第五十期问题征解解答与点评

张端阳

第一题 定义函数 $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$, 满足 $f(1)=1$, 且对任意整数 $n\geq 2$, 若 n 的素因数标准分解为 $\prod\limits_{i=1}^{m}p_i^{\alpha_i}$, 则 $f(n)=\prod\limits_{i=1}^{m}\alpha_i^{p_i}$.

问: 对给定的正整数 n, 迭代序列 $f(n),f^{(2)}(n),f^{(3)}(n),\cdots$ 是否最终一定周期? 若是, 求最小正周期的最大可能值; 若不是, 给出所有的反例.

(华南师大附中学生 戴子一 供题)

解 (根据衢州二中向阳天同学的解答整理):

先证明两个引理.

引理 1 设 $x_1,x_2,\cdots,x_t\geq 2$, 则 $\prod\limits_{i=1}^{t}x_i\geq\sum\limits_{i=1}^{t}x_i$.

证明 对 t 归纳.

当 $t=1$ 时显然成立. 当 $t=2$ 时,

$$x_1x_2-(x_1+x_2)=(x_1-1)(x_2-1)-1\geq 0.$$

假设 $t\geq 3$ 且 $t-1$ 时成立, 来看 t 时的情形.

由归纳假设和 $t=2$ 时的情形,

$$\prod_{i=1}^{t}x_i=\prod_{i=1}^{t-1}x_i\cdot x_t\geq\sum_{i=1}^{t-1}x_i\cdot x_t\geq\sum_{i=1}^{t-1}x_i+x_t=\sum_{i=1}^{t}x_i.$$

归纳证毕.

引理 2 设 $x\geq 2,y\in\mathbb{N}_+$, 则 $x^y\geq xy$.

证明 由伯努利不等式,

$$x^{y-1}\geq 2^{y-1}=(1+1)^{y-1}\geq 1+(y-1)\cdot 1=y,$$

再同乘以 x 即证.

回到原题. 我们证明对任意正整数 n, $n\geq f(f(n))$.

当 $n=1$ 时显然成立. 对 $n\geq 2$, 设 n 的素因数标准分解为 $\prod\limits_{i=1}^{m}p_i^{\alpha_i}$, 再设 $\prod\limits_{i=1}^{m}\alpha_i$ 的所有素因子为 $q_1,q_2,\cdots,q_t$, 且 $f(n)=\prod\limits_{i=1}^{m}\alpha_i^{p_i}$ 的素因数标准分解为 $\prod\limits_{j=1}^{t}q_j^{\beta_j}$, 则

$\beta_j = \sum\limits_{i=1}^{m} p_i \nu_{q_j}(\alpha_i), j = 1, 2, \cdots, t.$

此时

$$f(f(n)) = \prod_{j=1}^{t} \beta_j^{q_j} = \prod_{j=1}^{t} \left(\sum_{i=1}^{m} p_i \nu_{q_j}(\alpha_i) \right)^{q_j},$$

又

$$n = \prod_{i=1}^{m} p_i^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^{m} p_i^{\prod\limits_{j=1}^{t} q_j^{\nu_{q_j}(\alpha_i)}},$$

所以只需证明

$$\prod_{i=1}^{m} p_i^{\prod\limits_{j=1}^{t} q_j^{\nu_{q_j}(\alpha_i)}} \geq \prod_{j=1}^{t} \left(\sum_{i=1}^{m} p_i \nu_{q_j}(\alpha_i) \right)^{q_j}.$$

由引理 1,

$$\prod_{j=1}^{t} q_j^{\nu_{q_j}(\alpha_i)} = \prod_{\substack{1 \leq j \leq t \\ \nu_{q_j}(\alpha_i) > 0}} q_j^{\nu_{q_j}(\alpha_i)} \geq \sum_{\substack{1 \leq j \leq t \\ \nu_{q_j}(\alpha_i) > 0}} q_j^{\nu_{q_j}(\alpha_i)},$$

于是

$$\prod_{i=1}^{m} p_i^{\prod\limits_{j=1}^{t} q_j^{\nu_{q_j}(\alpha_i)}} \geq \prod_{j=1}^{t} \prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ \nu_{q_j}(\alpha_i) > 0}} p_i^{q_j^{\nu_{q_j}(\alpha_i)}}.$$

又

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \nu_{q_j}(\alpha_i) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ \nu_{q_j}(\alpha_i) > 0}} p_i \nu_{q_j}(\alpha_i),$$

