好题与妙解（三）

——2016 年新星五一班中的若干问题

冷岗松

本文将选择笔者为2016 年数学新星五一班所编的讲义“数学问题精选 30 例”中的若干问题进行评析.

题 1 (圣彼得堡, 2001) 设 $x_1,\ x_2,\cdots,x_{10}$ 是 $[0,\ \frac{\pi}{2}]$ 上的实数, 满足

$$\sin^2 x_1+\sin^2 x_2+\cdots+\sin^2 x_{10}=1.$$

证明: $3(\sin x_1+\sin x_2+\cdots+\sin x_{10})\le\cos x_1+\cos x_2+\cdots+\cos x_{10}$.

分析 本题并不容易入手. 思考的关键点应是怎样才能产生常数 3 (相关连的是常数 9). 这诱发我们用 Cauchy 不等式, 导出局部不等式来达到目的.

证明 对任意的正整数 $i(1\le i\le 10)$, 应用 Cauchy 不等式可得

$$\cos x_i=\sqrt{1-\sin^2 x_i}=\sqrt{\sum_{j\ne i}\sin^2 x_j}\ge\frac{1}{3}\sum_{j\ne i}\sin x_j.$$

因此

$$\sum_{i=1}^{10}\cos x_i\ge\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{10}\sum_{j\ne i}\sin x_j=3\left(\sum_{i=1}^{10}\sin x_i\right).$$

□

题 2 (白俄罗斯, 2003) 设 Q_1 是不小于 1 的有理数的集合, 函数 $f:\ Q_1\to\mathbf{R}$ 满足对任意 $x,\ y\in Q_1$, 均有

$$\mid f(x+y)-f(x)-f(y)\mid<a,$$

其中 a 为某个正实数. 证明: 存在实数 q 使得对所有 $x\in Q_1$, 均有

$$|\frac{f(x)}{x}-q|<2a.$$

收稿日期: 2016-05-22.

分析 先考虑 x 取正整数 n 的情况, 这时猜测 q 取第一个初始函数值 $f(1)$ 是自然的. 于是需要估计 $|f(n)-nf(1)|$, 这时应想到用差分方法, 把它用差分 $f((k+1)x)-f(kx)$ 来表示, 再联想到条件便可得到非常有用的差分估计式: $|f((k+1)x)-f(kx)-f(x)|<a$.

解 先证下面关键的引理.

引理 对任意正整数 n 及所有的 $x\in Q_1$ 有

$$|f(nx)-nf(x)|<(n-1)a. \tag{1}$$

事实上, 由条件可得

$$|f((k+1)x)-f(kx)-f(x)|<a,$$

因此

$$\begin{aligned}|f(nx)-nf(x)|&=\left|\sum_{k=1}^{n-1}\big(f((k+1)x)-f(kx)-f(x)\big)\right|\\&<\sum_{k=1}^{n-1}a=(n-1)a.\end{aligned}$$

回到原题. 在 (1) 中令 $x=1$, 可得

$$nf(1)-(n-1)a\le f(n)\le nf(1)+(n-1)a. \tag{2}$$

再在 (1) 中令 $x=\frac{m}{n}\ge 1$, 可得

$$nf\left(\frac{m}{n}\right)-(n-1)a\le f(m)\le nf\left(\frac{m}{n}\right)+(n-1)a. \tag{3}$$

结合 (2) 和 (3) 可得

$$mf(1)-(m+n-2)a\le nf\left(\frac{m}{n}\right)\le mf(1)+(m+n-2)a. \tag{4}$$

将 (4)两边同除以 m, 并令 $x=\frac{m}{n}$, $q=f(1)$, 则有

$$\left|\frac{f(x)}{x}-q\right|\le\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{m}\right)a<\left(1+\frac{1}{x}\right)a\le 2a.$$

□

题 3 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是实数, 记 $m_{ij}=x_j-x_i$, $1\le i<j\le n$. 证明:

$$\sum_{1\le i<j\le n}m_{ij}(1-m_{ij})\le\frac{n^2-1}{12}.$$

这个问题是笔者提供给 2012 年国家集训队选拔考试的预选题.

分析 注意到不等式的左边以差的形式出现, 因此它是关于平移变换不变

的, 即将所有的 x_i 用 x_i+t (t 是某个实数) 来替代, 不等式不变. 故我们可设 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i=0$. 这称作为“归零”. 本题的一个关键技巧是主动用归零等式消去表达式中的二次混合项.

证明 注意到不等式是在变元的平移变换下不变的, 因此不妨设

$$\sum_{i=1}^{n} x_i=0, \tag{1}$$

否则可将所有的 x_i 用 $x_i-\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ 来替代. 这样, 由 (1) 可得

$$\begin{aligned}
\sum_{1\le i<j\le n} m_{ij}(1-m_{ij}) &= \sum_{1\le i<j\le n} m_{ij}(1-m_{ij})-\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(2i-n-1)x_i-n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(-n\left(x_i-\frac{2i-n-1}{2n}\right)^2+\frac{(2i-n-1)^2}{4n}\right) \\
&\le \sum_{i=1}^{n}\frac{(2i-n-1)^2}{4n}=\frac{n^2-1}{12}.
\end{aligned}$$

□

题 4 (Murray Klamkin, **Crux Math.**) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$($n\ge 3$) 是非负实数, 满足 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$. 求

$$F=x_1^2x_2+x_2^2x_3+\cdots+x_n^2x_1$$

的最大值.

