数学新星问题征解

第五十三期 (2024.04)

主持: 张端阳

第一题. 设平面上有一圆 ω, AB 为 ω 的弦, M, N 为 AB 的三等分点, 满足 $AM = MN = NB$. P 在弧 $\overparen{AB}$ 上, 满足 $\angle MPN = 90^\circ$. 平面上一点 Q 满足 $QA \parallel PN, QB \parallel PM$. 设 R 为 Q 关于 $\triangle APB$ 的等角共轭点, 射线 RP 交圆 ω 于另一点 K. L 在 BK 上满足 $AL \perp AK$, 设 RL 交 PB 于点 X. 证明: $AX = RX$.

(湖北省武昌实验中学学生 邢资隆 供题)

第二题. 初始时有全为 0 的无穷数列. 甲乙两人轮流进行如下操作, 甲先开始. 甲每次可将任意连续若干项减 2, 乙每次可将任意连续若干项加 1. 证明: 对任意正整数 N, 无论甲如何操作, 乙总可在有限轮内使数列中出现绝对值不小于 N 的项.

注: “若干”包含 0.

(中国人民大学附属中学学生 刘思齐 供题)

第三题. 给定素数 p 和正整数 n. 设非负实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n$. 求 $\min\{x_1x_p, x_2x_{2p}, \cdots, x_nx_{np}\}$ 的最大值, 其中下标按模 n 理解.

(温州中学学生 徐昊祁 供题)

第四题. 证明: 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $C > 0$, 使得如下命题成立:

对任意正整数 n 和 n 个不超过 $n^{1.1}$ 的正整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 集合

$$\{(i,j) : 1 \le i < j \le n, i + j \mid a_i + a_j - 1\}$$

的元素个数不超过 $\frac{1}{4}n^2 + Cn^{1+\varepsilon}$.

(北京大学学生 廖昱博 供题)