2022 – 2023 爱沙尼亚数学奥林匹克决赛及 TST 试题精选

凌晟杰　林裕乔　张书伟
(湖南省长沙市第一中学, 410005)
指导教师: 钟建国

爱沙尼亚 (Estonia) 数学奥林匹克竞赛每年举行三轮: 学校、城镇/ 地区和国家(决赛) 三轮.

每轮比赛表现优异的学生将被邀请参加下一轮. 在每一轮奥林匹克竞赛中, 从七年级到十二年级的每个年级的学生都会有单独的比赛试题. 第一轮学校层次的比赛通常在十二月举行, 第二轮地区层次的比赛在一月或二月举行, 最后一轮的比赛则于春季在塔尔图 (Tartu) 举行.

根据全年所有比赛的成绩, 选出约 20 名 IMO 代表队的候选人. IMO 国家队选拔赛于四月或五月举行, 分两次进行, 每次比赛都是 IMO 模式 (两次共 4 天). 这里我们摘选了其中 2022-2023 年度十一年级、十二年级和国家队选拔考试的部分试题, 整体难度不大, 个别题目比较新颖. 下面我们整理了试题和解答, 并作了简要的评析. 囿于笔者水平, 肯定有不当之处, 恳请读者指正!

I. 试 题

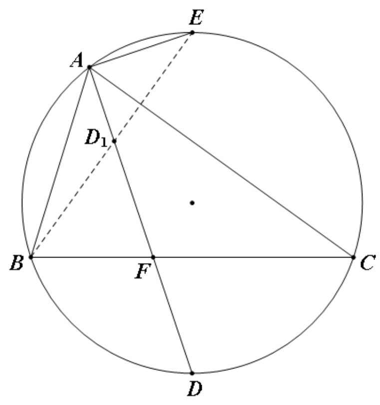
F19 (11 年级) 在 $2022!+2023!$ 的末尾有多少个连续的零?

F20 (11 年级) 是否存在正实数 a,b 满足:

$$\begin{cases} \sqrt{119}a+\sqrt{17}b\le 2ab \\ a^2+b^2\le 2\sqrt{2023} \end{cases}?$$

F21 (11 年级) 设 $\triangle ABC$ 在点 A 处的内角平分线和外角平分线与 $\triangle ABC$ 的外接圆再次交于点 D,E, 设 F 为线段 AD 与 BC 的交点, D_1 为 D 关于点 F 的对称点, 证明: B,D_1,E 三点共线当且仅当 $\angle BAC=2\angle ACB$.

修订日期: **2024-02-27.**



F22 (11 年级) 设 n 和 m 为正整数, 一副牌中有 n 张牌, 每张牌上有 m 个不同的符号, 且每两张牌最多只有一个符号相同, 证明: 至少存在 $\frac{1+\sqrt{1+4nm(m-1)}}{2}$ 个不同的符号.

F23 (11 年级) 对于任意正实数 x, 我们可以将一个时钟的表盘执行以下操作:

(1) 将分针向任意方向旋转 x 度, 此时时针以相同方向旋转 $\frac{x}{12}$ 度;

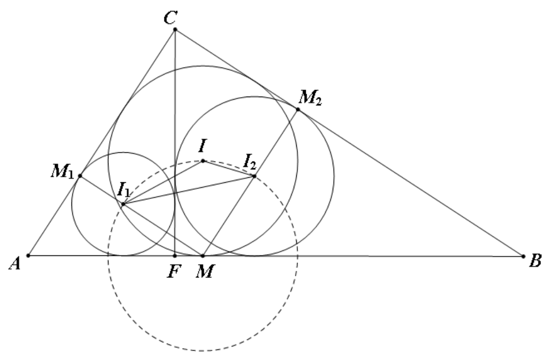
(2) 将两个指针同时向任意方向旋转 x 度.

求最小的实数 α, 使得从任意位置 (不一定是合法时间) 到另一位置时, 分针总共旋转 α 度 (考虑两个方向的旋转).

F24 (12 年级) 设 n 和 k 是满足 $0<k<n$ 的正整数, 证明: C_n^k 至少能被 n 的一个素因子整除.

F25 (12 年级) 设多项式 $P(x)$ 的次数为 2023 , 每个系数均为 0 或 1 , 且 $P(0)=1$, 证明: 多项式 $P(x)$ 的所有实数根均小于 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

F26 (12 年级) 在直角三角形 ABC 中, $\angle ACB=90^\circ$, 过 C 作 $CF\perp AB$ 于点 F, 作 $\triangle ABC, \triangle ACF, \triangle BCF$ 的内切圆, 其内心分别为 I, I_1, I_2, 设 M, M_1, M_2 分别是这三个圆在 AB, AC, BC 上的切点, 证明: 直线 M_1I_1 与直线 M_2I_2 的交点是 ΔII_1I_2 的外心.



F27 (12 年级) 我们称由数字 $1, 2, \cdots, n$ 的排列 $(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)$ 为交错排列, 如果对所有的 $i = 1, , 2, \cdots, n-1$ 都有 $(-1)^i\sigma_i < (-1)^i\sigma_{i+1}$. 对所有正整数 n, 设 α_n 为在 $1, 2, \cdots, n$ 的所有排列中交错排列的比例 (如 $\alpha_1 = \frac{1}{1}, \alpha_2 = \frac{1}{2}, \alpha_3 = \frac{2}{6}$ 等). 证明: 存在区间 $(0, 1)$ 内的实数 c_1, c_2 和一个正整数 N, 使得对于所有大于等于 N 的正整数 n, 不等式 $(c_1)^n < \alpha_n < (c_2)^n$ 成立.

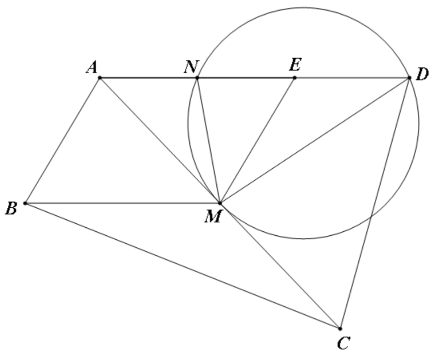
TST1 给定一个质数 p 和整数 x, y, 求表达式

$$x^0y^{p-1} + x^1y^{p-2} + \cdots + x^{p-2}y^1 + x^{p-1}y^0$$

模 p 的余数.