分析 首先我们来猜测可能的最大值点. 当 $n=3$ 时, 可能的最大值点应当是三个: $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$, $(1,0,0)$, $(\frac{2}{3},\frac{1}{3},0)$. 通过尝试易发现在第三个处的值大, 应该是最大值点. 这样对一般的 n, 我们自然猜测 F 的最大值点是$(\frac{2}{3},\frac{1}{3},0,\cdots,0)$ 或它的任意一个轮换, 对应的最大值是 $\frac{4}{27}$.

现在尝试用归纳法证明. 有两点值得注意: 其一, 这里的表达式是轮换对称的, 因此不能将所有变元排序, 但可用优化假设, 即设定最大变元; 其二, 因为可能取最大值的点在边界上, 肯定要有“调整”的想法.

本题的真正难点是 $n=3$ 的证明, 既要又调整的想法,又要思考怎样“弃项”将问题简化.

解 我们仅须证明 $F\le\frac{4}{27}$.

先考虑 $n=3$ 的情况. 为简单起见, 将这种情况用引理表述.

引理 设 a,b,c是非负实数,使得 $a+b+c=1$, 则

$$a^2b+b^2c+c^2a\le\frac{4}{27}.$$

事实上, 不妨设 $a=\max(a,b,c)$, 注意到 $(a+\frac{c}{2})+(b+\frac{c}{2})=1$, 我们希望证明下面的不等式

$$a^2b+b^2c+c^2a\le\left(a+\frac{c}{2}\right)^2\left(b+\frac{c}{2}\right). \tag{1}$$

事实上, (1) 可由两个明显的不等式 $abc\ge b^2c$ 及 $\frac{a^2c}{2}\ge\frac{c^2a}{2}$ 立即推出.

又由算术－几何平均值不等式有

$$\left(\frac{a+\frac{c}{2}}{2}\right)^2\left(b+\frac{c}{2}\right)\le\frac{1}{27}\left(\frac{a+\frac{c}{2}}{2}+\frac{a+\frac{c}{2}}{2}+b+\frac{c}{2}\right)^3=\frac{1}{27}. \tag{2}$$

结合(1) 和(2) 立得引理中要证的不等式.

回到原题.

对 n 用归纳法. 由引理知 $n=3$ 结论成立. 假设结论对 $n-1$ 成立, 现考虑 n的情况. 不妨设 $x_3=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, 则

$$x_1^2x_2+x_2^2x_3+\cdots+x_n^2x_1\le(x_1+x_2)^2x_3+x_3^2x_4+\cdots+x_n^2(x_1+x_2). \tag{3}$$

再对 $x_1+x_2,x_3,\cdots,x_n$ 用归纳假设有

$$(x_1+x_2)^2x_3+x_3^2x_4+\cdots+x_n^2(x_1+x_2)\le\frac{4}{27}. \tag{4}$$

结合(3) 和(4) 立得结论对 n 成立.

另一方面, 取 $(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},0,\cdots,0)$, 得 $F=\frac{4}{27}$. 故 F 的最大值为 $\frac{4}{27}$. □

题 5 (台湾 TST, 2005) 求所有正整数 $n\ge3$ 使得对于任意 n 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$, 存在一个正整数 M_n, 满足不等式

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{\sqrt[n]{a_1\,a_2\,\cdots\,a_n}}\le M_n\left(\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_3}{a_2}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n-1}}+\frac{a_1}{a_n}\right).$$

分析 取一个好的试验序列是解决本题的关键. 等比序列 $\{k,\ k^2,\cdots,k^n\}$ 是一个最佳的选择, 这是因为当 n 较大时, 左边是变化是“快速”的 (即非线性的), 而右边几乎是线性的, 这样满足要求的正整数 M_n不可能存在.

解 先证明当 $n\ge4$ 时, 满足要求的正整数 M_n 不存在. 若不然, 在题中的不等式中, 取 $a_1=k,\ a_2=k^2,\cdots,a_n=k^n$ 可得

$$\frac{k+k^2+\cdots+k^n}{\sqrt[n]{k\,k^2\,\cdots\,k^n}}\le M_n\left((n-1)k+\frac{1}{k^{n-2}}\right). \tag{1}$$

而注意到

$$\frac{k+k^2+\cdots+k^n}{\sqrt[n]{k\,k^2\,\cdots\,k^n}} > \frac{k^n}{k^{\frac{n+1}{2}}} = k^{\frac{n-1}{2}},$$

这样由 (1) 可得

$$k^{\frac{n-3}{2}} \le M_n\left((n-1)+\frac{1}{k^{n-1}}\right). \tag{2}$$

注意到 $n \ge 4$, 在 (2) 中令 $k \to +\infty$, 便知左边趋向于无穷大, 而右边趋向于 $M_n(n-1)$, 矛盾!

再证明当 $n=3$ 时, 满足要求的正整数 M_3 存在, 如 $M_3=3$ 就满足要求.

对任意的正实数 a_1, a_2, a_3, 记

$$M = \frac{a_2}{a_1}+\frac{a_3}{a_2}+\frac{a_1}{a_3},$$

则由 $\frac{a_2}{a_1}$, $\frac{a_3}{a_2}$, $\frac{a_1}{a_3}$ 均小于M, 可得

$$a_2 > \frac{1}{M}a_3,\ \ a_1 > \frac{1}{M}a_2 > \frac{1}{M^2}a_3. \tag{3}$$

不妨设 $a_3=\max(a_1,a_2,a_3)$, 则由 (3) 可得

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{\sqrt[3]{a_1\ a_2\ a_3}} < \frac{3a_3}{\sqrt[3]{\frac{1}{M^2}a_3\ \cdot \frac{1}{M}a_3 \cdot\ a_3}} = 3M,$$

这就是所要证明的.

