第十六期问题征解解答与点评

牟晓生

第一题. 锐角 $\triangle ABC$ 的三条高分别为 AD, BE, CF, 垂心为 H. DE 交 CF 于 M, DF 交 BE 于 N. 过 A 作 MN 的垂线交 OH 于 K. 证明: $OA = 2KD$.

(广西南宁市第二中学学生 陈宝麟 供题)

证明 (根据东北师大附中郭鹏同学的解答整理):

我们取 K' 为 $\triangle ABC$ 的九点圆圆心. 熟知三角形外接圆半径为九点圆半径的两倍, 因此只要证明 $K' = K$. 令 O' 为 O 关于 BC 的对称点, 则 A, K', O' 三点共线. 设 MN 的延长线交 $\triangle ABC$ 的九点圆于 X, Y 两点, 则

$$XN \cdot NY = FN \cdot ND = BN \cdot NH.$$

因此 B, X, H, Y 共圆, 同理 C, X, H, Y 共圆. 所以 X, Y 都在 $\triangle BCH$ 的外接圆上, 而熟知这个圆的圆心是 O'. 由此我们得到 O' 在 XY 的中垂线上, 而由定义知 K' 也在 XY 的中垂线上. 于是 $O'K' \perp XY$, 也即 $AK' \perp MN$. 而 K, K' 都在 OH 上, 这就说明了 $K' = K$. $\square$

评注 东北师大附中于卓同学, 北师大二附中李泽宇同学, 吉林一中王巍翰同学, 湄潭求是高级中学孙运豪同学, 东营市第一中学张桐川同学, 武汉外国语学校张睿桐同学, 温州育英高级试验学校高敬翔同学, 长沙市长郡中学曾科荣同学, 重庆市巴蜀中学邹逸同学, 象山县第三中学黄子宸同学以及雅礼中学团队也给出了本题的正确解答.

第二题. 设 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 m 维整系数向量的数列. 证明存在正整数 N, 使得每个 A_n 都能表示为 $A_n = \sum\limits_{i=1}^{N} k_{n,i} \cdot A_i$ 的形式, 其中 $k_{n,i}$ 为整数.

(湖北武钢三中学生 王逸轩 供题)

证明 (根据湖南雅礼中学刘恺睿同学的解答整理):

我们对 m 归纳证明. 当 $m = 1$ 时 $\{A_n\}$ 即为整数列. 如果 A_n 恒为零则结

论显然. 否则不妨设 $A_1\neq 0$. 令 $d_n=\gcd(A_1,A_2,\ldots,A_n)$, 则是 $\{d_n\}$ 递减的正整数数列. 因此存在某个 N, 使得 $d_N=d_{N+1}=\cdots=d$. 由裴蜀定理, 存在整数 $t_1,t_2,\ldots,t_N$ 使得 $\sum\limits_{i=1}^{N}t_iA_i=d$. 因此对每个 n 我们有

$$A_n=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_n}{d}\cdot t_iA_i,$$

也就是说 $k_{n,i}=\frac{A_n}{d}\cdot t_i$ 满足条件.

假设命题对 m 成立, 考虑 $m+1$ 维的情况. 将 $\{A_n\}$ 中每一项的最后一维分量变为零, 得到新数列 $\{B_n\}$. 则由归纳假设, 存在 N_1 使得每个 B_n 可以写为 $B_n=\sum\limits_{i=1}^{N_1}k'_{n,i}B_i$. 现在令

$$C_n=A_n-\sum_{i=1}^{N_1}k'_{n,i}A_i=(A_n-B_n)-\sum_{i=1}^{N_1}k'_{n,i}(A_i-B_i).$$

于是 C_n 的前 m 维分量都是零. 由归纳假设, 存在 N_2 使得每个 C_n 可以写为 $C_n=\sum\limits_{i=1}^{N_2}k''_{n,i}C_i$. 所以

$$A_n=C_n+\sum_{i=1}^{N_1}k'_{n,i}A_i=\sum_{i=1}^{N_2}k''_{n,i}C_i+\sum_{i=1}^{N_1}k'_{n,i}A_i=\sum_{i=1}^{N_2}k''_{n,i}\sum_{j=1}^{N_1}(A_i-k'_{i,j}A_j)+\sum_{i=1}^{N_1}k'_{n,i}A_i.$$

这样我们就得到 A_n 是 $A_1,A_2,\ldots,A_N$ 的整系数线性和, 其中 $N=\max\{N_1,N_2\}$. 归纳成立! □

评注 (1). 雅礼中学刘哲成, 尹龙晖同学也给出了本题的正确解答.

