2023 年北大夏令营试题解答与评析

郭永涵

(浙江省温州中学, 325014)

指导教师: 邵达

2023 年 8 月 5 日和 6 日进行了两场考试, 每天上午各一场, 每场 4 小时 4 题. 试题第 1, 5, 7 题较简单, 第 3, 4, 6 题难度中等, 第 2, 8 题较困难. 试题整体思想性较强, 需要将问题想到位, 想清楚. 笔者水平有限, 解答如有不当之处, 敬请指正.

I. 试 题

1. 设奇数 $n>3$, 求证: $\frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{\sqrt{n}}$ 是无理数.

2. 对正整数 n, 用 $S(n)$ 表示 $0\sim n-1$ 在十进制中的数码和之和. 求证: 对任意正整数 m, n,

$$S(m+n)\geq S(m)+S(n)+\min\{m,\ n\}.$$

3. 在 $\triangle ABC$ 中, BC 是最长边. 设 AC 的中垂线与直线 BC、AB 分别交于点 D、E, B 关于此中垂线的对称点为 F. 设 AB 的中垂线与直线 BC、AC 分别交于点 J、K, C 关于此中垂线的对称点为 L. 设 BL、CF 交于点 N, $\triangle BJL$ 的外接圆与直线 JN 交于另一点 R, $\triangle CDF$ 的外接圆与直线 DN 交于另一点 Q. 过 N 作 BC 的平行线交直线 EK 于 P, 设 M 是 FL、BC 的交点, l 是 $\triangle ABC$ 外接圆平行于 BC 的直径, 求证: 直线 QR, MP, l 交于一点.

4. 将一个 2023×2023 方格表的每个格黑白染色, 满足每个 2×2 小正方形中均至少有一个黑格, 且每个黑格均在一个 2×2 小黑色正方形中. 记 a_i 为每行中黑格的个数, b_i 为每列中黑格的个数, 求 $\sum\limits_{i=1}^{2023}(a_i^2-b_i^2)$ 的最大值.

修订日期: **2023-10-07.**

5. 给定正整数 $n > m$. 求所有的数组 $(i_1,\ i_2, \cdots i_m)\ (1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_m \le n)$, 使得对任意满足 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0$ 的实数组 $(x_1,\ x_2, \cdots x_n)\ (x_1 < x_2 < \cdots < x_n)$, 都有 $\sum\limits_{k=1}^{m} x_{i_k} > 0$.

6. 是否存在质数 p 和非零整系数多项式 f, 使得对任意正整数 α, $\{1, 2, \cdots, p^\alpha\}$ 中至少有 $p^{\alpha-2023}$ 个正整数 n 使得 $p^\alpha \mid f(n)$?

7. 魔术师和小美在 $2N \times 2N$ 的方格表中放入 1×2 或 2×1 的骨牌. 魔术师先放入一些两两无公共格的骨牌, 满足对任意 $1 \le M \le 2N$, 方格表中每个 $M \times M$ 的正方形至多与 $\lceil \frac{M}{2} \rceil$ 个已放入的骨牌有公共格. 求证: 小美可以再放入骨牌恰覆盖方格表中余下的方格.

8. 设简单有向图 G 的顶点是 10×1000 (10 行1000 列) 的格点. G 的边满足: 除最后一列外, 每个顶点恰有三条有向边指向下一列的三个不同顶点; 除第一列外, 每个顶点恰有三条有向边被前一列的三个不同顶点指向; G 中无其他边. 对最后一列的每个顶点 v 赋予一个实数 $q_v \in [0, 1]$. 对其余每个顶点 u, 若从 u 出发指向 a, b, c, 则递归定义 $q_u = \frac{q_a+q_b+q_c}{3}$. 求证: $\sum\limits_{\overrightarrow{uv} \in E} |q_u - q_v| < 150$.

II. 解答与评注

题 1 设奇数 $n > 3$, 求证: $\frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{\sqrt{n}}$ 是无理数.

证明 1 用反证法, 若 $\frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{\sqrt{n}}$ 是有理数, 设为 $\frac{s}{r}$, 其中 r 为正整数. 则 $\cos \frac{s}{r}\pi = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\cos \frac{2s\pi}{r} = \frac{2-n}{n}$.