综上, 所求的 $n=3$. □

题 6 求最小的实数 λ, 使得对任意的三个复数 z_1, z_2, $z_3 \in \{z\in\mathbb{C}||z|<1\}$, 若 $z_1+z_2+z_3=0$, 则

$$|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|^2+|z_1z_2z_3|^2<\lambda.$$

这个问题是 2016 年国家集训队的测试试题, 系笔者提供.

解 1 不妨设 $|z_1|=\max\{|z_1|,|z_2|,|z_3|\}>0$. 记 $u=\frac{z_2}{z_1}$, $v=\frac{z_3}{z_1}$, 则

$$|u|\le 1,\ \ |v|\le 1,\ \ u+v=-1. \tag{1}$$

由 (1) 知 u, v 的实部均在区间 $[-1,0]$中, 且和为-1, 故不妨设 $u=-a+bi$, 其中 $0\le a\le \frac{1}{2}$, $b\in\mathbb{R}$, 则 $v=-1+a-bi$. 再由 $|v|\le 1$ 知

$$b^2 \le 2a-a^2 \tag{2}$$

由计算易知

$$uv = x+yi,$$

其中 $x=a(1-a)+b^2$, $y=b(2a-1)$. 因此

$$\begin{aligned}
&|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|^2+|z_1z_2z_3|^2\\
&=|z_1|^4\cdot|u+uv+v|^2+|z_1|^6\cdot|uv|^2\\
&<|u+uv+v|^2+|uv|^2\\
&=|-1+x+yi|^2+|x+yi|^2=2(x^2+y^2-x)+1\\
&=2\left((a(1-a)+b^2)^2-a(1-a)-b^2+b^2(2a^2-1)^2\right)+1\\
&=2\left((b^2-a(1-a))^2-a(1-a)\right)+1. \qquad (3)
\end{aligned}$$

由 (2) 得, $-a\le b^2-a(1-a)\le a$, 并注意到 $0\le a\le \frac{1}{2}$, 可知

$$(b^2-a(1-a))^2\le a^2\le a(1-a). \qquad (4)$$

给合 (3) 和 (4) 可得

$$|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|^2+|z_1z_2z_3|^2<1.$$

这表明 λ 的最小值不超过 1.

另一方面, 对任意 $r(0<r<1)$, 取 $(z_1,z_2,z_3)=(r,-r,0)$, 可得 $\lambda>r^2$, 令 $r\to 1$, 可得 $\lambda\ge 1$.

故所求的最小正实数 λ 为 1. □

解 2 设 $a=|z_1|^2,\ b=|z_2|^2,\ c=|z_3|^2$, 则

$$\begin{aligned}
&|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|^2+|z_1z_2z_3|^2\\
&=(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)(\overline{z_1}\,\overline{z_2}+\overline{z_2}\,\overline{z_3}+\overline{z_3}\,\overline{z_1})+abc\\
&=ab+bc+ca+\sum|z_1|^2(z_2\overline{z_3}+z_3\overline{z_2})+abc\\
&=ab+bc+ca+\sum|z_1|^2(|z_2+z_3|^2-|z_2|^2-|z_3|^2)+abc\\
&=ab+bc+ca+\sum a(a-b-c)+abc\\
&=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac+abc\\
&=(a-1)(b-1)(c-1)+1<1
\end{aligned}$$

由上面不等式的最后一步可看出,当 a,b,c 中有一个趋于 1 时, 所研究的表达式趋于 1, 这说明常数 1 是最佳的. □

评注 解 1 的想法是先用最大模思想把三个变元问题转化成两个变元问题, 然后用条件设定好复变元的表达形式,从而将复变元问题转化成实变元问题进行计算. 解 2 是几位集训队队员的解法, 想法的关键是先研究所有变元

都是实数时, 应怎样来证明结论? 这样就可发现一个实数的恒等式, 复数情况本质上完全一样. 只是过程中要用上复数模的两个常用公式: $|z|^2 = z\overline{z}$ 及 $|z_1+z_2|^2 = |z_1|^2+|z_2|^2+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}$.

题 7 (Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu [1]) 设实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in (0,\ 1)$. 对 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的任意一个排列 σ, 证明:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-x_i} \geq \left(1+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-x_ix_{\sigma(i)}}\right).$$

分析 注意到右边的第一个和式可写为 $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(1+x_i)$, 自然联想到简单的关系式

$$\frac{1}{1-x_i} = (1+x_i)\cdot\frac{1}{1-x_i^2}$$

如果我们观察到 $\{1+x_i\}$ 和 $\{\frac{1}{1-x_i^2}\}$ 是两个同序的实数组, 便自然联想到切比雪夫不等式. 因此如果我们能证明

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-x_ix_{\sigma(i)}} \leq \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-x_i^2},$$

便可用切比雪夫不等式直达目标.

解 设 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的一个排列, 则由算术－几何平均值不等式并注意到一个十分常用的不等式 $\frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{4x}+\frac{1}{4y}$, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-x_iy_i} &\leq \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-\frac{x_i^2+y_i^2}{2}}\\ &= 2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-x_i^2+1-y_i^2}\\ &\leq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2(1-x_i^2)}+\frac{1}{2(1-y_i^2)}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-x_i^2}.\end{aligned}$$

因此, 要证本题的不等式, 我们仅须证明

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-x_i} \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(1+x_i)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-x_i^2}\right). \tag{1}$$

