

数学新星问题征解

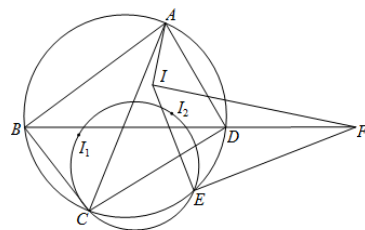
第十九期 (2017.02)

主持: 牟晓生

第一题. 给定正整数 $n \geq 4$, 设实数 $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, 1]$. 求 $\sum_{i=1}^n x_i |x_i - x_{i+1}|$ 的最大值, 约定 $x_{n+1} = x_1$.

(湖南雅礼中学学生 汤继尧 供题)

第二题. 如图, 四边形 $ABCD$ 内接于圆 Γ . I, I_1, I_2 分别是 $\triangle ABD, \triangle ABC, \triangle ADC$ 的内心. 过 C, I_1, I_2 的圆与圆 Γ 交于除 C 外的另一点 E , 过 E 作 EI 的垂线交直线 BD 于 F . 证明: $IF \perp AI$.



(湖南师大附中 苏林 供题)

第三题. 考虑数列 $x_1 = 1, x_{n+1} = 1 + \frac{n}{x_n}, \forall n \geq 1$. 证明这个数列中只有前三项是整数.

(哈佛大学 牟晓生 供题)

第四题. 令 $F(n; a_1, a_2, \dots, a_k)$ 为 $1 \sim n$ 中能被某个 a_i 整除或能整除某个 a_i 的数的个数. 证明若 $1 < a_1, \dots, a_k \leq n$, 则 $F(n; a_1, \dots, a_k) \leq F(n; p_1, \dots, p_k)$, 其中 p_1, p_2, \dots, p_k 是前 k 个素数.

(哈佛大学 牟晓生 供题)