数学新星网 ※ 学生专栏
www.nsmath.cn/xszl

一个 Chebyshev 多项式引出的系数不等式

刘鑫
(江西省临川第一中学, 344199)

IMOSL 上曾给出这样一道题目:

题 1 *若三次实系数多项式 $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 满足*

$$|P(x)|\leq 1, \quad \forall x\in[-1,1].$$

求 $|a|+|b|+|c|+|d|$ 的最大值.

事实上, 分别代入 $P(1), P\left(\frac{1}{2}\right), P\left(-\frac{1}{2}\right), P(-1)$ 的值可得不等式 $|a|+|b|\leq 4$ 及 $|c|+|d|\leq 3$, 并且当 $P(x)=4x^3-3x$ 为三次 Chebyshev 多项式时, $|a|+|b|+|c|+|d|$ 取最大值 7.

下面本文将利用本人独立发现并予以证明的 Chebyshev 多项式的一个系数性质对本题作推广, 同时对 Chebyshev 定理给出加强.

首先, 我们约定如下记号:

(i) 记

$$\prod_n := \{f\in\mathbb{R}[x] \mid \deg f=n, \mid f(x) \mid\leq 1, \forall x\in[-1,1]\}$$

为所有满足 $\max\limits_{-1\leq x\leq 1}|f(x)|\leq 1$ 的 n 次多项式的集合.

对多项式 $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}\in\mathbb{R}[x]$, 引入模

$$\|f\| := \sum_{k=0}^{n}|a_k|.$$

(ii) 引入系数

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{n}{n-k}\begin{pmatrix} n-k \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-k \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-k-1 \\ k-1 \end{pmatrix}.$$

修订日期: **2024-03-04.**

(iii) 记 $\sigma_k\left(\cos\frac{\ell\pi}{n}\right)$ 为 $\cos\frac{\ell\pi}{n}$ $(\ell=0,1,\cdots,n)$ 的 k 次初等对称多项式;

记 $\sigma_i\left(\cos\frac{j\pi}{n}:j\neq k\right)$ 为 $\cos\frac{j\pi}{n}$ $(0\le j\le n, j\neq k)$ 的 i 次初等对称多项式;

记 $\sigma_i\left(\cos^2\frac{j\pi}{n}:j\neq k,n-k\right)$ 为 $\cos^2\frac{j\pi}{n}$ $\left(0\le j\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor, j\neq k, j\neq n-k\right)$ 的 i 次初等对称多项式.

其次, 我们定义两类Chebyshev 多项式.

定义 1　第一类 Chebyshev 多项式 (迳称 Chebyshev 多项式) 定义如下:

$$T_n(x):=\cos(n\cdot\arccos x),\quad -1\le x\le 1.$$

定义 2　第二类Chebyshev 多项式定义如下:

$$U_n(x):=\frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sin(\arccos x)},-1\le x\le 1.$$

兹列举若干本文所需的基本性质:

性质 (i)

$$\begin{aligned}T_n(x)&=\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n}{2}\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}(-1)^k\left[\begin{array}{c}n\\k\end{array}\right](2x)^{n-2k}.\end{aligned}$$

性质 (ii)

$$\begin{aligned}U_n(x)&=\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n+1}-\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n+1}}{2\sqrt{x^2-1}}\\&=\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}(-1)^k\left(\begin{array}{c}n-k\\k\end{array}\right)(2x)^{n-2k}.\end{aligned}$$

性质 (iii)

$$T_n(x)=2xT_{n-1}(x)-T_{n-2}(x),\ U_n(x)=2xU_{n-1}(x)-U_{n-2}(x),\ n\ge 2.$$

性质 (iv)

$$T_n(\cos\theta)=\cos n\theta,\quad U_n(\cos\theta)=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.$$

性质 (v)

$$T_n\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right)=(-1)^k,\ k=0,1,2,\cdots,n.$$

性质 (vi)

$$\|T_n\|=\frac{(1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n}{2},\ \|U_n\|=\frac{(1+\sqrt{2})^{n+1}-(1-\sqrt{2})^{n+1}}{2\sqrt{2}}.$$

下面简述各性质的证明: 性质 (i) 的一种简洁证法需要用到如下公式:

Waring 公式 对 $n \in \mathbb{N}^*$, 有恒等式

$$a^n + b^n = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (a+b)^{n-2k}(ab)^k.$$

事实上, 上述公式利用性质

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-2 \\ k-1 \end{bmatrix}$$

及恒等式

$$a^n + b^n = (a+b)\left(a^{n-1} + b^{n-1}\right) - ab\left(a^{n+2} + b^{n+2}\right)$$

归纳易证.