所以为了记号上的简便, 可不妨设所有 $\nu_{q_j}(\alpha_i)$ 均大于 0. 此时只需证明, 对 $j = 1, 2, \cdots, t$, 均有

$$\prod_{i=1}^{m} p_i^{q_j^{\nu_{q_j}(\alpha_i)}} \geq \left(\sum_{i=1}^{m} p_i \nu_{q_j}(\alpha_i) \right)^{q_j}.$$

由引理 2,

$$\prod_{i=1}^{m} p_i^{q_j^{\nu_{q_j}(\alpha_i)}} \geq \prod_{i=1}^{m} p_i^{q_j \nu_{q_j}(\alpha_i)} = \left(\prod_{i=1}^{m} p_i^{\nu_{q_j}(\alpha_i)} \right)^{q_j},$$

再由引理 1 和引理 2,

$$\prod_{i=1}^{m} p_i^{\nu_{q_j}(\alpha_i)} \geq \sum_{i=1}^{m} p_i^{\nu_{q_j}(\alpha_i)} \geq \sum_{i=1}^{m} p_i \nu_{q_j}(\alpha_i),$$

由此即证.

这样, $\{f^{(2k)}(n)\}$ 和 $\{f^{(2k+1)}(n)\}$ 都是不增的正整数序列, 从而存在正整数 K, 使得对任意整数 $k \geq K$, 均有 $f^{(k+2)}(n) = f^{(k)}(n)$. 故 $\{f^{(k)}(n)\}$ 最终一定周期, 且

最小正周期不超过 2.

另一方面, 因为 $f(8)=9, f(9)=8$, 所以当 $n=8$ 时, $\{f^{(k)}(n)\}$ 的最小正周期等于 2.

综上, 迭代序列 $\{f^{(k)}(n)\}$ 最终一定周期, 且最小正周期最大为 2. $\square$

评注 (1). 事后发现, 本题已在美国数学月刊 2007 年第 8 期 11315 号问题中出现过.

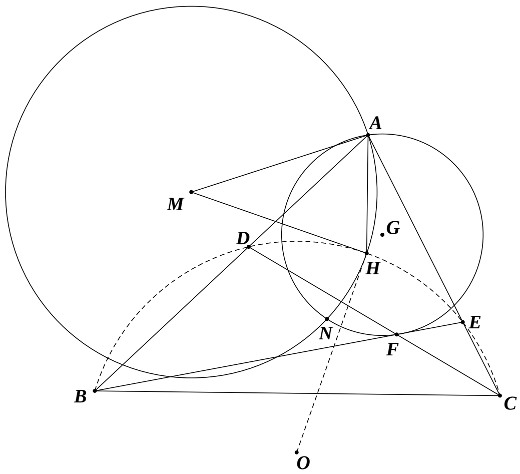
(2). 福州延安中学李奕铭, 广州大学附属中学何金熹, 衢州二中周胤帆, 温州中学徐昊祁, 人大附中杨元篪, 华南师范大学附属中学彭子晋, 天津市第一中学张航领等同学也给出了本题的正确解答.

第二题 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, H 为垂心. 以 AH 为半径的圆 H 分别交 AB, AC 于点 D, E, DC 交 BE 于点 F. A' 为 A 关于圆 H 的对径点. 以 AH 为底, 作等腰 $\triangle MAH$, 其中 $\angle MAB, \angle ABC, \angle ACB$ 构成等差数列. 以其腰为半径的圆 M 交以 AF 为直径的圆 G 于点 N. 设 $\triangle BHC$ 的外心为 O, 延长 OA' 交圆 G 于点 S, 延长 AS 交 NF 于点 K.

证明: (1) A, N, O 三点共线; (2) B, C, K 三点共线.

(长郡中学学生 李汝曦 供题)

证明 (根据福州延安中学李奕铭同学的整理):



(1) 因为 AN 是圆 M 与圆 G 的根轴, 所以只需证明 O 到圆 M 与圆 G 的幂相等.

一方面, 由 $\angle MAB, \angle ABC, \angle ACB$ 构成等差数列, 知 $\angle MAB = 2B - C$, 所以

$$\angle MHA = \angle MAH = (2B - C) + (90^\circ - B) = 90^\circ + B - C.$$

又

$$\angle AHO=\angle AHB+\angle BHO=(180^\circ-C)+B,$$

所以

$$\angle MHO=\angle AHO-\angle MHA=90^\circ,$$

于是 O 到圆 M 的幂为 OH^2.