又由

$$\prod_{i=0}^{r}(x - \cos\frac{i\pi}{r}) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{2^r}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^r - \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^r\right],$$

且 $n > 2$, 得 $\frac{2-n}{n}$ 为 $\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^r - \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^r = 0$ 一根. 化简得

$$\sum_{i=1}^{[\frac{r+1}{2}]} \mathrm{C}_r^{2i-1} 2^{i-1} (2-n)^{r-2i+1} (2-2n)^{i-1} = 0,$$

模 n 并结合 $\sum\limits_{i=1}^{[\frac{r+1}{2}]} \mathrm{C}_r^{2i-1} = 2^{r-1}$, 可得 $n \mid 2^{2r}$, 与 n 为大于等于 3 的奇数矛盾! □

证明 2 用反证法, 若 $\frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{\sqrt{n}}$ 是有理数, 设为 $\frac{s}{r}$, 其中 r 为正整数, $(r, s) = 1$. 易得 $r > 1$. 则 $\cos \frac{s}{r}\pi = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\cos \frac{2s\pi}{r}\pi = \frac{2-n}{n}$.

记 $\cos \frac{2^k s\pi}{r} = \frac{p_k}{q_k}$, $k \ge 1$, $(p_k, q_k) = 1$, 且 $p_k \in \mathbb{Z}$, $q_k \in \mathbb{Z}^+$. 则 $\frac{2p_k^2 - q_k^2}{q_k^2} = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$.

归纳易证明 q_k 为奇数, 且 $q_{k+1}=q_k^2, p_{k+1}=2p_k^2-q_k^2$ ，也即说明这样的 p_k, q_k 存在且$\{q_k\}$ 单调递增.

只需注意到 $q_1=n$ 为奇数, $(2p_k^2-q_k^2,\ q_k^2)=1$.

由欧拉定理, 知有 $q_{\varphi(r)}=q_0$, 与 $\{q_k\}$ 单调递增矛盾. $\square$

评注 本题较为简单, 做法也较多, 法一引入切比雪夫多项式, 是考场上大多数同学的证法. 法二较为巧妙. 由法一可以看出 $2\cos\frac{p}{q}\pi$ 是代数整数, 故若其为有理数则必定为整数, 则 n 为奇数的条件可加强为 $n\neq 1,2,4$.

题 2 对正整数 n, 用 $S(n)$ 表示 $0\sim n-1$ 在十进制中的数码和之和. 求证: 对任意正整数 $m,\ n$,

$$S(m+n)\geq S(m)+S(n)+\min\{m,\ n\}.$$

证明 记 $s(k)$ 为 k 在十进制中数码和. 不妨设 $m\geq n$, 只需证明

$$\sum_{k=m}^{m+n-1} s(k)\geq \sum_{k=0}^{n-1}(s(k)+1).$$

对 n 归纳, $n=1$ 时成立.

若命题对小于 n 的数均成立, 设 $10^t\leq n<10^{t+1}$.

① $m+n-1<10^{t+1}$. 设 $m=l\cdot 10^t+r,\ 0\leq r<10^t$. 对 $m\leq k\leq m+n-1,\ s(k)\geq s\left(k-l\cdot 10^t\right)+1$. 有

$$\sum_{k=m}^{n+10^tl-1} s(k)\geq \sum_{k=m-10^tl}^{n-1}(s(k)+1).$$

又归纳假设有

$$\sum_{k=n+10^tl}^{m+n-1} s(k)\geq \sum_{k=0}^{m-10^tl-1}(s(k)+1),$$

两式相加即证.

② $m<10^{t+1},\ m+n-1\geq 10^{t+1}$. 有 $\sum\limits_{k=10^{t+1}}^{m+n-1} s(k)\geq \sum\limits_{k=0}^{m+n-1-10^{t+1}}(s(k)+1)$, 只需证

$$\sum_{k=m}^{10^{t+1}-1} s(k)\geq \sum_{k=m+n-10^{t+1}}^{n-1}(s(k)+1).$$

又 $x<10^{t+1}$ 时, $s(x)+s\left(10^{t+1}-1-x\right)=9(t+1)$. 只需证

$$\sum_{k=m}^{10^{t+1}-1}(9(t+1)-s(10^{t+1}-1-k))\geq \sum_{k=m+n-10^{t+1}}^{n-1}(9(t+1)-s(10^{t+1}-1-k)+1),$$

即 $\sum\limits_{k=0}^{10^{t+1}-1-m}(s(k)+1)\leq \sum\limits_{k=10^{t+1}-n}^{2\cdot 10^{t+1}-m-n-1} s(k)$, 化为归纳假设 $(10^{t+1}-m<n)$.

