

数学新星问题征解

第十八期 (2016.12)

主持: 牟晓生

第一题. 证明: 从任意 9 个不同的实数中可以选出四个不同的 a, b, c, d , 满足

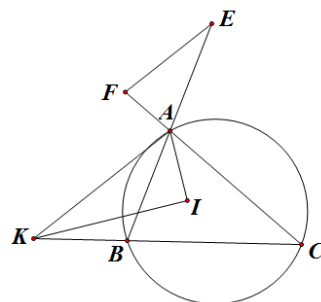
$$(ac + bd)^2 \geq \frac{5}{6}(a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$$

(华南师范大学中山附属中学 刘诗雄 供题)

第二题. 设 $p > 3$ 是素数. 证明: 组合数 $\binom{3n}{n}$ 遍历 $(\text{mod } p)$ 的完整剩余系.

(哈佛大学 牟晓生 供题)

第三题. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AC > AB$, 过内心 I 作 AI 的垂线交直线 BC 于 K . E, F 分别在 BA, CA 的延长线上, 使得 BE, CF 均等于 $\triangle ABC$ 的半周长. 证明: $EF \parallel AK$.



(广西钦州 卢圣 供题)

第四题. 给定正整数 $n > k \geq 2$. n 个小朋友坐成一圈, 他们每人都有 m 顶不同颜色的帽子. 求最小的 $m = f(n, k)$, 使得无论最初分发的帽子颜色如何, 都能让每个小朋友戴上一顶他的帽子, 并且任意连续 k 个小朋友的帽子颜色互不相同.

(哈佛大学 牟晓生 供题)