另一方面, 由 $HA=HD$ 且 $CH\perp AD$ 知 $\angle ADC=A$. 同理, $\angle AEB=A$, 所以

$$\angle BDC=\angle BEC=180^\circ-A=\angle BHC,$$

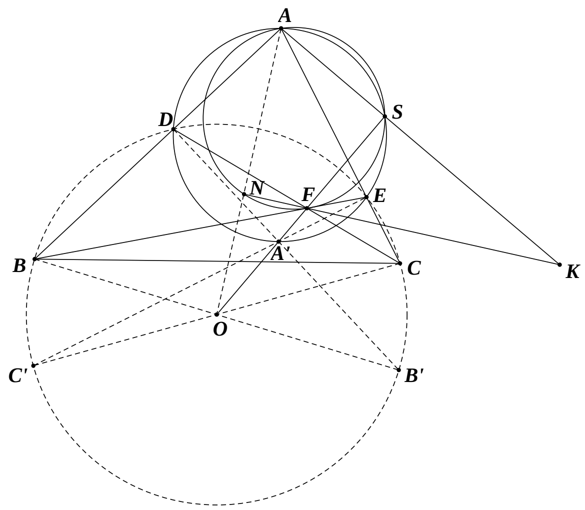
于是 B,D,H,E,C 五点共圆, 且以 O 为圆心.

用 $\mathrm{Pow}(X)$ 表示点 X 到圆 O 的幂. 对圆内接四边形 $BDEC$, 熟知 $AF^2=\mathrm{Pow}(A)+\mathrm{Pow}(F)$, 所以

$$\begin{aligned}OG^2&=\frac{1}{2}(OA^2+OF^2)-\frac{1}{4}AF^2\\&=\frac{1}{2}(\mathrm{Pow}(A)+\mathrm{Pow}(F))+OH^2-\frac{1}{4}AF^2\\&=\frac{1}{4}AF^2+OH^2=AG^2+OH^2.\end{aligned}$$

于是 O 到圆 G 的幂 $OG^2-AG^2=OH^2$.

故 O 到圆 M 与圆 G 的幂均为 OH^2.



(2) 延长 DA',EA' 分别交圆 O 于点 B',C', 由 $\angle ADA'=\angle AEA'=90^\circ$, 知 BB',CC' 是圆 O 的直径.

对圆内接六边形 $BEC'CDB'$ 用 Pascal 定理得 O,A',F 共线, 所以由 $\angle ASF=90^\circ$ 知 $OF\perp AK$. 又由 $\angle ANF=90^\circ$ 知 $AO\perp FK$, 所以 K 是 $\triangle AOF$ 的垂心.

对圆内接四边形 $BDEC$ 用 Brocard 定理, 知 K 是 DE 与 BC 的交点, 故 B,C,K 共线. $\square$

评注 (1). 衢州二中周胤帆同学指出, 点 N 满足 $\angle HNC = 3\angle HBC, \angle HNB = 3\angle HCB$, 在 2023 年伊朗国家队选拔考试第六题中也出现了这个点.

(2). 山东省东营市第一中学扈景轩, 东北师大附中白淞禹, 广饶一中李耀文, 广州大学附属中学何金熹, 广州市天河外国语学校陈泓道, 宁波市第十五中学庄子曰, 武汉市七一中学杨子奥, 长沙市一中李俊贤、黄诚、刘恒宇, 温州中学徐昊祁, 人大附中杨元篪, 华南师范大学附属中学彭子晋, 天津市第一中学张航领等同学也给出了本题的正确解答.

第三题 给定正整数 k. 对于一条由 k 条线段组成的不自交的折线 (相邻的两条线段不共线), 考虑每条线段所在的直线, 求这样的直线条数的最小值.

(北大附中学生 高学文 供题)

解 (根据供题者的解答整理):

记

$$a_n = n\left[\frac{n-1}{2}\right] + \frac{3+(-1)^n}{2} = \begin{cases} \frac{1}{2}(n^2-n)+1, & n \text{ 是奇数} \\ \frac{1}{2}(n^2-2n)+2, & n \text{ 是偶数} \end{cases},$$

则 $\{a_n\}$ 是递增的正整数数列, 且 $a_1 = 1, a_2 = 2$.

记 $m = \min\limits_{a_n \geq k} n$, 我们证明直线条数的最小值为 m.

当 $k = 1$ 时 $m = 1$, 当 $k = 2$ 时 $m = 2$, 结论均显然成立.