③ $m > 10^{t+1}$. 设 $m = l \cdot 10^{t+1} + r$, $0 \le r < 10^{t+1}$. 有

$$\sum_{k=m}^{m+n-1} s(k) \ge \sum_{k=m-l\cdot 10^{t+1}}^{m+n-1-l\cdot 10^{t+1}} (s(k)+1).$$

只需证

$$\sum_{k=m-l\cdot 10^{t+1}}^{m+n-1-l\cdot 10^{t+1}} s(k) \ge \sum_{k=0}^{n-1} s(k).$$

若 $m - l \cdot 10^{t+1} > n-1$, 化为更弱的 ①② 情形;

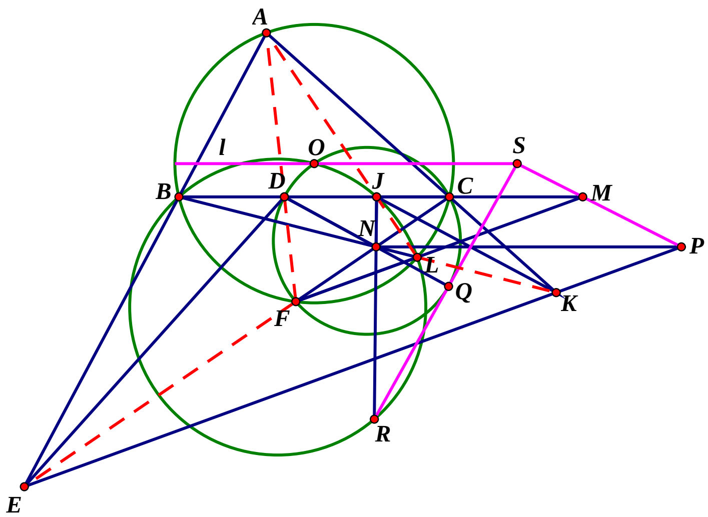
若 $m - l \cdot 10^{t+1} \le n-1$, 即

$$\sum_{k=n}^{m+n-1-l\cdot 10^{t+1}} s(k) \ge \sum_{k=0}^{m-l\cdot 10^{t+1}-1} s(k),$$

化为更弱的 n 更小情形. □

评注 本题较为复杂, 虽然入手点较多, 但无论是直接表示还是讨论进位次数最多的数都容易卡住. 关键的想法是把 $10^{t+1}-1-x$ 看作在退位上对应最佳, 从而走通归纳法. 除了此作法外, 还可以应用 $s(m)+s(n)-s(m+n)$ 用类似 Kummer 公式表示. 通过讨论进位次数来解决一部分 (m,n) 的情形 (①③), 其余的情况可用归纳法解决.

题 3 在 $\triangle ABC$ 中, BC 是最长边. 设 AC 的中垂线与直线 BC、AB 分别交于点 D、E, B 关于此中垂线的对称点为 F. 设 AB 的中垂线与直线 BC、AC 分别交于点 J、K, C 关于此中垂线的对称点为 L. 设 BL、CF 交于点 N, $\triangle BJL$ 的外接圆与直线 JN 交于另一点 R, $\triangle CDF$ 的外接圆与直线 DN 交于另一点 Q. 过 N 作 BC 的平行线交直线 EK 于 P, 设 M 是 FL、BC 的交点, l 是 $\triangle ABC$ 外接圆平行于 BC 的直径, 求证: 直线 QR, MP, l 交于一点.



证明 易证 AJL, BLK, CFE, ADF 共线, 设 O 为 DE 与 JK 交点, 则 O 是 $\triangle ABC$ 的外心.

由 $BJLR$, $CDFQ$, $BCLF$ 共圆, 有

$$RN\cdot NJ=BN\cdot NL=CN\cdot NF=DN\cdot NQ,$$

进而 $FRCJ$ 共圆.

由 $\angle FQD=\angle NCD=\angle FLN=\angle FRN$, 有 $FNLQR$ 共圆, 记为圆 1.