TST2 对于任意自然数 n 和正整数 k, 如果存在非负整数 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 使得 $n = a_1^2 + a_2^4 + a_3^8 + \cdots + a_k^{2^k}$, 我们称 n 是 $k-$好的. 是否存在正整数 k, 使得每个自然数 n 都是 $k-$好的?

TST3 凸四边形 $ABCD$ 满足 $\angle BAC = \angle ADC$, 设 M 为对角线 AC 的中点, 边 AD 上有一点 E, 使得 $ABME$ 是平行四边形. 设 N 为线段 AE 的中点, 证明: 线段 AC 与 $\triangle DMN$ 的外接圆切于点 M.



TST4 我们称不同的正整数是"朋友", 如果 $|n-m|$ 是 n 和 m 的公约数, 证明: 对于任意正整数 $k \geq 2$, 存在 k 个不同的正整数, 使得这些数中的任意两个都是朋友.

II. 解答与评注

F19 (11 年级) 在 $2022! + 2023!$ 的末尾有多少个连续的零?

解 $2022! + 2023! = 2022! \times 2024$. 而

$$v_2(2022! \times 2024) = v_2(2022!) + v_2(2024) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2022}{2^k}\right] + 3$$

$$
\begin{aligned}
&= 1011 + 505 + 252 + 126 + 63 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 + 3 \\
&= 2017,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_5(2022! \times 2024) &= v_5(2022!) + v_5(2024) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2022}{5^k}\right] + 0 \\
&= 404 + 80 + 16 + 3 = 503,
\end{aligned}
$$

于是

$$
v_{10}(2022! \times 2024) = \min\{v_2(2022! \times 2024), v_5(2022! \times 2024)\} = 503.
$$

即 $2022! + 2023!$ 的末尾有 503 个连续的零. □

评注 这是一个非常基础的数论题. 通常计算 $n!$ 中素因子 p 的幂次是使用勒让德公式来计算, 而其中 0 的个数就只取决于 $n!$ 中 5 的幂次数.

F20 (11 年级) 是否存在正实数 a, b 满足:

$$
\begin{cases}
\sqrt{119}a + \sqrt{17}b \le 2ab \\
a^2 + b^2 \le 2\sqrt{2023}
\end{cases} ?
$$

解 不存在.

事实上, 由已知条件

$$
2\sqrt{2023} \ge a^2 + b^2 \ge 2ab \ge \sqrt{119}a + \sqrt{17}b \ge 2\sqrt[4]{2023} \cdot \sqrt{ab},
$$

故

$$
2ab \ge 2\sqrt[4]{2023} \cdot \sqrt{ab} \Leftrightarrow ab \ge \sqrt{2023}.
$$

于是由

$$
2\sqrt{2023} \ge a^2 + b^2 \ge 2ab \ge 2\sqrt{2023},
$$

只能 $a = b = \sqrt[4]{2023}$.

但此时,

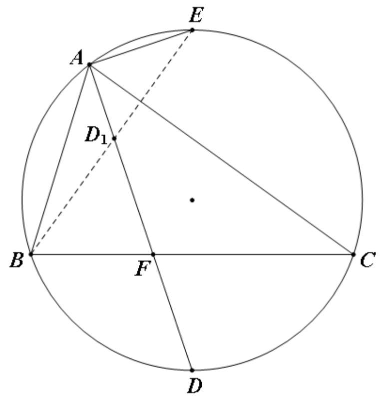
$$
\begin{aligned}
2ab \ge \sqrt{119}a + \sqrt{17}b &\Leftrightarrow 2\sqrt{2023} \ge \sqrt[4]{2023}(\sqrt{119} + \sqrt{17}) \\
&\Leftrightarrow 2\sqrt[4]{2023} \ge \sqrt{119} + \sqrt{17} \\
&\Leftrightarrow 4\sqrt{2023} \ge 136 + 2\sqrt{2023} \\
&\Leftrightarrow 2\sqrt{2023} \ge 136 = 2 \times 68,
\end{aligned}
$$

这显然是矛盾的! 故不存在满足要求的实数 a, b. □

评注 这是一个非常简单的代数题, 将不等式组连接起来, 利用取等条件导

矛盾即可.

F21 (11 年级) 设 $\triangle ABC$ 在点 A 处的内角平分线和外角平分线与 $\triangle ABC$ 的外接圆再次交于点 D, E, 设 F 为线段 AD 与 BC 的交点, D_1 为 D 关于点 F 的对称点, 证明: B, D_1, E 三点共线当且仅当 $\angle BAC = 2\angle ACB$.



证明 一方面, 当 B, D_1, E 三点共线, 知 $\angle DBE = \angle DBD_1 = 90°$, 而 F 是 DD_1 的中点, 于是 $\angle DBF = \angle BDF$, 又

$$\angle DBF = \angle DBC = \frac{1}{2}\angle BAC, \angle BDF = \angle BDA = \angle BCA,$$

故 $\angle BAC = 2\angle ACB$.

另一方面, 当 $\angle BAC = 2\angle ACB$, 有 $\angle CAD = \angle ACB$, 于是 $\angle CBD = \angle BDF$, 又 F 是 DD_1 的中点, 从而 $FD = FB = FD_1$, 故 $\angle DBD_1 = 90° = \angle DBE$, 于是 B, D_1, E 共线. □

评注 这是一个简单的几何题. 本质上是使用直角三角形斜边中线的性质.

F22 (11 年级) 设 n 和 m 为正整数, 一副牌中有 n 张牌, 每张牌上有 m 个不同的符号, 且每两张牌最多只有一个符号相同, 证明: 至少存在 $\frac{1+\sqrt{1+4nm(m-1)}}{2}$ 个不同的符号.

证明 设这副牌上共有 x 个不同的符号, 记为 $a_1, a_2, \cdots, a_x$, 考虑这些符号的无序对 $\{a_i, a_j\}$ 个数.

一方面, 有 C_x^2 个不同的无序对.

另一方面, 对每一张牌, 此牌上的符号能组成 C_m^2 个不同的无序对, n 张牌, 就有 $n\mathrm{C}_m^2$ 个对子, 因为每张牌最多只有一个符号相同, 于是这 $n\mathrm{C}_m^2$ 个对子是互不相同的 (若有两个对子相同, $\{a_i, a_j\} = \{a_k, a_l\}$, 就说明有两张牌, 其上面至少有2 个符号相同).