当 $k \geq 3$ 时, 设折线为 $P_0P_1\cdots P_k$, $P_0P_1, P_1P_2, \cdots, P_{k-1}P_k$ 所在的不同直线为 $l_1, l_2, \cdots, l_x$, 其中任两条直线的交点称为结点.

先证明 $x \geq m$.

当 x 是奇数时, 因为 $P_1, P_2, \cdots, P_{k-1}$ 是互异的结点, 所以 $k-1 \leq \mathrm{C}_x^2 = a_x - 1$. 于是 $a_x \geq k$, 故 $x \geq m$.

当 x 是偶数时, 由 l_i 上至多有 $x-1$ 个结点, 知 $P_1P_2, P_2P_3, \cdots, P_{k-2}P_{k-1}$ 中至多有 $\left[\frac{x-1}{2}\right]$ 条在 l_i 上 (相邻两条不同在 l_i 上). 因为 $l_1, l_2, \cdots, l_x$ 包含 $P_1P_2, P_2P_3, \cdots$, $P_{k-2}P_{k-1}$, 所以 $k-2 \leq x \cdot \left[\frac{x-1}{2}\right] = a_x - 2$. 于是 $a_x \geq k$, 故 $x \geq m$.

再证明存在由 k 条线段组成的不自交的折线被 m 条直线包含.

只需构造 $k = a_m$ 时的情形.

设 n 是大于 2 的偶数.

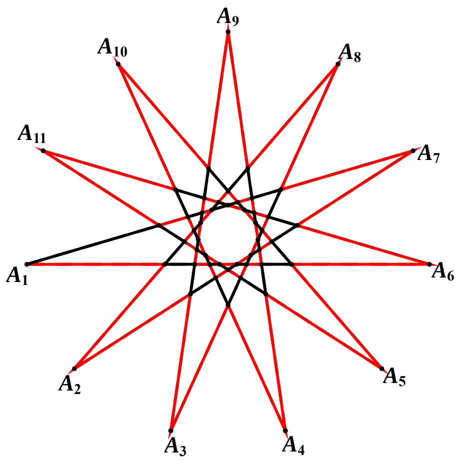
当 $m = n-1$ 时, 设 $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$ 是正 $n-1$ 边形的顶点, 按逆时针排列. 令直线 $l_i = A_iA_{i+\frac{n}{2}-1}(1 \leq i \leq n-1)$, 下标按模 $n-1$ 理解.

对 $1,2,\cdots,\frac{n}{2}-1$ 中与 $\frac{n}{2}-1$ 同奇偶的 t, 先将如下多边形的边染上红色, 其余边染上黑色:

$$Q_{1,1+t}Q_{1+t,2}Q_{2,2+t}Q_{2+t,3}\cdots Q_{n-1,n-1+t}Q_{n-1+t,1},$$

其中 $Q_{i,j}$ 是 l_i 与 l_j 的交点, 且将 $Q_{i,i}$ 忽略. 记 $A_1A_{\frac{n}{2}+1}$ 上从 A_1 开始的第 $2[\frac{n}{4}]$ 个点为 C, 再将线段 A_1C 上的红与黑互换.

此时红色线段即为满足要求的折线（不计最两端的线段）, 下图是 $m=11$ 时的例子:

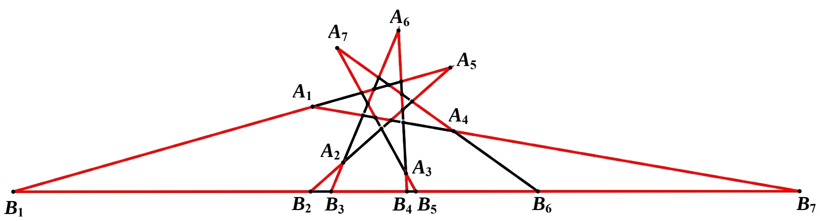


当 $m=n$ 时, 先作直线 l 平行于 $l_{\frac{n}{2}+1}$, 且 $A_2\sim A_{\frac{n}{2}}$ 位于 l 与 $l_{\frac{n}{2}+1}$ 之间. 再将 l 逆时针旋转一个小角度得到直线 l_n.

设 $l_{\frac{n}{2}+1}$ 与 l_n 交于点 B_1, 再对 $2\le k\le\frac{n}{2}$, 设过 A_k 的两条直线交 l_n 于点 B_{2k-2},B_{2k-1}, 使得 $B_1,B_2,\cdots,B_{n-1}$ 在 l_n 上顺次排列.