又由 $\angle BOC=2\angle A=180^\circ-\angle BEC=180^\circ-\angle BKC$, 有 $BOCKE$ 共圆, 记为圆 2.

由 $\angle NEK=\angle NBC=\angle NFL$ 得 $FL\parallel EK$.

再由 $\angle KNP=\angle KBC=\angle KEC=\angle LFN$, 得 PN 与圆 1 相切, 及 $PN^2=PK\cdot PE$.

再结合 $ML\cdot MF=MB\cdot MC$, 得 PM 为圆 1 与圆 2 的根轴.

设 PM 与 l 交于 S, 由 $\angle COS=\angle OCB=\angle OBC$, 得 SO 与圆 2 相切.

故 S 为圆 1, 圆 2, 点圆 O 的根心.

由 $\angle BOJ=180^\circ-\angle C=\angle BLJ$, $OBLJ$ 共圆, 进而 $OBLJR$ 共圆, 同理 $ODFCQ$ 共圆.

又 $DJQR$ 共圆, 得

$$\angle ORQ=\angle ORJ+\angle QRJ=\angle OBJ+\angle NDJ=\angle OCJ+\angle QOC=\angle QOS.$$

延长 SQ 与圆 1 交于 R', 由 S 在圆 1 和点圆 O 根轴上得: $SO^2=SQ\cdot SR'$. 故 $\angle OR'Q=\angle QOS=\angle ORQ$, $ORR'Q$ 共圆, 直线 SQ 与圆 1 交于 R', R, Q.

故 R' 与 R 重合, 即 SQR 共线. □

评注 本题是中等难度的几何题, 作图是一个难点. 从很多共圆可感觉到根轴根心的想法十分自然, 余下部分主要是倒角.

题 4 将一个 2023×2023 方格表的每个格黑白染色, 满足每个 2×2 小正方形中均至少有一个黑格, 且每个黑格均在一个 2×2 小黑色正方形中. 记 a_i 为每行中黑格的个数, b_i 为每列中黑格的个数, 求 $\sum\limits_{i=1}^{2023}(a_i^2-b_i^2)$ 的最大值.

解 答案为 $1348\times675\times2023=1840727700$,

构造为 $3k-1$, $3k$ 行均染黑 $(k=1,2,\ldots,674)$, 其余染白. 因为

$$\sum_{i=1}^{2023}a_i=\sum_{i=1}^{2023}b_i,$$

因此
$$\sum_{i=1}^{2023}\left(a_i^2-b_i^2\right)=\sum_{i=1}^{2023}\left(a_i+b_i-2696\right)\left(a_i-b_i\right)\leq\sum_{i=1}^{2023}\frac{1}{4}\left(2a_i-2696\right)^2.$$
只需
$$\sum_{i=1}^{2023}\left(a_i-1348\right)^2\leq 1348\cdot 675^2+675\cdot 1348^2.$$

又 $\left(a_{2023}-1348\right)^2\leq 1348^2$, 只需
$$\left(a_{3k-2}-1348\right)^2+\left(a_{3k-1}-1348\right)^2+\left(a_{3k}-1348\right)^2\leq 1348^2+675^2\cdot 2.$$

设第 $3k-1$ 行中某段连续黑格长为 l_1, 由每个黑格均在 2×2 黑色正方形中, 第 $3k-2$ 、第 $3k$ 行中与这一段同列的黑格总数 $\geq l_1$ 个.

设第 $3k-1$ 行中某段连续白格长为 l_2, 由每个 2×2 小正方形中均至少有一个黑格, 第 $3k-2$ 、第 $3k$ 行中与这一段同列黑格数各有 $\geq l_2-1$ 个.

若 $a_{3k-1}\geq$ 674, 由以上论述， $a_{3k-2}+a_{3k}\geq a_{3k-1}\geq 674$, 由 $a_i\in[0,2023]$ 及二次函数凸性,
$$\left(a_{3k-2}-1348\right)^2+\left(a_{3k}-1348\right)^2\leq 1348^2+675^2,$$
结合 $\left(a_{3k-1}-1348\right)^2\leq 675^2$ 得证.

若 $a_{3k-1}<674$, 第 $3k-1$ 行白格被分为至多 674 段, 故
$$a_{3k-2},a_{3k}\geq 1349-674=675,\ \left(a_{3k}-1348\right)^2\leq 675^2,$$
$$\left(a_{3k-2}-1348\right)^2\leq 675^2,\left(a_{3k-1}-1348\right)^2\leq 1348^2.$$

得证.