于是

$$\mathrm{C}_x^2 \geq n\mathrm{C}_m^2 \Leftrightarrow x^2-x-nm(m-1) \geq 0,$$

故 $x \geq \frac{1+\sqrt{1+4nm(m-1)}}{2}$, 命题得证! $\square$

评注 这是一个较基础的组合题, 当然也可以选择使用图论的语言来描述, 构建一个对子数的不等式即可顺利解决.

F23 (11 年级) 对于任意正实数 x, 我们可以将一个时钟的表盘执行以下操作:

(1) 将分针向任意方向旋转 x 度, 此时时针以相同方向旋转 $\frac{x}{12}$ 度;

(2) 将两个指针同时向任意方向旋转 x 度.

求最小的实数 α, 使得从任意位置 (不一定是合法时间) 到另一位置时, 分针总共旋转 α 度 (考虑两个方向的旋转).

解 我们先对"合法时间"的性质作出陈述:

(i) 时针和分针的位置被称为合法时间当且仅当可以通过操作 (1) 到达 12 点或当且仅当 $12\theta_{时}-\theta_{分}=360^\circ \cdot k\ (k \in \mathbb{Z})$ (角度值, 下同) (顺时针方向记角度);

(ii) 一个合法时间关于 12 点和 6 点连线的对称位置仍是合法时间;

(iii) 一个位置, 若将其整体旋转(顺时针或逆时针) $360^\circ \cdot \frac{n}{11}\ (n=0,1,2,\cdots,10)$, 不改变其合法性.

这是因为, 初始时 $12\theta_{时_1}-\theta_{分_1}$, 旋转后 $12\theta_{时_2}-\theta_{分_2}$, 两式作差,

$$12\left(\theta_{时_1}-\theta_{时_2}\right)-\left(\theta_{分_1}-\theta_{分_2}\right)=\pm\left(12 \cdot 360^\circ \cdot \frac{n}{11}-360^\circ \cdot \frac{n}{11}\right)=\pm 360^\circ \cdot n$$

故整体旋转(顺时针或逆时针) $360^\circ \cdot \frac{n}{11}\ (n=0,1,2,\cdots,10)$, 不改变其合法性.

回到原题, 不失一般性, 不妨设终末位置在 12 : 00 处, 并设最小的旋转角度为 α_0.

我们证明下面的两个结论:

结论 1 从任意初始位置开始, 存在一种旋转到 12:00 处的方式, 使得分针至多旋转 360°;

结论 2 存在一个初始位置, 使得分针至少要旋转 360°, 才能到达 12:00 处.

于是由结论 1 知 $\alpha_0 \leq 360^\circ$, 由结论 2 知 $\alpha_0 \geq 360^\circ$, 于是最小的实数 $\alpha_0=360^\circ$.

结论 1 的证明 分三种情况:

情形 I: 初始时时针离"12" 至少有 30° (顺时针, 逆时针两个方向均可), 且分

针在“12” 和时针之间(以“12” 为起点, 按顺时针记), 如图 1. 设初始时时针的顺时针角度为 β_0, 分针的顺时针角度为 γ_0, 于是分针到时针的顺时针角度为 $\beta_0-\gamma_0$, 我们将其整体顺时针旋转角度 θ (操作 (2)), 使得时针位于“11” 和“12” 之间的某处, 该处是合法时间 (因为正常时钟在“11” 点到“12” 点之间分针和时针的顺时针夹角从 $330°$ 减小到 $0°$, 一定能取到 $(\beta_0-\gamma_0)°$ 的角).

然后, 再用操作 (1) 顺时针旋转到 12 点.

此情形下, 由于分针始终顺时针旋转, 且没有越过12 点, 故其转角不超过 $360°$;

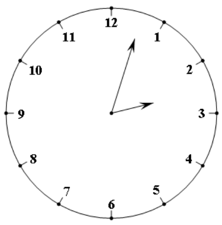


图1

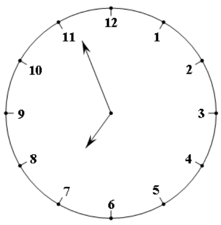


图2

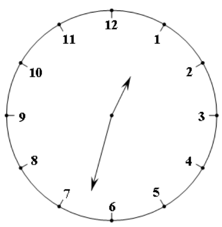


图3

情形 II: 初始时时针离“12” 至少有 $30°$ (顺时针, 逆时针两个方向均可), 且分针在时针和“12” 之间(以“12” 为起点, 按顺时针记), 如图 2. 利用对称性, 我们可以视作此情形为情形 I 关于 12 点和 6 点连线的对称情形, 于是先用操作 (2), 将时针和分针整体逆时针旋转到合法位置, 且时针位于“12” 和“1” 之间, 然后, 再用操作 (1), 逆时针旋转到 12 点.

与情形 I 类似, 此时分针的旋转角不操作 $360°$;

情形 III: 初始时时针离“12”不超过 $30°$ (顺时针, 逆时针两个方向均可), 如图 3. 我们先用操作 (2) 使时针和分针位于合法位置, 且时针离“12”尽可能近 (贪心想法). 这里由于两个指针旅转 $\left(\frac{360}{11}\right)^\circ$ 经过一个合法位置, 时针至多离“12” 有 $\left(\frac{360}{22}\right)^\circ$. 然后再用操作 (1), 分针至多旋转 $\left(12\cdot\frac{360}{22}\right)^\circ$ 就可以到达“12” 点处, 此情形下, 分针旋转角度 $\leq 60°+\left(12\cdot\frac{360}{22}\right)^\circ<360°$.

于是结论 1 得证!

结论 2 的证明　考虑表盘上分针指向“12” , 时针指向“5” 和“6” 的正中间 (如图 4).

由于操作的结果与顺序无关, 且此时是不合法时间, 于是不可能只通过操作 (1) 和操作 (2) 实现指向“12:00”的目标. 故不妨 (1) 和 (2) 各操作了一次, 且先 (2) 后 (1).