(1) 的证明是不难的. 事实上, 不妨设 $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq 1$ 则

$$1+x_1 \leq 1+x_2 \leq \cdots \leq 1+x_n,$$

且

$$\frac{1}{1-x_1^2} \le \frac{1}{1-x_2^2} \le \cdots \le \frac{1}{1-x_n^2}.$$

这样直接应用切比雪夫不等式便立得 (1). □

题 8 (M. Kurylo, **World Math.**) 设 $\{F_n\}$ 是一个 Fibonacci 数列: $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. 证明: 对任意 $x \in \mathbb{R}$, $n \ge 2$ 均有

$$\sum_{k=1}^{n} F_k |x-k| \ge F_{n+2} + F_n - n - 1.$$

首先, 我们有必要回忆一下分段线性函数 $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i|x-a_i|$ 的基本性质, 至少有两个结论是常用的:

1) 设 $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$, 函数 $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x-a_i|$, 则当 $n=2k+1$ 时, $f(x)$ 的最小值点为 a_{k+1}, 其最小值为 $\sum\limits_{i=k+2}^{n} a_i - \sum\limits_{i=1}^{k} a_i$; 当 $n=2k$ 时, 区间 $[a_k, a_{k+1}]$ 上的每一个点均为 $f(x)$ 的最小值点, 其最小值为 $\sum\limits_{i=k+1}^{n} a_i - \sum\limits_{i=1}^{k} a_i$.

2) 设 $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$, 而 k_1, $k_2, \cdots, k_n$ 都是正实数, 则函数 $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i|x-a_i|$ 的最小值在 $x = a_{i_0+1}$ 取到, 其中的 i_0 是满足

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_i \le k_{i+1} + k_{i+2} + \cdots + k_n$$

的最大正整数 i.

证明 由 Fibonacci 数列 $\{F_n\}$ 的一个著名性质

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$$

可得

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_{n-2} - F_{n-1} - F_n = -F_{n-1} - 1 < 0.$$

因此

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_{n-2} < F_{n-1} + F_n.$$

但显然

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_{n-2} + F_{n-1} > F_n.$$

故函数 $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} F_k|x-k|$ 的最小值为

$$f(n-1) = (n-2)F_1 + \cdots + F_{n-2} + F_n.$$

再用数学归纳法易证明

$$(n-2)F_1+\cdots+F_{n-2}+F_n=F_{n+2}+F_n-n-1.$$

这样便得到了我们要证的不等式. □

补注 上例用到了分段线性函数的基本性质 2). 这里再介绍基本性质 1)的一个应用.

例 设 $a_1,a_2,\cdots,a_{2n+1}$ $(n\geq 1)$ 是和为 0 的 $2n+1$ 个实数, y 是函数 $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{2n+1}|x-a_i|$ 的最小值点. 证明:

$$y\leq\frac{1}{2(n+1)}\sum_{i=1}^{2n+1}|a_i|.$$

证明 不妨设 $a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_{2n+1}$, 则 $y=a_{n+1}$. 因此, 我们仅须证明

$$a_{n+1}\leq\frac{1}{2(n+1)}\sum_{i=1}^{2n+1}|a_i|. \tag{1}$$

如果 $a_{n+1}\leq 0$, 则 (1) 显然成立. 因此不妨设

$$a_1\leq\cdots\leq a_k<0\leq a_{k+1}\leq\cdots\leq a_{n+1}\leq\cdots\leq a_{2n+1}.$$

这时由条件 $a_1+a_2+\cdots+a_{2n+1}=0$ 可得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2n+1}|a_i|&=-a_1-\cdots-a_k+a_{k+1}\cdots+a_{n+1}+\cdots+a_{2n+1}\\&=2(a_{k+1}\cdots+a_{n+1}+\cdots+a_{2n+1})\\&\geq 2(a_{n+1}+\cdots+a_{2n+1})\geq 2(n+1)a_{n+1}\end{aligned}$$

这就是要证的不等式 (1). □

题 9 (Gabriel Dospinescu [**1**]) 设 $n\geq 2$ 是整数, 求最大的正实数 m_n 和最小的正实数 M_n 使得对任何正实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 有

$$m_n\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_{i-1}+2(n-1)x_i+x_{i+1}}\leq M_n.$$

其中$x_0=x_n,\ x_{n+1}=x_1$.

分析 首先猜测 m_n 和 M_n 值及相应的可能极值点. 等变量的情况是优先考虑的: 当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时, 和式的值等于 $\frac{1}{2}$. 这是可能的最大值还是最小值呢? 再取 $n=3,\ x_1=x_2=1,x_3=0$. 这时和式的值是 $\frac{2}{5}<\frac{1}{2}$. 这说明等变量处可能取到最大值, 亦即猜测 $M_n=\frac{1}{2}$.

现在可能的最大下界自然应猜测在 $x_1=1, x_2=\varepsilon, \cdots, x_n=\varepsilon^{n-1}$ 当 $\varepsilon \to 0$ 时取得, 这是因为 $(1,\varepsilon,\cdots,\varepsilon^{n-1}) \to (1,0,0,\cdots,0)$, 而后者是一个特殊的边界点一顶点. 这样 m_n的值就可能等于 $\frac{1}{2(n-1)}$.

解 记 $S=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_{i-1}+2(n-1)x_i+x_{i+1}}$. 整个解答过程分两部分:

1) 先证明 S 的最优下界是 $\frac{1}{2(n-1)}$.

事实上,注意到下面显然的不等式

$$x_{i-1}+2(n-1)x_i+x_{i+1} \le 2(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right), i=1,2,\cdots,n.$$

我们有

$$S \ge \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{2(n-1)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)}=\frac{1}{2(n-1)}.$$

另一方面, 取 $x_1=1, x_2=\varepsilon, \cdots, x_n=\varepsilon^{n-1}$, 这时 S 的值等于

$$\frac{1}{\varepsilon^{n-1}+2(n-1)+\varepsilon}+\frac{(n-2)\varepsilon}{1+2(n-1)\varepsilon+\varepsilon^2}+\frac{\varepsilon^{n-1}}{\varepsilon^{n-2}+2(n-1)\varepsilon^{n-1}+1}.$$

再令 $\varepsilon \to 0$, 则 $S \to \frac{1}{2(n-1)}$.