(2). 本题的背景是有限维阿贝尔群的分类定理. 考虑任意有限个 (可重复) $\pm A_n$ 的和, 这些向量构成 $\mathbf{Z}^m$ 的一个子群, 因此其维数有限, 由分类定理知一定存在一组整基. 设 A_N 出现在这组整基中且具有最大的下标, 则 $A_1\sim A_N$ 也是一组整基, 即得本题结论.

第三题. 在 $n\times n$ 方格表的每个格中填入一个实数. 称 n 个不同行也不同列的格子为一个“好组”. 已知每个好组中 n 个数之和非负, 且每个格子都在至少一个和为零的好组中. 证明: 每个好组的数之和都是零.

(人大附中学生 欧阳铭晖 供题)

证明 (根据湖南雅礼中学刘恺睿同学的解答整理):

我们首先证明如下引理:

引理 假设从方格表中标记若干个格 (可以重复), 满足每行每列均有 k 个格被标记, 则所有标记的格可以被划分为 k 个“好组”.

引理的证明不难, 只需重复使用霍尔定理即可.

接下来我们用反证法, 假设存在某个好组 T_0 的元素和大于零.

对每个属于 T_0 的格子 x, 令 S_x 为包含 x 且和为零的一个好组, 然后我们将 S_x 中除去 x 的所有格子作上标记. 这样一来, 每一行每一列都恰有 $n-1$ 个格子被作上了标记, 于是由引理知它们可被分为 $n-1$ 个好组. 换而言之, 假设我们考虑 S_x 允许重复元素的并集 S, 则它可被划分为 n 个好组, 其中一个是 T_0. 因此 S 中所有格子上的数之和大于零. 但由我们的选择, 每个 S_x 中的数和为零, 这便导出了矛盾! $\square$

第四题. 设正整数 $n > 5$. 证明 $n!$ 不整除它的正约数之和.

(哈佛大学 牟晓生 供题)

证明 (**根据供题者的解答整理**):

假设 $n! \mid \sigma(n!)$, 我们将导出矛盾. 我们有

$$r \times n! = \sigma(n!) = \prod_p \frac{p^{v_p(n!)+1}-1}{p-1}. \tag{1}$$

这里我们约定 p 指代素数. 首先我们可以估计正整数 r 的大小:

$$r < \prod_{p \le n} \frac{p}{p-1} \le 2 \prod_{0<k<\frac{n}{2}} \frac{2k+1}{2k} < \frac{n}{2}, \forall n \ge 10.$$

因此 (1) 式左边不含有大于 n 的素因子, 并且不含有大于 $\frac{n}{2}$ 的素因子平方.

另一方面, (1) 式右边含有因子 $2^m - 1$, 其中 $m = v_2(n!) + 1 > \frac{n}{2}$. 为证明 (1) 式不可能成立, 我们只需下面的引理:

引理 设 $m > 12$ 是正整数, 则要么 $2^m - 1$ 含有大于 $2m$ 的素因子, 要么 $m+1$ 是素数且 $(m+1)^2 \mid 2^m - 1$.

由此引理和之前的分析, 我们知道 (1) 式在 $m > 12$ (即 $n > 15$)时不可能成立. 剩下检验 $6 \le n \le 15$ 是容易的.

引理的证明 考虑 m 阶分圆多项式 $\Phi_m(x) = \prod_{d|m}(x^d-1)^{\mu(\frac{m}{d})}$, 其中 μ 是 Mobius 函数. 熟知这是一个整系数多项式, 且 $\Phi_m(x) \mid x^m - 1$. 于是只要证明数 $\Phi_m(2)$ 含有一个大于 $2m$ 的素因子, 或者 $m+1$ 是素数且 $(m+1)^2 \mid \Phi_m(2)$. 令 q 是 $\Phi_m(2)$ 的任意一个素因子. 我们将证明如果 $q \nmid m$, 则 $q \equiv 1 \pmod m$; 而如果 $q \mid m$, 则 $q \,||\, \Phi_m(2)$.