如果操作 (2) 后时针与“12”的夹角超过 $30°$ (两个方向均可), 那么接下来分针至少旋转 $360°$, 于是这不是最优的, 那么就让操作 (2) 后时针与“12” 的夹角不

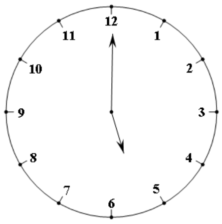


图4

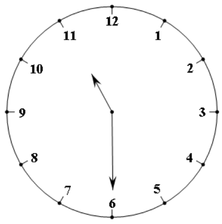


图5

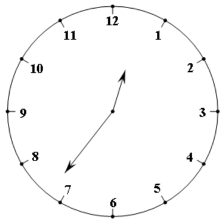


图6

超过 30°, 即位于“11” 和“1” 之间, 并成为合法时间. 此时会出现有两种可能成为“11:30” 或“0: $\left(35+\frac{5}{11}\right)$ 分”, 如图 5, 图 6. 对于前者, 分针旋转 $180^\circ+180^\circ=360^\circ$; 对于后者, 分针旋转 $\left(180^\circ-\left(\frac{360}{11}\right)^\circ\right)+\left(180^\circ+\left(\frac{360}{11}\right)^\circ\right)=360^\circ$.

综上, 结合结论 1 和结论 2 , 知最小的实数 $\alpha_0=360^\circ$. □

评注 这是一个中等难度的组合操作的最值问题, 首先是要对合法位置的特性进行研究, 并明确操作 (1) 和操作 (2) 对指针合法性的所起的影响.

F24 (12 年级) 设 n 和 k 是满足 $0<k<n$ 的正整数, 证明: C_n^k 至少能被 n 的一个素因子整除.

证明 (方思云) 注意到 $\mathrm{C}_n^k\mathrm{C}_k^1=\mathrm{C}_n^1\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$, 于是 $\frac{\mathrm{C}_n^k}{n}=\frac{\mathrm{C}_{n-1}^k}{k}$, 而 $0<k<n$, 知分式 $\frac{\mathrm{C}_n^k}{k}$ 进行了约分 (分子减小), 于是 $\left(\mathrm{C}_n^k,n\right)\neq 1$ (不互素). 即 C_n^k 至少能被 n 的一个素因子整除. □

评注 这是一个很基础的数论问题, 想法是若分式能约分, 一定发生了整除. 下面的一道题也是基于这样的想法, 留给大家做练习:

给定正整数 n $(n\geq 2)$, 求满足下列条件的整数对 (i,j):

(1) $0\leq i<j\leq n$; (2) $(\mathrm{C}_n^i,\mathrm{C}_n^j)=1$.

F25 (12 年级) 设多项式 $P(x)$ 的次数为 2023 , 每个系数均为 0 或 1 , 且 $P(0)=1$, 证明: 多项式 $P(x)$ 的所有实数根均小于 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

证明 (林裕乔) 反证. 若存在实数 x_0 使得 $P\left(x_0\right)=0$, 且 $x_0\geq\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. 设

$$P(x)=x^{2023}+\sum_{i=1}^{2022}a_ix^i+1, a_i\in\{0,1\}, i=1,2,\cdots,2022.$$

知 $x_0<0$, 否则若 $x_0\geq 0$, 则有 $P\left(x_0\right)\geq 1>0$.

于是 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}\leq x_0<0$, 有 $x_0^2\leq\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\leq 1-\left|x_0\right|, x_0^2-x_0-1\leq 0$, 故

$$\begin{aligned}0=P\left(x_0\right)&=x_0^{2023}+\sum_{i=1}^{2022}a_ix_0^i+1\\&\geq x_0^{2023}+x_0^{2021}+\cdots+x_0^3+x_0+1\end{aligned}$$

$$= x_0 \cdot \frac{1-x_0^{2024}}{1-x_0^2} + 1$$

(上式将奇数次幂前系数放成 1 , 偶数次幂前系数放成 0) 于是

$$\begin{aligned} 0 \geq x_0 \cdot \frac{1-x_0^{2024}}{1-x_0^2} + 1 &\Leftrightarrow 1 - x_0^2 \leq -x_0 + x_0^{2025} \\ &\Leftrightarrow 0 \leq x_0^2 - x_0 - 1 + x_0^{2025} < x_0^2 - x_0 - 1 \leq 0, \end{aligned}$$

这是矛盾的!

故原命题成立! □

评注 这是一个较基础的代数题, 反证法的思路是自然的, 在其实根在 $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right)$ 内的反证假设下, 简单尝试就会想到将奇数次幂前系数放成 1 , 偶数次幂前系数放成 0 , 从而导出矛盾.

对于多项式的根分布问题, 经典的手法是刘维尔方法, 下面问题, 可以当做此题的延伸思考:

设 $P(x)$ 是一个首1 的 n $(n > 1)$ 次多项式, 且系数均位于 $[1,2]$ 上, 证明: $P(x)$ 的所有根均属于集合

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \leq 0\} \cup \{z \in \mathbb{C} || z |< 2\}.$$

证明 反证. 假设 $P(x)$ 有某个根 z_0, 满足 $\operatorname{Re}(z_0) > 0$ 且 $|z_0| \geq 2$, 则 $P(z_0) = 0$.

不妨设 $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, 于是

$$z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} = -\left(a_{n-2} z_0^{n-2} + \cdots + a_1 z_0 + a_0\right).$$

两边同时除以 z_0^n, 则

$$1 + \frac{a_{n-1}}{z_0} = -\left(\frac{a_0}{z_0^n} + \frac{a_1}{z_0^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-2}}{z_0^2}\right),$$

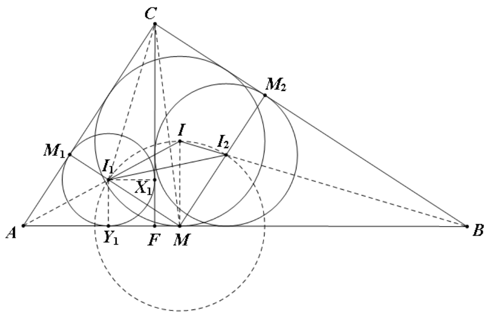
而 $\operatorname{Re}(z_0) > 0$ 且 $a_{n-1} \in [1,2]$, 有 $\operatorname{Re}\left(\frac{a_{n-1}}{z_0}\right) > 0$, 于是