这就说明了$\frac{1}{2(n-1)}$ 是 S 的最大下界, 即 $m_n=\frac{1}{2(n-1)}$.

2) 再证明 S 的最大值是 $\frac{1}{2}$.

为此需要一个引理:

引理 (罗马尼亚TST, 1999) 设正实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足 $a_1a_2\cdots a_n=1$, 则

$$\frac{1}{n-1+a_1}+\frac{1}{n-1+a_2}+\cdots+\frac{1}{n-1+a_n} \le 1.$$

引理证明 记 $r=1-\frac{1}{n}$. 由算术—几何平均值不等式和条件可得

$$a_1^r+\cdots+a_{i-1}^r+a_{i+1}^r+\cdots+a_n^r \ge (n-1)a_i^{-\frac{1}{n}}.$$

因此

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{n-1+a_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^r}{(n-1)a_i^{-\frac{1}{n}}+a_i^r} \ge \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^r}{a_1^r+a_2^r+\cdots+a_n^r}=1.$$

这等价于引理中要证的不等式.

回到原题. 记 $a_i=\frac{\sqrt{x_{i-1}\cdots x_{i+1}}}{x_i}$, 则 $a_1a_2\cdots a_n=1$.

这时由引理便得

$$2S \le \sum_{i=1}^{n}\frac{2x_i}{2\sqrt{x_{i-1}\cdot x_{i+1}}+2(n-1)x_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-1+a_i} \le 1.$$

故 $S\le\frac{1}{2}$. 又当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时, $S=\frac{1}{2}$. 所以 $M_n=\frac{1}{2}$. $\square$

题 10 (**Kober 不等式**) 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是正实数, 证明:

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n}a_i^2+n(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{2}{n}}\ge\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2.$$

分析 直觉告诉我们 $(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{2}{n}}$ 最不易处理, 于是我们就用齐次性把它"隐"去, 可设 $a_1a_2\cdots a_n=1$. 再注意到本问题取等号条件并不唯一, 如当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 或其中有一个为 0,其余 $n-1$ 个均相等时等号成立. 这时宜用调整法. 一种非常合理的调整策略是: 设定最小变元, 把其它元都调为相等. 由于调整过程需要若干步, 因此结合用归纳法可使问题大大简化.

解 1 由齐次性,不妨设 $a_1a_2\cdots a_n=1$. 这时要证不等式转化为

$$f(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2-(n-1)\sum_{i=1}^{n}a_i^2-n\le 0.$$

现对 n 用归纳法.

当 $n=1,2$ 时, 结论显然成立.

假设结论对 $n-1$ 成立, 下证结论对 n 成立.

不妨设 $a_1=\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$, 并记 $G=\sqrt[n-1]{a_2\cdots a_n}$. 这时要证

$$f(a_1,a_2,\cdots,a_n)\le 0.$$

我们只须证明

$$f(a_1,a_2,\cdots,a_n)\le f(a_1,G,\cdots,G),\tag{1}$$

和

$$f(a_1,G,\cdots,G)\le 0.\tag{2}$$

先证 (1): 易知 (1) 可等价写为

$$(n-1)\sum_{i=2}^{n}a_i^2-\left(\sum_{i=2}^{n}a_i\right)^2\ge 2a_1\left(\sum_{i=2}^{n}a_i-(n-1)G\right).\tag{3}$$

注意到

$$a_1\le G,\ \ \sum_{i=2}^{n}a_i\ge(n-1)G,$$

要证 (3), 我们仅须证明

$$(n-1)\sum_{i=2}^{n}a_i^2-\left(\sum_{i=2}^{n}a_i\right)^2\ge 2G\left(\sum_{i=2}^{n}a_i-(n-1)G\right).\tag{4}$$

由于 (4) 关于 $a_2, \cdots, a_n$ 是齐次的, 因此不妨设 $G=1$.

这时要证不等式 (4) 就等价于

$$(n-2)\sum_{i=2}^{n} a_i^2-\left(\sum_{i=2}^{n} a_i\right)^2+(n-1) \geq 2\sum_{i=2}^{n} a_i-\sum_{i=2}^{n} a_i^2-(n-1). \tag{5}$$

现对 $a_2, \cdots, a_n$ 用归纳假设知 (5) 的左边大于等于 0, 故要证 (5), 我们只须证明

$$2\sum_{i=2}^{n} a_i-\sum_{i=2}^{n} a_i^2-(n-1) \leq 0.$$

这等价于

$$\sum_{i=2}^{n}(a_i-1)^2 \geq 0.$$

它是显然成立的,故 (1) 得证.

再证 (2):

因为 $a_1a_2\cdots a_n=1$, 所以 $a_1=\frac{1}{G^{n-1}}$. 这时易知 (2) 等价于

$$\frac{n-2}{G^{2n-2}}+n \geq \frac{2n-2}{G^{n-2}}. \tag{6}$$

事实上, 由算术－几何平均值不等式, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{n-2}{G^{2n-2}}+n&=\underbrace{\frac{1}{G^{2n-2}}+\cdots+\frac{1}{G^{2n-2}}}_{n-2}+\underbrace{1+\cdots+1}_{n}\\&\geq (2n-2)\sqrt[2n-2]{\left(\frac{1}{G^{2n-2}}\right)^{n-2}\cdot 1^n}=\frac{2n-2}{G^{n-2}}\end{aligned}$$

(6) 得证, 从而 (2) 得证. □

解 2 (饶家鼎) 由齐次性,不妨设 $a_1a_2\cdots a_n=1$. 这时要证不等式转化为

$$g(a_1, a_2, \cdots, a_n)=(n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i^2+n-\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \geq 0.$$

现对 n 用归纳法.

