

# 数学新星问题征解

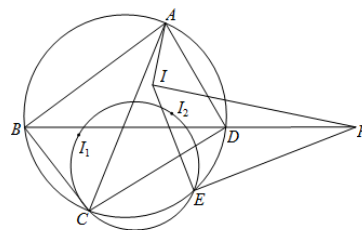
第十九期 (2017.02)

主持: 牟晓生

**第一题.** 给定正整数  $n \geq 4$ , 设实数  $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, 1]$ . 求  $\sum_{i=1}^n x_i |x_i - x_{i+1}|$  的最大值, 约定  $x_{n+1} = x_1$ .

(湖南雅礼中学学生 汤继尧 供题)

**第二题.** 如图, 四边形  $ABCD$  内接于圆  $\Gamma$ .  $I, I_1, I_2$  分别是  $\triangle ABD, \triangle ABC, \triangle ADC$  的内心. 过  $C, I_1, I_2$  的圆与圆  $\Gamma$  交于除  $C$  外的另一点  $E$ , 过  $E$  作  $EI$  的垂线交直线  $BD$  于  $F$ . 证明:  $IF \perp AI$ .



(湖南师大附中 苏林 供题)

**第三题.** 考虑数列  $x_1 = 1, x_{n+1} = 1 + \frac{n}{x_n}, \forall n \geq 1$ . 证明这个数列中只有前三项是整数.

(哈佛大学 牟晓生 供题)

**第四题.** 令  $F(n; a_1, a_2, \dots, a_k)$  为  $1 \sim n$  中能被某个  $a_i$  整除或能整除某个  $a_i$  的数的个数. 证明若  $1 < a_1, \dots, a_k \leq n$ , 则  $F(n; a_1, \dots, a_k) \leq F(n; p_1, \dots, p_k)$ , 其中  $p_1, p_2, \dots, p_k$  是前  $k$  个素数.

(哈佛大学 牟晓生 供题)