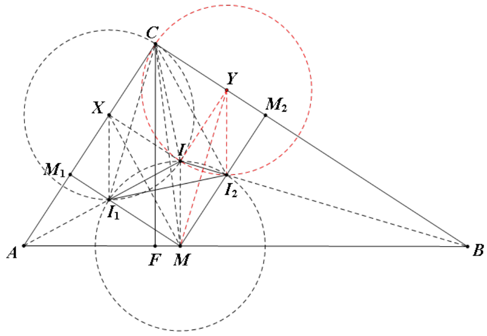
$$\begin{aligned} 1 \leq \left|1 + \frac{a_{n-1}}{z_0}\right| &= \left|\frac{a_0}{z_0^n} + \frac{a_1}{z_0^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-2}}{z_0^2}\right| \\ &\leq 2\left(\frac{1}{|z_0|^n} + \frac{1}{|z_0|^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{|z_0|^3} + \frac{1}{|z_0|^2}\right) \\ &= \frac{2 \cdot \frac{1}{|z_0|^2}\left(1 - \frac{1}{|z_0|^{n-1}}\right)}{1 - \frac{1}{|z_0|}} < \frac{2}{|z_0|\left(|z_0| - 1\right)}, \end{aligned}$$

从而 $1 < \frac{2}{|z_0|(|z_0|-1)}$, 即 $(|z_0| - 2)(|z_0| + 1) < 0$, 这是矛盾的!

故 $P(x)$ 的所有根 $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \leq 0\} \cup \{z \in \mathbb{C} || z |< 2\}$. □

F26 (12 年级) 在直角三角形 ABC 中, $\angle ACB=90^\circ$, 过 C 作 $CF\perp AB$ 于点 F, 作 $\triangle ABC,\triangle ACF,\triangle BCF$ 的内切圆, 其内心分别为 I,I_1,I_2, 设 M,M_1,M_2 分别是这三个圆在 AB,AC,BC 上的切点, 证明: 直线 M_1I_1 与直线 M_2I_2 的交点是 ΔII_1I_2 的外心.





证明 1 (方思云) 如左图, 作 $I_1X_1\perp CF$, $I_1Y_1\perp AM$, 垂足为 X_1,Y_1, 先证明: $MI_1\perp CA$, $MI_2\perp CB$.

设 $\triangle ABC$ 的三边长 $AB=c,BC=a,CA=b$, 于是

$$\begin{aligned}MC^2-MA^2&=CF^2+MF^2-MA^2\\&=CF^2-(2MA-AF)AF\\&=AC^2-2MA\cdot AF\\&=b^2-(b+c-a)b\cos A\\&=b^2-\left(b+\frac{b}{\cos A}-b\tan A\right)b\cos A\\&=b^2(\sin A-\cos A),\\I_1C^2-I_1A^2&=CM_1^2-AM_1^2=CX_1^2-AY_1^2\\&=\left(\frac{b+b\sin A-b\cos A}{2}\right)^2-\left(\frac{b-b\sin A+b\cos A}{2}\right)^2\\&=b^2(\sin A-\cos A).\end{aligned}$$

于是 $MC^2-MA^2=I_1C^2-I_1A^2$, 得到 $MI_1\perp CA$, 同理 $MI_2\perp CB$.

结合 $I_1M_1\perp CA$, 知 M_1,I_1,M 三点共线, 同样 M_2,I_2,M 三点共线, 也就是 M_1I_1 与 M_2I_2 交点为 M.

再证明 M 是 ΔII_1I_2 的外心.

因为 A,I_1,I 三点共线, 故 $\angle MIA=90^\circ-\angle IAM=90^\circ-\angle IAM_1=\angle AI_1M_1=\angle MI_1I$, 于是 $MI=MI_1$, 同理 $MI=MI_2$, 于是 M 到 I,I_1,I_2 距离相等, 从而 M 是 ΔII_1I_2 的外心.

综上, 命题得证! $\square$

证明 2 (林裕乔) 如右图, 设内切圆 I 与 CA, CB 分别切于点 X, Y, 以 X, Y 为圆心, XC, YC 为半径作圆.

首先, 由 I, I_1, I_2 均为内角平分线上的点, 知 A, I_1, I 共线, B, I_2, I 共线, 且 $CXIY$ 是正方形.

由内心的性质, 知 $\angle AI_1C = 135°$, 故 $\angle II_1C = 45° = \frac{90°}{2} = \frac{\angle CXI}{2}$, 结合 $XC = XI$, 知 I_1 在圆 X 上, 即 $XI_1 = XI$, 而Rt $\triangle AMI \cong$ Rt $\triangle AXI$, 故 $MI_1 = MI$.

同理, 可以得到 $MI_2 = MI$, 故 M 是是 ΔII_1I_2 的外心.

再来证明 M_1I_1 与 M_2I_2 交点为 M, 只要证明 M_1, I_1, M 共线即可(同理可证 M_2, I_2, M 共线)

这只要 $\angle M_1I_1I + \angle II_1M = 180°$, 而

$$\begin{aligned}\angle M_1I_1I + \angle II_1M &= 180° - \angle AI_1M_1 + \angle I_1IM \\ &= 180° - \left(90° - \frac{\angle CAB}{2}\right) + \left(90° - \frac{\angle CAB}{2}\right) \\ &= 180°,\end{aligned}$$

故 M_1, I_1, M 共线! 进一步得到 M_1I_1 与 M_2I_2 交点为 M.

原命题得证! $\square$

评注 这是一个较基础的几何题, 可以借助定差幂线证明共线, 也可以倒角证明共线, 而证明外心则可以利用到定点距离相等, 或使用熟知的外心结论(等腰三角形加两倍角关系或 2α 与 $180° - \alpha$ 的关系).

F27 (12 年级) 我们称由数字 $1, 2, \cdots, n$ 的排列 $(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)$ 为交错排列, 如果对所有的 $i = 1, , 2, \cdots, n-1$ 都有 $(-1)^i\sigma_i < (-1)^i\sigma_{i+1}$. 对所有正整数 n, 设 α_n 为在 $1, 2, \cdots, n$ 的所有排列中交错排列的比例 (如 $\alpha_1 = \frac{1}{1}, \alpha_2 = \frac{1}{2}, \alpha_3 = \frac{2}{6}$ 等). 证明: 存在区间 $(0, 1)$ 内的实数 c_1, c_2 和一个正整数 N, 使得对于所有大于等于 N 的正整数 n, 不等式 $(c_1)^n < \alpha_n < (c_2)^n$ 成立.