当 $n=1,2$ 时, 结论显然成立.

假设结论对 $n-1$ 成立, 下证结论对 n 成立. 不妨设 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$.

若 $a_n \geq 1$, 则必有 $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$. 此时结论显然成立. 下面只须考虑 $a_n<1$ 的情况.

a) 若 $a_{n-1} \geq 1$, 则 $a_i \geq 1,\ \ i=1,2,\cdots,n-1$.

由 Cauchy 不等式可得

$$(n-1)(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2) \geq (a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})^2.$$

这时要证结论对 n成立, 只须证明:

$$\frac{n-2}{2}a_n^2+\frac{n}{2}\geq a_n(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}). \tag{6}$$

事实上, 由广义贝努里不等式有

$$a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}\leq a_1a_2\cdots a_{n-1}+n-2=\frac{1}{a_n}+n-2.$$

故

$$\begin{aligned}a_n(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})&\leq 1+(n-2)a_n\\&\leq 1+\frac{n-2}{2}(a_n^2+1)\\&=\frac{n-2}{2}a_n^2+\frac{n}{2},\end{aligned}$$

(6) 得证.

b) 若 $a_{n-1}<1$, 我们断言下面两个不等式 (7) 和 (8) 至少有一个成立.

$$g(a_1,a_2,\cdots,a_n)\geq g(a_1a_n,a_2,\cdots,a_{n-1},1); \tag{7}$$

$$g(a_1,a_2,\cdots,a_n)\geq g(a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}a_n,1). \tag{8}$$

事实上, (7) 等价于

$$(n-1)(1-a_1^2)(1-a_n^2)\leq(1-a_1)(1-a_n)\left\{(1+a_1)(1+a_n)+2(S-a_1-a_n)\right\}, \tag{9}$$

其中 $S=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$.

注意到 $a_1\geq 1\geq a_n$, 化简 (9) 知 (7) 等价于

$$\frac{n-2}{2}(1+a_1)(1+a_n)+a_1+a_n\geq S. \tag{10}$$

同理 (8) 等价于

$$\frac{n-2}{2}(1+a_{n-1})(1+a_n)+a_{n-1}+a_n\leq S. \tag{11}$$

因 (10) 式左边显然不小于 (11) 式左边, 故 (10) 和 (11) 中至少有一个成立, 这也证明了 (7) 和 (8) 中至少有一个成立.

由 (7) 和 (8) 中至少有一个成立, 说明存在乘积为 1 的 $n-1$ 个正实数 $b_1,b_2,\cdots,b_{n-1}$ 使得

$$g(a_1,a_2,\cdots,a_n)\geq g(b_1,b_2,\cdots,b_{n-1},1).$$

现在我们只须证明 $g(b_1,b_2,\cdots,b_{n-1},1)\geq 0$, 亦即

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n-1}b_i^2+2n-1\geq\left(\sum_{i=1}^{n-1}b_i+1\right)^2. \tag{12}$$

而由归纳假设, 我们有

$$(n-2)\sum_{i=1}^{n-1} b_i^2 + n - 1 \geq \left(\sum_{i=1}^{n-1} b_i\right)^2. \tag{13}$$

这样要证 (12), 只须证明

$$\sum_{i=1}^{n-1} b_i^2 + n - 1 \geq 2\sum_{i=1}^{n-1} b_i,$$

这等价于 $\sum\limits_{i=1}^{n-1}(b_i-1)^2 \geq 0$, 显然成立. 故 (12) 成立.

综上, 说明结论对 n 成立. □

补注 本题中的不等式有些文献上又叫 Turkevici 不等式. 我们这里之所以叫它 Kober 不等式, 一方面是沿用《解析不等式》(D.S. 密特利诺维奇著, 中译本, 科学出版社, 1987) 一书的叫法, 另一方面是注意到 Kober 在他的那篇文章 (刊于 Proc. Amer. Math. Soc. 9, 1958) 中提出了算术－几何平均值不等式的一个加强形式 (本题的等价形式), 近期被应用到高维几何不等式的稳定性研究中.

Kober 不等式的一个推广是下面的 Surányi 不等式:

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是正实数, 则

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i^n + n\prod_{i=1}^{n} a_i \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{n-1}\right).$$

最近, M.Bencze 进一步把 Surányi 不等式不等式推广到了凸函数, 他的结果可表述为:

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是区间 I 上的正实数, f 和 f' 都是 I 上的凸函数, 则

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n} f(a_i) + nf\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \geq \sum_{1\leq i,j\leq n} f\left(\frac{(n-1)a_i + a_j}{n}\right).$$

下面来看一些组合问题.

题 11 (环球城市联赛, 2015) 现有 15 个和为 0 的的整数, 其中至多有一个为 0. 现在一张纸上写出这些数的所有 7 元子集的元素和, 另一张纸上写出所有 8 元子集的元素之和. 问两张纸上写出的和数整体是否可能完全相同, 包括各数的出现次数?

分析和解 考虑一般的元素之和为 0 的 $2n+1$ 元集合 X, 它的所有 n 元子集构成的集族记为 F_1, 它的所有 $n+1$元子集构成的集族记为 F_2. 对任意一

个 n元子集 $A \in F_1$, A 的补集 $X \setminus A \in F_2$, A 的所有元素之和与补集 $X \setminus A$ 的元素之和为 0.

