-k+t+3 \ge (k-t-2)-k+t+3=1,$$

知可选出 $v_{t+1} \in \bigcap\limits_{i=1}^{t} N(v_i) \cap S$. 此时 $v_1, \cdots, v_t, v_{t+1}$ 两两相邻, 因此只需证明

$$\left|\bigcap_{i=1}^{t+1} N(v_i) \cap S\right| \ge q(k-t-3)-k+t+4.$$

事实上,

$$\begin{aligned}\left|\bigcap_{i=1}^{t+1} N(v_i) \cap S\right| &\ge \left|\bigcap_{i=1}^{t} N(v_i) \cap S\right| + |N(v_{t+1})| - |V| \\ &\ge (q(k-t-2)-k+t+3)+(q(k-2)+1)-q(k-1) \\ &= q(k-t-3)-k+t+4.\end{aligned}$$

归纳证毕.

取 $t=k-2$ 知, 存在 $k-2$ 个顶点 $v_1, \cdots, v_{k-2} \in S$, 它们两两相邻. 因为此时 $q(k-t-2)-k+t+3=1$, 所以可取 $v_{k-1} \in \bigcap\limits_{i=1}^{k-2} N(v_i) \cap S$, 则

$$\begin{aligned}\left|\bigcap_{i=1}^{k-1} N(v_i)\right| &\ge (k-1)|N(v_i)|-(k-2)|V| \\ &\ge (k-1)(q(k-2)+1)-(k-2)q(k-1) \\ &= k-1.\end{aligned}$$

从而存在 $v_k \in \bigcap\limits_{i=1}^{k-1} N(v_i)$, 于是 $v_1, v_2, \cdots, v_k$ 两两相邻, 构成 $k-$团, 矛盾!

(2) 若 $k-1 \nmid n$, 设 $n=q(k-1)+r$, 则

$$\lceil \frac{1}{k-1} n \rceil + r - 1 = q + r, [\frac{k-2}{k-1} n] = q(k-2)+r-1.$$

同样地使用反证法, 并设出 S. 完全类似地, 可以归纳证明, 对任意 $1 \le t \le k-2$, 存在 $v_1, v_2, \cdots, v_t \in S$, 它们两两相邻, 且

$$\left|\left(\bigcap_{i=1}^{t} N(v_i)\right) \cap S\right| \ge q(k-t-2)+1.$$

取 $t=k-2$, 则 $\left|\left(\bigcap\limits_{i=1}^{k-2} N(v_i)\right) \cap S\right| \ge 1$. 所以可取 $v_{k-1} \in \bigcap\limits_{i=1}^{k-2} N(v_i) \cap S$, 则

$$\left|\bigcap_{i=1}^{k-1} N(v_i)\right| \ge (k-1)|N(v_i)|-(k-2)|V|$$

$$\geq (k-1)(q(k-2)+r)-(k-2)(q(k-1)+r)$$
$$= r > 0.$$

从而存在 $v_k \in \bigcap_{i=1}^{k-1} N(v_i)$, 于是 $v_1, v_2, \cdots, v_k$ 两两相邻, 构成 $k-$团, 矛盾!

引理得证.

回到原题. 若 G 中没有 21−团, 由引理, G 中有 $\lceil \frac{1}{21-1} \cdot 2022 \rceil + 2 - 1 = 103$ 个顶点, 设为 $A_1, A_2, \cdots, A_{103}$, 它们的度不超过 $[\frac{21-2}{21-1} \cdot 2022] = 1920$. 故对任意 $1 \leq i \leq 103$, 与 A_i 不交的集合数不少于 $2022 - 1920 - 1 = 101$. 由条件, 这 101 个集合的并集元素个数大于 2001, 故 $|A_i| \leq 2022 - 2002 = 20$. 在 $A_1, A_2, \cdots, A_{103}$ 中任选 100 个集合求并, 其元素个数不超过 2000, 与条件矛盾!

综上, 命题得证. □

评注 (1). 本题的命题背景是:

(i) **(Zarankiewica 引理)** 若一个 n 阶图中无 $k-$团, 则必有一个顶点的度不超过 $[\frac{k-2}{k-1}n]$.

(ii) **(2004 年罗马尼亚国家队选拔考试)** 设 $A_1, A_2, \cdots, A_{101}$ 是 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的不同子集, 满足其中任意 50 个的并集的元素个数严格大于 $\frac{50}{51}n$. 证明: 其中必有 3 个子集两两交集非空.

在罗马尼亚的题中, 对 Zarankiewica 引理在 $k=3$ 的情形进行了加强, 改进了度不超过 $[\frac{n}{2}]$ 的顶点个数的下界. 这引发作者思考对一般的 k 能否作此推广. 经过反复尝试, 确定了这个下界大约为 $\frac{n}{k-1}$, 常数项则是通过待定系数法得出.

在改进了一般情形下的 Zarankiewica 引理后, 作者把题目改编回集合的形式, 并设计了相关数据, 使题面看起来较为巧合, 且为他人提供更多做法留下思考空间.

(2). 西工大附中杨泽宇, 上海中学杨镇, 浏阳市新翰高中吴高旺, 华南师大附中戴子一, 北京一零一中学牟思特, 北大附中王子豪, 徐州市第一中学黄羽翔等同学也给出了本题的正确解答.