又在二元情形的 Waring 公式中取 $a = \cos\theta + i\sin\theta, b = \cos\theta - i\sin\theta$ 即得余弦 n 倍角公式

$$\cos n\theta = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (2\cos\theta)^{n-2k}.$$

进而得到 Chebyshev 多项式的显式

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (2x)^{n-2k}.$$

于是又有

$$U_n(x) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{dT_{n+1}(x)}{dx} = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \begin{pmatrix} n-k \\ k \end{pmatrix} (2x)^{n-2k},$$

而等式

$$T_n(x) = \frac{\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n}{2},$$

$$U_n(x) = \frac{\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^{n+1} - \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^{n+1}}{2\sqrt{x^2-1}},$$

由 T_n, U_n 的定义及 de Moivre 公式易得, 代入 $x = i$ 即有

$$\|T_n\| = \frac{1}{i^n} T_n(i) = \frac{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n}{2},$$

$$\|U_n\| = \frac{1}{i^n} U_n(i) = \frac{(1+\sqrt{2})^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1}}{2\sqrt{2}}.$$

而 (iii) 中递推式由三角恒等式 $\cos n\theta + \cos(n-2)\theta = 2\cos\theta\cos(n-1)\theta$ 及 $\sin(n+1)\theta + \sin(n-1)\theta = 2\cos\theta\sin n\theta$ 可得, 这也给出另一递推式

$$\|T_n\| = 2\|T_{n-1}\| + \|T_{n-2}\|, \; \|U_n\| = 2\|U_{n-1}\| + \|U_{n-2}\|.$$

由上式同样可给出 (vi) 的证明.

接着, 我们给出以下的基本命题:

命题 1

$$\sigma_{2i+1}\left(\cos\frac{\ell\pi}{n}\right)=0,\quad 0\le i\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor.$$

证明 由于第二类 Chebyshev 多项式

$$U_{n-1}(x)=\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}(-1)^k\begin{pmatrix}n-k-1\\k\end{pmatrix}(2x)^{n-2k-1}$$

的所有根为 $\cos\frac{\ell\pi}{n}$ $(\ell=1,2,\cdots,n-1)$, 故多项式

$$\begin{aligned}f(x)&=4\left(x^2-1\right)U_{n-1}(x)\\&=\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}(-1)^k\left[\begin{pmatrix}n-k-1\\k\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}n-k\\k-1\end{pmatrix}\right](2x)^{n-2k+1}\end{aligned}$$

的所有根为 $\cos\frac{\ell\pi}{n}$ $(\ell=0,1,\cdots,n)$, 从而由 Vieta 定理知结论成立. □

命题 2

$$\sigma_{2i+1}\left(\cos\frac{j\pi}{n}:j\ne k\right)=-\cos\frac{k\pi}{n}\sigma_{2i}\left(\cos\frac{j\pi}{n}:j\ne k\right),$$

$$\sigma_{2i}\left(\cos\frac{j\pi}{n}:j\ne k\right)=\sum_{j=0}^{i}\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right)^{2j}\sigma_{2(i-j)}\left(\cos\frac{\ell\pi}{n}\right).$$