因此我们取 X 是关于原点对称的集合 (即 $X = -X$), 则 $-(X \setminus A)$ 仍然属于 F_2, 且 A 和 $-(X \setminus A)$ 的元素之和相等. 这样映射 $A \to -(X \setminus A)$ 是 F_1 和 F_2 上的一个一一映射, 从而两组和数完全相同. □

题 12 (匈牙利, 2011) 凸 2011 边形满足任意四点不共圆,过每三个顶点作一个圆. 若多边形有在圆外的顶点, 则称此圆为"瘦的", 反之, 则称为"胖的". 问胖圆和瘦圆哪个多?

分析和解 对这 2011 个顶点中的任意四点 A, B, C, D. 不妨设

$$\angle A + \angle C < 180^\circ.$$

这时, 点 C 在 $\triangle ABD$ 的外接圆外, 而点 A 在 $\triangle BCD$ 的外接圆外. 这说明由 A, B, C, D. 确定的 4 个圆中至少有 2 个瘦圆. 故瘦圆个数不小于胖圆个数.

下面进一步证明瘦圆个数不等于胖圆个数.

若瘦圆个数等于胖圆个数, 记为 a. 由于这 2011 个顶点可确定 C_{2011}^4 个四点组, 从而可确定 $4\mathrm{C}_{2011}^4$ 个圆, 而任何一个三点组确定的圆出现在 $2011-3=2008$ 个四点组中, 故

$$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\mathrm{C}_{2011}^4}{2008}.$$

但这不是整数, 矛盾!

综上便知瘦圆数大于胖圆数. □

题 13 设整数 $n \geq 2$, $X = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, 其中 a_i 是正整数,且 $a_i \geq n, i = 1, 2, \cdots, n+1$. 证明: 存在 $1 \leq i \neq j \leq n+1$ 使得 $[a_i,\ a_j] > n^2$.

分析 要证一个存在性的不等式, 想到用抽屉原理. 但 a_i 是无界的, 因此取倒数, 这时 $\frac{1}{a_i}$变成有界量了, 从而方便构造抽屉.

证明 不妨设 $a_1 > a_2 > \cdots > a_{n+1} \geq n$, 则

$$0 < \frac{1}{a_1} \leq \frac{1}{a_i} \leq \frac{1}{n},\ \ i = 1, 2, \cdots, n+1.$$

现将区间 $[\frac{1}{a_1}, \frac{1}{n}]$ 等分成 n 个小区间, 则每个小区间的长度小于 $\frac{1}{n^2}$.

如果存在 a_i $(2 \leq i \leq n+1)$ 使得 $\frac{1}{a_i}$ 落在第一个小区间内, 则有

$$0 < \frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_1} < \frac{1}{n^2}.$$

如果所有 $a_i\ (2\le i\le n+1)$ 使得 $\frac{1}{a_i}$ 均不落在第一个小区间内, 则由抽屉原理知存在 $2\le i<j\le n+1$, 使得

$$0<\frac{1}{a_j}-\frac{1}{a_i}<\frac{1}{n^2}.$$

这样, 不管是哪种情况, 总存在 $1\le i<j\le n+1$, 使得

$$0<\frac{1}{a_j}-\frac{1}{a_i}<\frac{1}{n^2}. \tag{1}$$

因为对任意正整数 a,b 有 $ab=(a,b)[a,b]$, 故由 (1) 可得

$$0<\frac{\frac{a_i-a_j}{(a_i,\ a_j)}}{[a_i,\ a_j]}<\frac{1}{n^2}. \tag{2}$$

又注意到 $\frac{a_i-a_j}{(a_i,\ a_j)}$ 是正整数, 故由 (2) 立得 $[a_i,\ a_j]>n^2$. □

题 14 (全苏联冬令营, 1987) 设 $\{a_n\}$ 是递增的正整数序列, $a_1=1$, 且对任意正整数 n 有 $a_{n+1}\le 2n$. 证明:任何不小于 2 的整数都可表示为 a_i+a_j 的形式,其中 i 可以等于 j.

分析 注意对递增 (这里均指严格递增) 的正整数序列 $\{a_n\}$, 若该序列中小于 k 的项数至多为 m 项,则 $a_{m+1}\ge k$. 这是整数离散性的一种表现.

证明 用反证法. 假设结论不成立, 则存在 $k>2$ 无法表为 a_i+a_j 的形式.

1) 当 k 为奇数时, 数对 $(1,k-1),(2,k-2),\cdots,(\frac{k-1}{2},\frac{k+1}{2})$ 的每一组数中, 都至多有一个在序列 $\{a_n\}$ 中, 故序列 $\{a_n\}$ 中小于 k 的至多有 $\frac{k-1}{2}$ 项.

2) 当 k 为偶数时, 数对 $(1,k-1),(2,k-2),\cdots,(\frac{k}{2}-1,\frac{k}{2}+1)$ 的每一组数中, 都至多有一个在序列 $\{a_n\}$ 中, 而 $\frac{k}{2}$ 也不能属于 $\{a_n\}$中. 故序列 $\{a_n\}$ 中小于 k 的至多有 $\frac{k}{2}-1$ 项.

综上, 序列 $\{a_n\}$ 中小于 k 的至多有 $\lfloor\frac{k-1}{2}\rfloor$ 项. 故

$$a_{\lfloor\frac{k-1}{2}\rfloor+1}\ge k.$$

但

$$a_{\lfloor\frac{k-1}{2}\rfloor+1}\le 2\left\lfloor\frac{k-1}{2}\right\rfloor\le k-1,$$

矛盾! 这说明对任何大于 2 的整数可表为 a_i+a_j 的形式, 又 $2=a_1+a_1$, 故对一切 $k\ge 2$ 的整数结论成立. □

题 15 (伊朗, 2012) 求所有正整数序列 $\{a_n\}$, 使得对任意 $i\le j$ 均有 $a_i\le a_j$ 且对任意的正整数 i,j, $i+j$ 的正因数个数与 a_i+a_j 的正因数的个数相等.