将 $k=1,2,\cdots 674$ 这 674 条式子与 $\left(a_{2023}-1348\right)^2\leq 1348^2$ 相加得证. □

评注 答案较容易猜出, 此后调整法可以走通, 也可以通过取等配凑均值. 这一类题目需敢于下手处理, 抓住要点即可做出. 难度中等.

题 5 给定正整数 $n>m$. 求所有的数组 $(i_1,\ i_2,\cdots,i_m)$ $(1\leq i_1<i_2<\cdots<i_m\leq n)$, 使得对任意满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=0$ 的实数组 $(x_1,\ x_2,\cdots,x_n)$ $(x_1<x_2<\cdots<x_n)$, 都有 $\sum\limits_{k=1}^{m}x_{i_k}>0$.

解 答案为满足 $i_j\geq\left\lceil\frac{n}{m}j\right\rceil$ $(1\leq j\leq n)$ 的所有数组 $(i_1,\ i_2,\cdots,i_m)$.

一方面, 若存在 $t\in\{1,2,\cdots,m\}$, $i_t<\lceil\frac{n}{m}t\rceil$, 即 $mi_t<nt$. 取
$$y_1=y_2=\cdots=y_{i_t}=-(n-i_t),\ y_{i_t+1}=\cdots=y_n=i_t,$$
$$x_i=y_i-(n-i)e_1\ (1\leq i\leq i_t),x_i=y_i+ie_2(i_t<i\leq n),$$

使 e_1, e_2 趋向于 0^+ 且 x_i 之和为 0. 则 $\sum\limits_{k=1}^{m} x_{i_k} = mi_t - nt + e$, e 趋向于 0 时 $\sum\limits_{k=1}^{m} x_{i_k} \leq 0$, 矛盾!

另一方面, 若 $i_j \geq \lceil \frac{n}{m} j \rceil$ $(1 \leq j \leq n)$ 有 $i_{\lceil \frac{k}{n} \rceil} \geq \lceil \frac{n}{m} \lceil \frac{k}{n} \rceil \rceil \geq \lceil \frac{k}{m} \rceil$. 即 $x_{i_{\lceil \frac{k}{n} \rceil}} - x_{\lceil \frac{k}{m} \rceil} \geq 0$ 且 $k = mn - n + 1$ 时该式大于等于 $x_n - x_{n-1} > 0$ 不取等. 所以

$$n \sum_{k=1}^{m} x_{i_k} - m \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{k=1}^{mn} (x_{i_{\lceil \frac{k}{n} \rceil}} - x_{\lceil \frac{k}{m} \rceil}) > 0,$$

即 $\sum\limits_{k=1}^{m} x_{i_k} > \frac{m}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0$, 得证. □

评注 容易看出数列应集中于较大的一侧, 进而用密度大于 $\frac{m}{n}$ 刻画得到最后答案, 构造和证明自然就得到了.

题 6 是否存在质数 p 和非零整系数多项式 f, 使得对任意正整数 α, $\{1,\ 2, \cdots, p^\alpha\}$ 中至少有 $p^{\alpha-2023}$ 个正整数 n 使得 $p^\alpha \mid f(n)$?

解 不存在.

加强命题为: 不存在常数 k, 使存在质数 p 和非零整系数多项式 f, 使得对任意正整数 α, $\{1, 2, \cdots, p^\alpha\}$ 中至少有 $p^{\alpha-k}$ 个正整数 n 使得 $p^\alpha \mid f(n)$.

对 $f(n)$ 次数 $\deg f = s$ 归纳证明.

$s = 0$ 时平凡. 若对 s 成立, 考虑 $\deg f = s+1$ 的情况.

用反证法. 若存在常数 k, 质数 p 和多项式 f, $\deg f = s+1$, 使得对任意正整数 α, $\{1, 2, \cdots, p^\alpha\}$ 中至少有 $p^{\alpha-k}$ 个正整数 n 使得 $p^\alpha \mid f(n)$.