证明 由命题 1 有

$$\begin{aligned}&\sigma_{2i+1}\left(\cos\frac{j\pi}{n}:j\ne k\right)+\cos\frac{k\pi}{n}\cdot\sigma_{2i}\left(\cos\frac{j\pi}{n}:j\ne k\right)=\sigma_{2i+1}\left(\cos\frac{\ell\pi}{n}\right)=0\\&\Rightarrow\sigma_{2i+1}\left(\cos\frac{j\pi}{n}:j\ne k\right)=-\cos\frac{k\pi}{n}\cdot\sigma_{2i}\left(\cos\frac{j\pi}{n}:j\ne k\right)\\&\Rightarrow\sigma_{2i}\left(\cos\frac{\ell\pi}{n}\right)=\sigma_{2i}\left(\cos\frac{j\pi}{n}:j\ne k\right)+\cos\frac{k\pi}{n}\sigma_{2i-1}\left(\cos\frac{j\pi}{n}:j\ne k\right)\\&\qquad=\sigma_{2i}\left(\cos\frac{j\pi}{n}:j\ne k\right)-\cos^2\frac{k\pi}{n}\sigma_{2i-2}\left(\cos\frac{j\pi}{n}:j\ne k\right)\\&\Rightarrow\sigma_{2i}\left(\cos\frac{j\pi}{n}:j\ne k\right)=\sigma_{2i}\left(\cos\frac{\ell\pi}{n}\right)+\cos^2\frac{k\pi}{n}\sigma_{2i-2}\left(\cos\frac{j\pi}{n}:j\ne k\right).\end{aligned}$$

递推即得

$$\sigma_{2i}\left(\cos\frac{j\pi}{n}:j\ne k\right)=\sum_{j=0}^{i}\cos^{2j}(\frac{k\pi}{n})\sigma_{2(i-j)}(\cos\frac{\ell\pi}{n}).$$ □

命题 3 对 $0\le i\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$, 若 $\sigma_{2i}\left(\cos\frac{j\pi}{n}:j\ne k\right)\ne 0$, 则

$$\operatorname{sgn}\left(\sigma_{2i}\left(\cos\frac{j\pi}{n}:j\ne k\right)\right)=(-1)^i.$$

证明 令多项式

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \prod_{k=0}^{n}\left(1-\cos\frac{k\pi}{n}\cdot x\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\sigma_k\left(\cos\frac{\ell\pi}{n}\right)x^k\\
&= \sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}\sigma_{2i}\left(\cos\frac{\ell\pi}{n}\right)x^{2i}.
\end{aligned}
$$

考虑形式幂级数

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-\cos^2\frac{k\pi}{n}\cdot x^2} &= 1+\cos^2\frac{k\pi}{n}\cdot x^2+\cos^2\frac{k\pi}{n}\cdot x^4+\cdots\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\cos^{2i}\left(\frac{k\pi}{n}\right)\cdot x^{2i}\\
\Rightarrow \frac{f(x)}{1-\cos^2\frac{k\pi}{n}\cdot x^2} &= \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{i}\cos^{2j}\left(\frac{k\pi}{n}\right)\sigma_{2(i-j)}\left(\cos\frac{\ell\pi}{n}\right)\right)x^{2i}\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\sigma_{2i}\left(\cos\frac{j\pi}{n}:j\neq k\right)x^{2i}\\
&= \sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\sigma_{2i}\left(\cos\frac{j\pi}{n}:j\neq k\right)x^{2i}.
\end{aligned}
$$

又因为

$$
f(x)=\left(1-\cos^2\frac{k\pi}{n}\cdot x^2\right)\prod_{\substack{0\le j\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\\ j\neq k,n-k}}\left(1-\cos^2\frac{j\pi}{n}\cdot x^2\right),
$$

故而

$$
\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\sigma_{2i}\left(\cos^2\frac{j\pi}{n}:j\neq k\right)x^{2i}=\prod_{\substack{0\le j\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\\ j\neq k,n-k}}\left(1-\cos^2\frac{j\pi}{n}\cdot x^2\right),
$$

比较两边 x^{2i} 项系数, 即得 $\sigma_{2i}\left(\cos\frac{j\pi}{n}:j\neq k\right)=(-1)^i\sigma_i\left(\cos^2\frac{j\pi}{n}:j\neq k,n-k\right)$, 从而结论成立. □

最后, 我们给出本文最主要的定理作为 Chebyshev 定理的加强推广, 及其推论作为开头的 IMO 试题之推广.