解 (林裕乔) 我们称若 $1, 2, \cdots, n$ 的排列 $(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)$ 满足 $\sigma_1 > \sigma_2 < \sigma_3 > \sigma_4 < \cdots$ 的排列为 P 排列, 若满足 $\sigma_1 < \sigma_2 > \sigma_3 < \sigma_4 > \cdots$, 则称为 Q 排列, 并记 P_n, Q_n 为 $1, 2, \cdots, n$ 的 P 排列和 Q 排列的个数.

故只需证明: 存在区间 $(0, 1)$ 内的实数 c_1, c_2, 使得 $(c_1)^n \cdot n! < P_n < (c_2)^n \cdot n!$,

对 $n \geq 2$ 成立.

首先我们来研究 P_n 的递推表达式

$$P_{2k} = Q_{2k-1} + C_{2k-1}^{2} P_2 Q_{2k-3} + C_{2k-1}^{4} P_4 Q_{2k-5} + \cdots + C_{2k-1}^{2k-2} P_{2k-2}.$$

这是因为对于 P_{2k}, 最大的数 $2k$ 只能排在奇数位上, 若数 $2k$ 排在第 1 位, 则剩下的是 $2k-1$ 个数的 Q 排列; 若 $2k$ 排在第 3 位, 则排在 $2k$ 前的是两个数的 P 排列, 排在 $2k$ 后的是 $2k-3$ 个 Q 排列; 依次类推, 故

$$P_{2k} = Q_{2k-1} + C_{2k-1}^{2} P_2 Q_{2k-3} + C_{2k-1}^{4} P_4 Q_{2k-5} + \cdots + C_{2k-1}^{2k-2} P_{2k-2}.$$

同理:

$$\begin{aligned}
&P_{2k+1} = Q_{2k} + C_{2k}^{2} P_2 Q_{2k-2} + C_{2k}^{4} P_4 Q_{2k-4} + \cdots + C_{2k}^{2k} P_{2k}, \\
&Q_{2k} = P_{2k-1} + C_{2k-1}^{2} Q_2 P_{2k-3} + C_{2k-1}^{4} Q_4 P_{2k-5} + \cdots + C_{2k-1}^{2k-2} Q_{2k-2}, \\
&Q_{2k+1} = P_{2k} + C_{2k}^{2} Q_2 P_{2k-2} + C_{2k}^{4} Q_4 P_{2k-4} + \cdots + C_{2k}^{2k} Q_{2k}.
\end{aligned}$$

又 $P_1 = 1, P_2 = 1, P_3 = 2, P_4 = 5, Q_1 = 1, Q_2 = 1, Q_3 = 2, Q_4 = 5$, 结合递推式, 知 $P_n = Q_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

然后, 再来取这样的 c_1, c_2.

一方面, 先取 $c_2 \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$, 知 $1 = P_2 < (c_2)^2 \cdot 2! = 2(c_2)^2$, 即 $n = 2$ 符合要求; 又

$$2 = P_3 < (c_2)^3 \cdot 3! = 6(c_2)^3 \Leftrightarrow 1 < 3 \cdot (c_2)^3,$$

要求 $c_2 \in \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}, 1\right)$.

若 $P_k < (c_2)^k \cdot k!$ 对 $k \leq n-1$ 均成立, 则:

当 n 为奇数时,

$$\begin{aligned}
P_n &= P_{n-1} + C_{n-1}^{2} P_2 P_{n-3} + C_{n-1}^{4} P_4 P_{n-5} + \cdots + C_{n-1}^{n-1} P_{n-1} \\
&< (c_2)^{n-1} \cdot (n-1)! \\
&\quad + \sum_{\substack{2 \leq i \leq n-1 \\ 2 \mid i}} \left(\frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!} \cdot (c_2)^i \cdot i! \cdot (c_2)^{n-1-i} \cdot (n-1-i)! \right) \\
&= \left(\frac{n-1}{2} + 1 \right) \cdot (c_2)^{n-1} \cdot (n-1)! \\
&= (c_2)^n \cdot n! \cdot \frac{n+1}{2n \cdot c_2}.
\end{aligned}$$

于是要求 $\frac{n+1}{2n \cdot c_2} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2c_2} \leq 1$ 对 $n \geq 5$ 恒成立, 只要 $c_2 \in \left(\frac{3}{5}, 1\right)$ 即可.

当 n 为偶数时,

$$P_n = P_{n-1} + C_{n-1}^{2} P_2 P_{n-3} + C_{n-1}^{4} P_4 P_{n-5} + \cdots + C_{n-1}^{n-2} P_{n-2} P_1$$

$$
\begin{aligned}
&< (c_2)^{n-1}\cdot(n-1)!+C_{n-1}^{n-2}P_{n-2}P_1\\
&\quad+\sum_{\substack{2\le 1\le n-4\\ 2|i}}\left(\frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!}\cdot(c_2)^i\cdot i!\cdot(c_2)^{n-1-i}\cdot(n-1-i)!\right)\\
&=\left(\frac{n-4}{2}+1\right)\cdot(c_2)^{n-1}\cdot(n-1)!+(n-1)\cdot(c_2)^{n-2}\cdot(n-2)!\\
&=(c_2)^{n-1}(n-1)!\cdot\left(\frac{(n-2)}{2}+\frac{1}{c_2}\right),
\end{aligned}
$$

于是要求 $(c_2)^{n-1}(n-1)!\cdot\left(\frac{(n-2)}{2}+\frac{1}{c_2}\right)\le(c_2)^n\cdot n!$ 对 $n\ge 4$ 恒成立, 这等价于

$$
\left(\frac{(n-2)}{2}+\frac{1}{c_2}\right)\le n\cdot c_2\Leftrightarrow n\left(c_2^2-\frac{c_2}{2}\right)+c_2\ge 1
$$

对 $n\ge 4$ 成立, 只要 $c_2\in\left(\frac{3}{4},1\right)$ 即可.

结合上述要求, 知取 $c_2=1-\varepsilon$ (ε 是充分小的正数) 满足要求.