引入优化版本的 Hensel 引理:

$$f\left(x + c \cdot p^\alpha\right) \equiv f(x) + c \cdot p^\alpha \cdot f'(x) \pmod{p^{2\alpha}}, x, c \text{ 为整数}.$$

由反证假设, $\{1, 2, \cdots, p^{2\alpha}\}$ 中至少有 $p^{2\alpha-k}$ 个正整数 n 使得 $p^{2\alpha} \mid f(n)$.

待定正整数 l, 设有 x 个正整数 $n \in \{1, 2, \cdots, p^\alpha\}$ 使得 $p^{\alpha-l} \mid f'(n)$.

若 $p^{\alpha-l}$ 不整除 $f'(n)$, 则 $n, n+p^\alpha, \cdots, n+(p^\alpha-1)p^\alpha$ 中有 $\leq p^{\alpha-l-1}$ 个数 t 满足 $p^{2\alpha} \mid f(t)$; (由 $p^{2\alpha} \mid f(n+cp^\alpha)$, 即 $p^{2\alpha} \mid f(n) + cp^\alpha f'(n)$, 所有 c 模 p^{l+1} 同余, 至多 $p^{\alpha-l-1}$ 个 c)

若 $p^{\alpha-l}$ 整除 $f'(n)$, 则 $n, n+p^\alpha, \cdots, n+(p^\alpha-1)p^\alpha$ 中有 $\leq p^\alpha$ 个数 t 满足 $p^{2\alpha} \mid f(t)$.

故

$$xp^\alpha + (p^\alpha - x)\, p^{\alpha-l-1} \geq p^{2\alpha-k} \Rightarrow\ x \geq \frac{p^{2\alpha-k} - p^{2\alpha-l-1}}{p^\alpha - p^{\alpha-l-1}}.$$

取 $l=2k-1$, 即 $x \geq \frac{p^{\alpha}}{p^{k+1}} \geq p^{\alpha-k-1}$. 则存在 $\geq p^{\alpha-l-1-k}$ 个数 $n \in \{1,2,\cdots,p^{\alpha-l}\}$ 满足 $p^{\alpha-l} \mid f'(n)$.

由 α 的任意性及 k,l 为定值, 也即存在质数 p 和非零整系数多项式 f', 使得对任意正整数 $\alpha,\{1,2,\cdots,p^{\alpha}\}$ 中至少有 $p^{\alpha-k-1}$ 个正整数 n 使得 $p^{\alpha} \mid f'(n)$. 又 $\deg f' = \deg f - 1 = s$, 由归纳假设得矛盾. □

评注 考虑到 Hensel 定理的证明方式, 可以想到把 f 变为 f', 于是对次数归纳.中间用到模分析、多项式展开等基本数论技巧.

题 7 魔术师和小美在 $2N \times 2N$ 的方格表中放入 1×2 或 2×1 的骨牌. 魔术师先放入一些两两无公共格的骨牌, 满足对任意 $1 \leq M \leq 2N$, 方格表中每个 $M \times M$ 的正方形至多与 $\lceil \frac{M}{2} \rceil$ 个已放入的骨牌有公共格. 求证: 小美可以再放入骨牌恰覆盖方格表中余下的方格.

证明 只用到 $M=2$ 的情况, 即每个 2×2 只与一个给定多米诺相交, 这时给出构造.

将棋盘划分为 $2n^2$ 个两两不交的 2×2.

若某个 2×2 与给定多米诺均不交, 用两个多米诺填充该 2×2;

若 2×2 与一个给定多米诺相交, 分类:

(1) 给定多米诺落在 2×2 内部.则再放入一个多米诺填充该 2×2;

(2) 给定多米诺与这个 2×2 (记为 A) 与另一个 2×2 (记为 B) 均恰有一格相交.

由条件, AB 相邻且不与其他任一个给定多米诺相交, 易得可再放入三个多米诺填充 A 和 B.

综上, 找到了符合条件的构造. □

评注 很有脑筋急转弯的感觉. 敢于用 $M=2$ 情况去做可以得到意外简单的答案. 也可用一般的 M 及Hall 定理处理.

题 8 设简单有向图 G 的顶点是 10×1000 (10 行1000 列) 的格点. G 的边满足: 除最后一列外, 每个顶点恰有三条有向边指向下一列的三个不同顶点; 除第一列外, 每个顶点恰有三条有向边被前一列的三个不同顶点指向; G 中无其他边. 对最后一列的每个顶点 v 赋予一个实数 $q_v \in [0,1]$. 对其余每个顶点 u, 若从 u 出发指向 a, b, c, 则递归定义 $q_u = \frac{q_a+q_b+q_c}{3}$. 求证: $\sum\limits_{\overrightarrow{uv} \in E} |q_u - q_v| < 150$.

