

数学新星问题征解

第五十期 (2023.05)

主持: 张端阳

第一题. 定义函数 $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$, 满足 $f(1) = 1$, 且对任意整数 $n \geq 2$, 若 n 的素因数标准分解为 $\prod_{i=1}^m p_i^{\alpha_i}$, 则 $f(n) = \prod_{i=1}^m \alpha_i^{p_i}$.

问: 对给定的正整数 n , 迭代序列 $f(n), f^{(2)}(n), f^{(3)}(n), \dots$ 是否最终一定周期? 若是, 求最小正周期的最大可能值; 若不是, 给出所有的反例.

(华南师大附中 戴子一 供题)

第二题. 如图 (见下页), 在 $\triangle ABC$ 中, H 为垂心. 以 AH 为半径的圆 H 分别交 AB, AC 于点 D, E , DC 交 BE 于点 F . A' 为 A 关于圆 H 的对径点. 以 AH 为底, 作等腰 $\triangle MAH$, 其中 $\angle MAB, \angle ABC, \angle ACB$ 构成等差数列. 以其腰为半径的圆 M 交以 AF 为直径的圆 G 于点 N . 设 $\triangle BHC$ 的外心为 O , 延长 OA' 交圆 G 于点 S , 延长 AS 交 NF 于点 K .

证明: (1) A, N, O 三点共线; (2) B, C, K 三点共线.

(长郡中学学生 李汝曦 供题)

第三题. 给定正整数 k . 对于一条由 k 条线段组成的不自交的折线 (相邻的两条线段不共线), 考虑每条线段所在的直线, 求这样的直线条数的最小值.

(北大附中中学 高学文 供题)

第四题. 求所有的函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 使得对任意实数 x, y , 均有

$$f(x^3) + f(y^3) = (f(x^2) - f(xy) + f(y^2))(f(x) + f(y)),$$

且 f 在 $(2, 3)$ 上单调.

(上海中学学生 杨镇 供题)

附：第二题配图