在 $m=n-1$ 的基础上将 $A_kQ_{k-1,\frac{n}{2}+k},A_kQ_{k,\frac{n}{2}+k}(2\le k\le\frac{n}{2}-1)$ 及 $A_{\frac{n}{2}}Q_{\frac{n}{2}-1,1}$ 染黑, 将 $A_1B_1,B_{n-3}B_{n-1},B_{n-1}A_{\frac{n}{2}}$ 及 $B_{2k-3}B_{2k-2},A_kB_{2k-2},A_kB_{2k-1}(2\le k\le\frac{n}{2}-1)$ 染红.

此时红色线段即为满足要求的折线（不计最两端的线段）, 下图是 $m=8$ 时的例子:



综上, 所求为最小的正整数 n, 使得

$$n\left[\frac{n-1}{2}\right]+\frac{3+(-1)^n}{2}\ge k.$$

□

评注 人大附中杨元篪, 华南师范大学附属中学彭子晋, 天津市第一中学张航领, 江苏省锡山高级中学宣则宁等同学也给出了本题的正确解答.

第四题 求所有的函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 使得对任意实数 x,y, 均有

$$f(x^3)+f(y^3)=(f(x^2)-f(xy)+f(y^2))(f(x)+f(y)),$$

且 f 在 $(2,3)$ 上单调.

(上海中学学生 杨镇 供题)

解 (根据浙江学军文渊中学董镇宇同学的解答整理):

记原方程为 $P(x,y)$.

由 $P(0,0)$ 知 $f(0)=f(0)^2$, 所以 $f(0)=0$ 或 1.

由 $P(x,0)$ 知 $f(x^3)+f(0)=f(x^2)(f(x)+f(0))$; 由 $P(x,x)$ 知 $f(x^3)=f(x^2)f(x)$. 结合两式知 $f(0)=f(x^2)f(0)$.

情形 1 $f(0)=1$.

此时 $f(x^2)=1$, 所以 $f(x^3)=f(x)$, 且对任意 $x\geq 0$ 均有 $f(x)=1$. 代回原方程得, $f(x)+f(y)=(1-f(xy)+1)(f(x)+f(y))$, 即

$$(f(x)+f(y))(f(xy)-1)=0.$$

令 $x>0,y<0$ 得, $f(y)=-1$ 或 $f(xy)=1$.

若存在 $y<0$ 使 $f(y)\neq -1$, 则对任意 $x>0$ 均有 $f(xy)=1$. 由此知对任意 $y<0$ 均有 $f(y)=1$, 进而 $f(x)\equiv 1$.

若对任意 $y<0$ 均有 $f(y)=-1$, 则 $f(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0\\ -1, & x<0\end{cases}$.

情形 2 $f(0)=0$.

由 $f(x^3)=f(x^2)f(x)$ 知 $f(1)=f(1)^2$, 所以 $f(1)=0$ 或 1.

情形 2.1 $f(1)=0$ 时, 由 $P(x,1)$ 知

$$f(x^3)=(f(x^2)-f(x))f(x)=f(x^3)-f(x)^2,$$

所以 $f(x)^2=0$, 即 $f(x)\equiv 0$.

情形 2.2 $f(1)=1$ 时, 由 $P(x,1)$ 知

$$\begin{aligned}f(x^3)+1&=(f(x^2)-f(x)+1)(f(x)+1)\\&=f(x^3)+f(x^2)-f(x)^2+1,\end{aligned}$$

于是 $f(x^2)=f(x)^2$, 从而 $f(x^3)=f(x^2)f(x)=f(x)^3$, 且对任意 $x\geq 0$ 均有 $f(x)\geq 0$.

代回原方程得,

$$f(x)^3+f(y)^3=(f(x)^2-f(xy)+f(y)^2)(f(x)+f(y)),$$

即

$$(f(x)+f(y))(f(xy)-f(x)f(y))=0,$$

所以 $f(x)+f(y)=0$ 或 $f(xy)=f(x)f(y)$. $(*)$

因为 $f(x^2)=f(x)^2, f(x^3)=f(x)^3$, 所以由 $f(x)$ 在 $(2,3)$ 上单调, 知 $f(x)$ 在 $(4,9),(8,27),(16,81),\cdots$ 上均单调. 于是 $f(x)$ 在 $[5,25]$ 上单调, 进而 $f(x)$ 在 $[\sqrt{5},5]$, $[\sqrt[4]{5},\sqrt{5}],\cdots$ 上单调. 故 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调.