另一方面, 再先取 $c_1\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, 知

$1=P_2>(c_1)^2\cdot 2!=2(c_1)^2$, 即 $n=2$ 符合要求;

$2=P_3>(c_1)^3\cdot 3!=6(c_1)^3\Leftrightarrow 1>3\cdot(c_1)^3$, 要求 $c_1\in\left(0,\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$;

若 $P_k>(c_1)^k\cdot k!$ 对 $k\le n-1$ 均成立, 同样有

当 n 为奇数时,

$$
\begin{aligned}
P_n&=P_{n-1}+C_{n-1}^2P_2P_{n-3}+C_{n-1}^4P_4P_{n-5}+\cdots+C_{n-1}^{n-1}P_{n-1}\\
&>(c_1)^{n-1}\cdot(n-1)!\\
&\quad+\sum_{\substack{2\le i\le n-1\\ 2|i}}\left(\frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!}\cdot(c_1)^i\cdot i!\cdot(c_1)^{n-1-i}\cdot(n-1-i)!\right)\\
&=\left(\frac{n-1}{2}+1\right)\cdot(c_1)^{n-1}\cdot(n-1)!\\
&=(c_1)^n\cdot n!\cdot\frac{n+1}{2n\cdot c_1}.
\end{aligned}
$$

于是要求, $\frac{n+1}{2n\cdot c_1}=\frac{1+\frac{1}{n}}{2c_1}\ge 1$ 对 $n\ge 5$ 恒成立, 只要 $c_1\in\left(0,\frac{3}{5}\right)$ 即可.

当 n 为偶数时,

$$
\begin{aligned}
P_n&=P_{n-1}+C_{n-1}^2P_2P_{n-3}+C_{n-1}^4P_4P_{n-5}+\cdots+C_{n-1}^{n-2}P_{n-2}P_1\\
&>(c_1)^{n-1}\cdot(n-1)!+C_{n-1}^{n-2}P_{n-2}P_1\\
&\quad+\sum_{\substack{2\le 1\le n-4\\ 2|i}}\left(\frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!}\cdot(c_1)^t\cdot i!\cdot(c_1)^{n-1-i}\cdot(n-1-i)!\right)\\
&=\left(\frac{n-4}{2}+1\right)\cdot(c_1)^{n-1}\cdot(n-1)!+(n-1)\cdot(c_1)^{n-2}\cdot(n-2)!
\end{aligned}
$$

$$= (c_1)^{n-1}(n-1)! \cdot \left(\frac{(n-2)}{2} + \frac{1}{c_1}\right)$$

于是要求 $(c_1)^{n-1}(n-1)! \cdot \left(\frac{(n-2)}{2} + \frac{1}{c_1}\right) \geq (c_1)^n \cdot n!$ 对 $n \geq 4$ 恒成立, 这等价于:

$$\left(\frac{(n-2)}{2} + \frac{1}{c_1}\right) \geq n \cdot c_1 \Leftrightarrow n\left(c_1^2 - \frac{c_1}{2}\right) + c_1 \leq 1$$

对 $n \geq 4$ 成立, 只要 $c_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 即可;

结合上述要求, 知取 $c_1 = \varepsilon$ (ε 是充分小的正数) 满足要求.

综上, 存在区间 $(0,1)$ 内的实数 $c_1 = \varepsilon, c_2 = 1 - \varepsilon$ (ε 是充分小的正数) 和一个正整数 $N = 2$, 使得

$$(c_1)^n \cdot n! < P_n < (c_2)^n \cdot n!,$$

对 $n \geq 2$ 成立. □

评注 本题是中等难度的组合题, 大概是联赛第三题难度, 实质上是在估计 α_n 的级别. 借助交错排列的定义构建一个递推式来刻画 $\alpha_n \cdot n$! 是很有必要的, 也是处理这类问题的常用手法, 最后再给出 c_1 和 c_2 的存在性时, 很自然地想到利用递推式放缩. 上述解答的后半部分完全是代数处理, 需要小心的是奇偶情况的分析.

TST1 给定一个质数 p 和整数 x, y, 求表达式

$$x^0 y^{p-1} + x^1 y^{p-2} + \cdots + x^{p-2} y^1 + x^{p-1} y^0$$

模 p 的余数.

解 我们记 $S = x^0 y^{p-1} + x^1 y^{p-2} + \cdots + x^{p-2} y^1 + x^{p-1} y^0 = \frac{x^p - y^p}{x - y}(x \neq y)$.

(1) 若 $x \equiv y \equiv t \pmod p$, 知

$$S \equiv t^{p-1} \cdot p \equiv 0 \pmod p.$$

(2) 若 $x \neq y \pmod p$, 则 $x \neq y$ 且 $(x-y, p) = 1$, 于是由费马小定理

$$x^p \equiv x \pmod p, \quad y^p \equiv y \pmod p.$$

有

$$(x-y)\left(x^0 y^{p-1} + x^1 y^{p-2} + \cdots + x^{p-2} y^1 + x^{p-1} y^0\right) = x^p - y^p \equiv x - y \pmod p,$$

即

$$S \equiv 1 \pmod p.$$

综上, S 模 p 的余数是 0 或 1 . □

评注 这是一个很基础的数论问题, 只需要注意到 $x^p - y^p$ 的因式分解和费马小定理便可以解决.

TST2 对于任意自然数 n 和正整数 k, 如果存在非负整数 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 使得 $n = a_1^2 + a_2^4 + a_3^8 + \cdots + a_k^{2^k}$, 我们称 n 是 $k-$好的. 是否存在正整数 k, 使得每个自然数 n 都是 $k-$好的?

解 (张书伟) 不存在.

反证, 若存在正整数 k_0, 使得任意自然数 n 都是 k_0-好的.

我们记 $A_m = \{1, 2, 3, \cdots, m\}$, 对任意 $x \in A_m$, 存在 $a_{1,x}, a_{2,x}, \cdots, a_{k_0,x} \in \mathbb{N}$, 使得

$$x = a_{1,x}^2 + a_{2,x}^4 + a_{3,x}^8 + \cdots + a_{k_0,x}^{2^{k_0}}.$$

则对于 k_0 元有序数组构成的集合 $B_m = \{(a_{1,x}, a_{2,x}, \cdots, a_{k_0,x}) \mid x \in A_m\}$, 应有 $|B_m| \geq |A_m| \geq m$.