引理 对任意多项式 $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^{n-k}\in\prod\limits_{n}$, 有不等式

$$
|a_{2i}|\le 2^{n-2i-1}\begin{bmatrix} n\\ i\end{bmatrix},\ i=0,1,\ldots,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor.
$$

证明 由 Lagrange 插值公式可得

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right)\prod_{j\neq k}\frac{x-\cos\frac{j\pi}{n}}{\cos\frac{k\pi}{n}-\cos\frac{j\pi}{n}}.$$

比较系数即得

$$a_{2i}=\sum_{k=0}^{n} f\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right)\frac{\sigma_{2i}\left(\cos\frac{j\pi}{n}:j\neq k\right)}{\prod\limits_{j\neq k}\left(\cos\frac{k\pi}{n}-\cos\frac{j\pi}{n}\right)}.$$

由于 $\operatorname{sgn}\left(\prod\limits_{j\neq k}\left(\cos\frac{k\pi}{n}-\cos\frac{j\pi}{n}\right)\right)=(-1)^k$, 故由命题 3 知对任意 $k\in\{0,1,\cdots,n\}$ 均有

$$\sigma_{2i}\left(\cos\frac{j\pi}{n}:j\neq k\right)=0 \text{ 或 } \operatorname{sgn}\left(\sigma_{2i}\left(\cos\frac{j\pi}{n}:j\neq k\right)\right)=(-1)^i,$$

故

$$|a_{2i}|\leq\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\sigma_{2i}\left(\cos\frac{j\pi}{n}:j\neq k\right)}{\prod\limits_{j\neq k}\left(\cos\frac{k\pi}{n}-\cos\frac{j\pi}{n}\right)}\right|.$$

注意到右式即为 $T_n(x)$ 中 x^{n-2i} 项系数的绝对值, 故

$$|a_{2i}|\leq 2^{n-2i-1}\begin{bmatrix} n\\ i\end{bmatrix}. \qquad \square$$

定理 对任意多项式 $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^{n-k}\in\prod\limits_{n}$, 约定 $a_{n+1}=0$, 有不等式

$$|a_{2i}|+|a_{2i+1}|\leq 2^{n-2i-1}\begin{bmatrix} n\\ i\end{bmatrix}, i=0,1,\cdots,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor.$$

证明 考虑多项式

$$f_1(x)=\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}a_{2i}x^{n-2i},\ f_2(x)=\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}a_{2i+1}x^{n-2i-1}.$$

则对任意 $x\in[-1,1]$, 成立不等式

$$|f_1(x)+f_2(x)|=|f(x)|\leq 1,\ |f_1(x)-f_2(x)|=|f(-x)|\leq 1$$
$$\Rightarrow |f_1(x)|+|f_2(x)|=\max\left(|f_1(x)+f_2(x)|,|f_1(x)-f_2(x)|\right)\leq 1.$$

故令

$$g_1(x)=f_1(x)+xf_2(x)=\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}(a_{2i}+a_{2i+1})x^{n-2i},$$

$$g_2(x)=f_1(x)-xf_2(x)=\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}(a_{2i}-a_{2i+1})x^{2i},$$

则有

$$|g_1(x)| \le |f_1(x)| + |x|\,|f_2(x)| \le |f_1(x)| + |f_2(x)| \le 1,$$

$$|g_2(x)| \le |f_1(x)| + |x|\,|f_2(x)| \le |f_1(x)| + |f_2(x)| \le 1.$$

于是 $g_1, g_2 \in \prod_n$, 因此由引理可知

$$|a_{2i} + a_{2i+1}| \le 2^{n-2i-1} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix},\ |a_{2i} - a_{2i+1}| \le 2^{n-2i-1} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}$$

故

$$|a_{2i}| + |a_{2i+1}| \le 2^{n-2i-1} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}. \qquad \square$$

推论 对任意多项式 $f \in \prod_n$, 有

$$\|f\| \le \|T_n\| = \frac{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n}{2}.$$