(1) 存在 $t>1$ 使 $f(t)=0$ 时, 由 f 在 $[1,+\infty)$ 上非负且单调, 知 $f(x)$ 在 $(1,t]$ 上恒为 0 或在 $[t,+\infty)$ 上恒为 0. 因为 $f(x^2)=f(x)^2$, 所以对任意 $x>1$ 均有 $f(x)=0$.

对 $0<x<1$, $f(\frac{1}{x})=0$. 由 $(*)$ 知 $f(x)+f(\frac{1}{x})=0$ 或 $f(x)f(\frac{1}{x})=f(1)=1$, 所以只能为前者且 $f(x)=0$.

在 $(*)$ 中令 $x<0,y>0,y\neq 1$ 得 $f(x)=0$ 或 $f(xy)=0$. 对任意 $x,z<0,x\neq z$, 若 $f(x)\neq 0$, 则 $f(z)=f(x\cdot\frac{z}{x})=0$. 故当 $x<0$ 时 $f(x)$ 至多有一个不为 0.

由 $f(-1)^2=f(1)=1$ 知 $f(-1)=\pm 1$, 所以 $f(x)=\begin{cases}\pm 1, & x=-1\\ 0, & x<0,x\neq -1\end{cases}$.

故 $f(x)=\begin{cases}1, & x=\pm 1\\ 0, & x\neq \pm 1\end{cases}$ 或 $f(x)=\begin{cases}1, & x=1\\ -1, & x=-1\\ 0, & x\neq\pm 1\end{cases}$.

(2) 对任意 $t>1$ 均有 $f(t)\neq 0$ 时, 对任意 $x,y>1$ 均有 $f(xy)=f(x)f(y)$.

令 $g(x)=\ln f(e^x), x>0$, 则 $g(x+y)=g(x)+g(y)$, 且由 f 单调知 g 单调. 由柯西方程的理论, 知存在实数 k 使 $g(x)=kx$, 于是 $f(x)=x^k, x>1$.

对 $0<x<1$, 由 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上非负及 $(*)$, 知 $f(x)f(\frac{1}{x})=f(1)=1$, 所以 $f(x)=x^k, 0<x<1$.

对 $x<0$, $f(x)^2=f(x^2)=x^{2k}$, 所以 $f(x)=|x|^k$ 或 $-|x|^k$.

若存在 $t,s<0$ 使 $f(t)<0, f(s)>0$, 则 $t\neq s$.

在 $(*)$ 中令 $x=t,y=s$, 由 $f(ts)>0>f(t)f(s)$ 知 $f(t)+f(s)=0$, 于是 $(-t)^k=(-s)^k$. 所以 $k=0$, 故当 $x>0$ 时 $f(x)=1$, 当 $x<0$ 时 $f(x)=\pm 1$.

在 $(*)$ 中令 $x<0,y>0$ 得 $f(x)=-1$ 或 $f(xy)=f(x)$. 注意 $f(s)=1$, 所以对任意 $y>0$ 有 $f(sy)=f(s)=1$, 特别取 $y=\frac{t}{s}$ 知 $f(t)=1$, 矛盾!

从而当 $x<0$ 时 $f(x)=|x|^k$ 或 $f(x)=-|x|^k$.

故 $f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ |x|^k, & x\neq 0\end{cases}$ 或 $f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ |x|^k, & x>0\\ -|x|^k, & x<0\end{cases}$.

综上, 所求 $f(x)$ 有 7 个: $f(x)\equiv 0$; $f(x)\equiv 1$; $f(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0\\ -1, & x<0\end{cases}$;

$f(x)=\begin{cases}1, & x=\pm 1\\ 0, & x\neq \pm 1\end{cases}$; $f(x)=\begin{cases}1, & x=1\\ -1, & x=-1\\ 0, & x\neq \pm 1\end{cases}$; $f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ |x|^k, & x\neq 0\end{cases}$ $(k\in\mathbb{R})$;

$f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ |x|^k, & x>0\\ -|x|^k, & x<0\end{cases}$ $(k\in\mathbb{R})$, 均容易验证满足原方程. □

评注 (1). 本题中的“单调”指的是不严格单调, 有同学只解决了严格单调的情形.

(2). 温州中学徐昊祁, 人大附中杨元篪、孟繁钰, 天津市第一中学张航领等同学也给出了本题的正确解答.