而由

$$a_{1,x}^2 + a_{2,x}^4 + a_{3,x}^8 + \cdots + a_{k_0,x}^{2^{k_0}} = x \leq m$$

知

$$a_{1,x} \leq m^{\frac{1}{2}}, a_{2,x} \leq m^{\frac{1}{4}}, a_{3,x} \leq m^{\frac{1}{8}}, \cdots, a_{k_0,x} \leq m^{\frac{1}{2^{k_0}}}.$$

故

$$\begin{aligned}|B_m| &\leq \left(\left[m^{\frac{1}{2}}\right]+1\right)\left(\left[m^{\frac{1}{4}}\right]+1\right)\left(\left[m^{\frac{1}{8}}\right]+1\right)\cdots\left(\left[m^{\frac{1}{2^{k_0}}}\right]+1\right) \\ &\leq \left(m^{\frac{1}{2}}+1\right)\left(m^{\frac{1}{4}}+1\right)\left(m^{\frac{1}{8}}+1\right)\cdots\left(m^{\frac{1}{2^{k_0}}}+1\right),\end{aligned}$$

于是

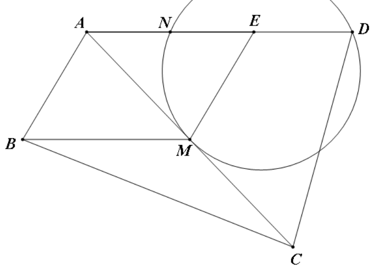
$$m \leq \left(m^{\frac{1}{2}}+1\right)\left(m^{\frac{1}{4}}+1\right)\left(m^{\frac{1}{8}}+1\right)\cdots\left(m^{\frac{1}{2^{k_0}}}+1\right).$$

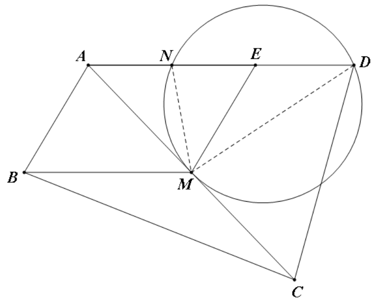
然而左边 m 的幂次为 1, 右边关于 m 的幂次 $= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{k_0}} = 1 - \frac{1}{2^{k_0}} < 1$, 左边次数比右边高, 当 m 充分大时, 上述不等式不成立, 从而矛盾!

故不存在正整数 k, 使得任意自然数 n 都是 $k-$好的. □

评注 这是一个中等难度的代数问题, 有分析的味道, 为了导矛盾, 我们去估计符合条件的数组 $(a_{1,x}, a_{2,x}, \cdots, a_{k_0,x})$ 的个数的级别.

TST3 凸四边形 $ABCD$ 满足 $\angle BAC = \angle ADC$, 设 M 为对角线 AC 的中点, 边 AD 上有一点 E, 使得 $ABME$ 是平行四边形. 设 N 为线段 AE 的中点, 证明: 线段 AC 与 $\triangle DMN$ 的外接圆切于点 M.





证明 由 $ABME$ 是平行四边形, 知 $AB \parallel EM$, 故

$$\angle EMA = \angle BAM = \angle BAC = \angle ADC.$$

从而 E, M, C, D 四点共圆, 于是 $AM \cdot AC = AE \cdot AD$,

又 M, N 分别是 AC, AE 的中点, 于是 $AM \cdot 2AM = 2AN \cdot AD$. 即

$$AM^2 = AN \cdot AD,$$

而 $\angle NAM = \angle MAD$, 有 $\triangle NAM \sim \triangle MAD$, 故 $\angle AMN = \angle ADM$.

故线段 AC 与 $\triangle DMN$ 的外接圆切于点 M. $\square$

评注 这是一个非常容易的几何题, 证明直线与圆相切的通常手法就是去证明母子型的相似三角形.

TST4 我们称不同的正整数是"朋友", 如果 $|n-m|$ 是 n 和 m 的公约数, 证明: 对于任意正整数 $k \geq 2$, 存在 k 个不同的正整数, 使得这些数中的任意两个都是朋友.

证明 (刘一宁) 我们对 k 进归纳构造.

当 $k=2$ 时, 我们取 $m=2, n=3$ 即可.

假设 $k=t$ 时, 命题成立, 即存在 $x_1, x_2, \cdots, x_t \in \mathbb{N}^*$, 使得 $x_1, x_2, \cdots, x_t$ 两两不同且任意两个都是朋友. 下面考虑 $k+1$ 的情形.

不妨设 $x \in \mathbb{N}^*$, 且 $x > \max\{x_1, x_2, \cdots, x_t\}$, 我们取

$$x!, x!+x_1, x!+x_2, x!+x_3, \cdots, x!+x_t$$

这 $t+1$ 个数, 我们断言这 $t+1$ 个数是符合要求的:

(1) 显然这些数互不相同;

(2) 对 $\forall 1 \leq i < j \leq t$, 我们由归纳假设: $|x_i - x_j| \mid x_i$, $|x_i - x_j| \mid x_j$ (x_i 与 x_j 互为朋友), 且 $x_i \mid x!, x_j \mid x\,!$. 于是

$$|x!+x_i-(x!+x_j)| \mid x_i,\ x_i \mid x!+x_i,\ \ |x!+x_i-(x!+x_j)| \mid x_j,\ \ x_j \mid x!+x_j.$$

有

$$|x!+x_i-(x!+x_j)| \mid x!+x_i,\ \text{以及}\ |x!+x_i-(x!+x_j)| \mid x!+x_j.$$

故 $|x!+x_i-x!+x_j|$ 是 $x!+x_i$ 和 $x!+x_j$ 的公约数, 即 $x!+x_i$ $(1 \le i < j \le t))$ 互为朋友.

另一方面, 对任意 $1 \le i \le t$, 有 $|x!-(x!+x_i)| = x_i, x_i \mid x!, x_i \mid x!+x_i$, 即 $x!$ 与 $x!+x_i$ $(1 \le i \le t))$ 均为朋友.

综上, $x!, x!+x_1, x!+x_2, x!+x_3, \cdots, x!+x_t$ 两两都是朋友.

故由归纳原理, 知对任意正整数 $k \ge 2$, 存在 k 个不同的正整数, 使得这些数中的任意两个都是朋友. □

评注 这是一个中等难度的数论问题, 基本想法是归纳构造, 能够有整除关系的首选是阶乘, 又有 $|n-m|$ 的特点, 平移不变性的想法就自然介入了.