分析 很自然猜测自然数序列 n 是满足条件的唯一的序列. 注意到 $a_1 = 1$, 如果我们能证明 $\{a_n\}$ 严格递增且在一个无穷子序列上的每一个值等于下标的标号数, 则我们就证明了 $a_n = n$.

解 首先证明 $\{a_n\}$ 严格递增.

若不然, 假设存在正整数 i 使得 $a_i = a_{i+1}$. 取 $j = p - i$, 其中 p 是一个大于 $i+1$ 的素数. 这时由 $i+j$ 是素数知 $a_i + a_j$ 也是素数. 因为 $a_i = a_{i+1}$, 所以 $a_{i+1}+a_j$ 也是素数, 从而 $i+1+j$ 也是素数. 这样我们找到了相邻两整数 $i+j$ 和 $i+1+j$ 均是素数, 矛盾!

再证 $a_n = n$.

显然 $a_1 = 1$. 取 $i = j = 2^{p-2}$, 其中 p 是不小于 3 的素数, 则 $i+j = 2i = 2^{p-1}$ 的正因数的个数为 p. 故 $a_i + a_j = 2a_i$ 的正因数的个数也为 p. 这样, $2a_i$ 必须等于 2^{p-1}. 故 $a_{2^{p-2}} = 2^{p-2}$. 这说明两个严格递增的正整数序列 a_n 和 $\{n\}$ 的首项相等, 且在一个无穷子序列 $\{2^{p-2}\}$ 上的值对应相等. 故对所有正整数 n 均有 $a_n = n$. □

题 16 (全苏联国家队夏令营, 1985) 在无穷大方格纸上标出了 n 个方格,称两个方格为“相邻的”, 如果它们具有公共边或公共顶点. 证明: 可以从所标出的方格中挑选出 $k \geq \frac{n}{4}$ 个方格, 使得它们之中任何两个都不相邻.

证明 平面上的每个方格用整点 $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ 表示. 将平面上的整点分划成如下的四个集合:

$$A_{00} = \{(x,y) \mid x, y \equiv 0, \pmod 2\}$$
$$A_{10} = \{(x,y) \mid x \equiv 1,\ y \equiv 0 \pmod 2\}$$
$$A_{01} = \{(x,y) \mid x \equiv 0,\ y \equiv 1 \pmod 2\}$$
$$A_{11} = \{(x,y) \mid x, y \equiv 1 \pmod 2\},$$

则这四个集合中的每个集合中整点对应的方格两两不相邻.

设标出的方格集为 S, 则

$$\bigcup_{0\leq i,j\leq 1} (A_{ij} \cap S) = S.$$

故必有一个 A_{ij} $(i, j \in \{0, 1\}$ 使得

$$|A_{ij} \cap S| \geq \frac{|S|}{4} = \frac{n}{4}.$$

因此取 $A_{ij} \cap S$ 中的方格满足要求. $\square$

题 17 (塞尔维亚, 2012) 设 K 是平面直角坐标系上的整点集. 问: 是否存在双射 $f: \mathbb{N}^* \to K$, 使得对任意的 $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, 若 $(a, b, c) > 1$, 则 $f(a), f(b), f(c)$ 不共线?

本题要用整点集是一个可列集 (通俗地说,即可以用自然数来编号) 这一结论. 尽管它直观上是好理解的, 似乎还是有点超越中学生的知识范围. 幸好参加新星五一班的不少同学熟悉这个结论. 在这一结论的基础上, 我们通过归纳构造证明存在满足要求的双射.

分析和解 首先将平面上的整点编号, 记为 $K = \{A_1, A_2, \cdots\}$. 现要给出 $\mathbb{N}^*$ 到 K 的一个满足要求的一一映射, 本质上是要我们重新给出 K 的一个编号. 先摸索着前进. 当然取 $f(1) = A_1$, $f(2) = A_2$, $f(3) = A_3$, $f(4) = A_4$, $f(5) = A_5$.

但 $f(6)$ 呢? 因为 $(2, 4, 6) = 2$, 因此 $f(6)$ 不能在直线 A_2A_4 上, 这时我们取 $f(6)$ 为 K 中除去 $A_1 \sim A_5$ 且不在直线 A_2A_4 上的下标最小的A_j (事实上, 如果点 A_6 在直线 A_2A_4 上, 取 $f(6) = A_7$; 如果点 A_6 不在直线 A_2A_4 上, 仍取 $f(6) = A_6$).

再考虑 $f(7)$ 的值. 因 7 是素数, 这样我们取 $f(7)$ 为 K 中除去 $f(1) \sim f(6)$ 对应点的具有最小下标 j 的点 A_j.

现在一般的 $f(n)$ 的构造就不难了. 事实上, 假设 $f(1)$, $f(2), \cdots, f(n-1)$ 已被选定对应点, 则取 $f(n) = A_m$, 其中下标 m 为满足对任意 $i, j \le n$ 有 $(i, j, n) > 1$, 点 A_m 不在直线 $f(i)f(j)$ 上 (因这样的直线的条数有限, A_m 一定存在) 的所有下标中的最小者. 特别地, 对素数 p, $f(p)$ 对应着 K 中没有被选取的具有最小下标的整点.

显然, 这样构造的 f 确是 $\mathbb{N}^*$ 到 K 的一个满足条件的一一映射. $\square$

参考文献

[1] T. Andreescu, V. Cirtoaje, G. Dospinescu and M. Lascu, Old and New inequalities, GIL Publishing House, 2004.