为此, 设 k 是 2 模 q 的阶, 并设 $q^t \,||\, 2^k - 1$. 如果 $q \nmid m$, 则由 LTE 引理可知对任意 $d \mid m$, 我们有 $q \mid 2^d - 1$ 当且仅当 $k \mid d$, 而那时 $q^t \,||\, 2^d - 1$. 于

是 $\Phi_m(2)=\prod_{d|m}(2^d-1)^{\mu(\frac{m}{d})}$ 含 q 的幂次等于($m_1=\frac{m}{k}$, $d_1=\frac{d}{k}$):

$$t\sum_{d:k|d,d|m}\mu(\frac{m}{d})=t\sum_{d_1:d_1|m_1}\mu(\frac{m_1}{d_1}).$$

由假设 $q\mid\Phi_m(2)$, 故上面的和不为零. 因此只可能是 $m_1=1$, 即 $k=m$. 所以 2 模 q 的阶是 m, 导出 $q\equiv 1\pmod m$.

如果 $q\mid m$, 则显然 $k\le q-1<m$. 此时 LTE 引理告诉我们 $q\mid 2^d-1$ 当且仅当 $k\mid d$, 且 $q^{t+v_q(\frac{d}{k})}\,||\,2^d-1$. 于是类似的计算可得 $\Phi_m(2)$ 含 q 的幂次等于:

$$t\sum_{d_1:d_1|m_1}\mu(\frac{m_1}{d_1})+\sum_{d_1|m_1}v_q(d_1)\mu(\frac{m_1}{d_1})$$

这里前一项必然为零, 因为 $m_1=\frac{m}{k}>1$. 如果 $q\nmid m_1$, 后一项也为零. 如果 $q\mid m_1$ 而 m_1 还含有另外的素因子 r, 则后一项还是零. 这是因为所有使得 $\mu(\frac{m_1}{d_1})$ 非零的 d_1 可以被划分为两个一组, 每组中一个数是另一个数的 r 倍, 而这样的每一组对上面和的总贡献是零. 所以要使得 $q\mid\Phi_m(2)$, 只有可能 m_1 是 q 的幂次. 此时上面的和恰为1, 即 $q\,||\,\Phi_m(2)$.

至此我们完成了对数 $\Phi_m(2)$ 的素因子刻画. 由上面的结论, 我们可以写 $\Phi_m(2)=a\cdot b$, 其中 a 的素因子都是 m 的素因子, 且 a 无平方因子, 而 b 的素因子都模 m 余 1. 如果 $b>m+1$, 则引理自然成立. 于是只剩下 $\Phi_m(2)=ab\le a(m+1)\le m(m+1)$ 的特殊情况. 由于 $\Phi_m(2)\approx 2^{\phi(m)}$, 这种情况只在 m 较小时才可能发生. 严格来说, $\Phi_m(2)>2^{\phi(m)}\prod_{i=1}^{\infty}(1-\frac{1}{2^i})>0.288\cdot 2^{\phi(m)}$. 所以只有当 $m\le 36$ 时才可能有 $\Phi_m(2)\le m(m+1)$. 对这些 m 直接验证知引理成立, 命题得证! $\square$

评注 (1). 这道题的难点在于它用到的反向思维. 通常而言, 要证明 $n!\nmid\sigma(n!)$ 我们会考虑取某个小素数, 看它在 $\sigma(n!)$ 中出现的幂次是否能达到它在 $n!$ 中较高的幂次. 然而由于 $\sigma(n!)$ 有很多乘积项不好控制, 这个思路很难奏效. 上面的解答反其道而行之, 通过考虑 $\sigma(n!)$ 含有的较大素因子以及不等式估计证明无法整除.

(2). 我们用到的引理可以看作是 Zsigmondy 定理的一个量化加强. Zsigmondy 定理告诉我们除了几种特殊情况外, 数 a^m-b^m 一定含有一个本原素因子 (阶是 m). 后来许多学者研究 a^m-b^m 的最大素因子至少是多大. Schinzel 在 1962 年证明了除去几个特殊情况外, a^m-b^m 含有一个大于 $2m$ 的素因子, 因此我们引理结论的后半部分是多余的. 之后近五十年人们没能对一般的 m 给出更好的结论, 直到最近 Stewart 证明了 $m\exp(\frac{\log m}{104\log\log\log m})$ 的下界.

(3). 这道题的一个特殊情况出现在 2015 年西部数学竞赛的第 8 题. 那里假设了 n 为 2 的幂次, 于是 $m = v_2(n!) + 1 = n$ 也是 2 的幂次. 对于这样的 m, 我们的引理是很容易证明的.

(4). Erdös曾经提出一个相关的问题, 当 $n > 5$ 时一定有 $\tau(n!)|n!$, 其中 $\tau(\cdot)$ 表示正约数个数. 有兴趣的同学可以对此进行思考及拓展.