证明 设 i 行 j 列处数为 q_{i_j}, 记 $A_j=\sum\limits_{1\le a<b\le 10}\left|q_{a_j}-q_{b_j}\right|$. 记 E_j 为 j 列指向 $j+1$ 列的有向边.

下证

$$\sum_{\overrightarrow{uv}\in E_j}|q_u-q_v|\le 6\left(A_{j+1}-A_j\right)$$

对 $j=1,2,\cdots,999$ 均成立.

对某个 j, 记 j 列上的数为 $a_1,a_2,\cdots,a_{10}$, $j+1$ 列上的数为 $b_1,b_2,\cdots,b_{10}$.

存在 x_i,y_i,z_i 使得 $a_i=\frac{b_{x_i}+b_{y_i}+b_{z_i}}{3}$, x_i,y_i,z_i 两两不同, $\{x_i,y_i,z_i\mid 1\le i\le 10\}$ 中$1\sim 10$ 各出现 3 次. 则

$$\begin{aligned}A_j&=\sum_{1\le a<b\le 10}\frac{1}{3}\left|b_{x_a}+b_{y_a}+b_{z_a}-b_{x_b}-b_{y_b}-b_{z_b}\right|\\&\le\sum_{1\le a<b\le 10}\frac{1}{9}\left(|b_{x_a}-b_{x_b}|+|b_{x_a}-b_{y_b}|+|b_{x_a}-b_{z_b}|+|b_{y_a}-b_{x_b}|+|b_{y_a}-b_{y_b}|\right.\\&\qquad\left.+|b_{y_a}-b_{z_b}|+|b_{z_a}-b_{x_b}|+|b_{z_a}-b_{y_b}|+|b_{z_a}-b_{z_b}|\right)\\&=\sum_{1\le x<y\le 10}|b_x-b_y|-\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}\left(|b_{x_i}-b_{y_i}|+|b_{y_i}-b_{z_i}|+|b_{x_i}-b_{z_i}|\right),\end{aligned}$$

最后一个等号可以这样理解: 每个 b_t 出现于 3 组 $(b_{x_i},b_{y_i},b_{z_i})$ 中, 即 $|b_i-b_j|$ 至多出现 9 次, 且 $|b_i-b_j|$ 出现次数与 9 的差恰为 (b_i,b_j) 在 (b_x,b_j,b_i) 中出现次数. 故

$$\begin{aligned}6\left(A_{j+1}-A_j\right)&\ge\frac{2}{3}\sum_{i=1}^{10}\left(|b_{x_i}-b_{y_i}|+|b_{y_i}-b_{z_i}|+|b_{x_i}-b_{z_i}|\right)\\&\ge\sum_{i=1}^{10}\left(\sum_{cyc}\frac{1}{3}\left|b_{x_i}-b_{y_i}+b_{x_i}-b_{z_i}\right|\right)\\&=\sum_{i=1}^{10}\left(|b_{x_i}-a_i|+|b_{y_i}-a_i|+|b_{z_i}-a_i|\right)\\&=\sum_{\overrightarrow{uv}\in E_j}|q_u-q_v|.\end{aligned}$$

将 $j=1,2,\cdots,999$ 的式子相加得

$$\sum_{\overrightarrow{uv}\in E}|q_u-q_v|\le 6\left(A_{1000}-A_1\right)<6A_{1000}.$$

不妨 $q_{1_{1000}}\ge q_{2_{1000}}\ge\cdots\ge q_{10_{1000}}$, 则

$$A_{1000}=\sum_{i=1}^{10}(11-2i)q_{i_{1000}}\le 9+7+5+3+1=25,$$

即 $\sum\limits_{\overrightarrow{uv}\in E}|q_u-q_v|<150$. □

评注 关键是想到用两列某个量的差控制列间的 $|q_u-q_v|$, 尝试后发现这个量

是两两差的绝对值和, 且它最大为 25. 从而得到系数 6 和一个局部不等式, 将不好刻画的式子通过逐项相消处理. 证明有一定技巧性.