两道新星数学奥林匹克组合题思路分析

冯跃峰

近读 2016 年秋季上海新星数学奥林匹克试题, 颇觉新颖有趣, 且不偏不怪, 难度适中. 尤其是最后两道组合题, 其探索解答的思路非常自然, 堪作数学奥林匹克活动的良好素材. 故此, 今对后面两题的解答作些思路分析, 请大家指正!

第 5 题. 设 $n \geq 2$, $A_1, A_2, \cdots, A_t$ 是 $X = \{1, 2, \cdots, n\}$ 的所有子集的任一个排列, 求

$$S = \sum_{i=1}^{t} |A_i \cap A_{i+1}| \cdot |A_i \cup A_{i+1}|,$$

的最大值, 其中 $t = 2^n, A_{t+1} = A_1$.

【题感】从目标看, 求 S 的最大值, 需建立关于 S 的不等式"$S \leq \cdots$". 但其 S 的表达式非常复杂, 且无法直接"求和"化简, 自然想到先将复杂的表达式通过放缩变形, 使其变成容易"求和"的表现形式. 这类似于代数中 $\sum\left(\frac{1}{k^2}\right)$ 不易"求和", 先将其放缩到 $\sum\left(\frac{1}{k(k-1)}\right)$, 使其变得易于"求和".

【通项放缩】S 的通项为 $|A_i \cap A_{i+1}| \cdot |A_i \cup A_{i+1}|$, 它的一般形式为 $|A \cap B| \cdot |A \cup B|$. 注意到 $\sum |A|$、$\sum |B|$ 可求 (其中 A、B 跑遍 X 的所有子集, 自然想到将 $|A \cap B| \cdot |A \cup B|$ 放大到 $f(|A|, |B|)$ 的形式. 即建立如下不等式:

$$|A \cap B| \cdot |A \cup B| \leq f(|A|, |B|).$$

【结构联想】注意到不等式左边是"二次式", 所以想到右边也是"二次式", 再注意到 $\sum |A|^2$、$\sum |B|^2$ 也可求, 于是将不等式变为

$$|A \cap B| \cdot |A \cup B| \leq f\left(|A|^2, |B|^2\right).$$

先猜想右边是最简单形式的二次对称式 $|A|^2 + |B|^2$, 不等式变为

$$|A \cap B| \cdot |A \cup B| \leq |A|^2 + |B|^2.$$

【调整参数】但为了等号成立使不等式达到最优, 应引入平移、伸缩的调

收稿日期: **2017-02-23;** 修订日期: **2017-03-01.**

整参数 a、b, 进一步将不等式变为

$$|A \cap B| \cdot |A \cup B| \leq a\left(|A|^2 + |B|^2\right) + b. \tag{$*$}$$

下面确定参数 a、b. 为此, 令 $|A \setminus B| = x$, $|B \setminus A| = y$, $|A \cap B| = z$, 则不等式 $(*)$ 化为

$$z(x+y+z) \leq a(x+z)^2 + a(y+z)^2 + b,$$

$$\Rightarrow ax^2 + ay^2 + (2a-1)\left(z^2 + xz + yz\right) + b \geq 0.$$

期望不等式为简单形式, 取 $2a-1=0$, 则不等式变为

$$x^2 + y^2 + 2b \geq 0.$$

上式恒成立的充要条件是 $\min\left(x^2+y^2\right) + 2b \geq 0$.

由于 $x, y \in \mathbb{N}$, 且 x, y 不全为 0 $(A \neq B)$, 于是 $\min\left(x^2+y^2\right) = 1$, 所以不等式变成 $1 + 2b \geq 0$. 为使等号成立, 取 $2b = -1$ 即可.

所以, 我们有 $2|A \cap B| \cdot |A \cup B| \leq \left(|A|^2 + |B|^2\right) - 1$, 其中等号在 $\{x, y\} = \{0, 1\}$ 时成立, 此时 A、B 恰相差一个元素 (A、B 中的一个是另一个的子集, 且元素个数相差 1).

【上界估计】利用上述不等式, 显然有

$$\begin{aligned} 2S &= \sum_{i=1}^{t} 2\left|A_i \cap A_{i+1}\right| \cdot \left|A \cup A_{i+1}\right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{t}\left(\left|A_i\right|^2 + \left|A_{i+1}\right|^2 - 1\right) \\ &= 2\sum_{i=1}^{t}\left|A_i\right|^2 - t. \end{aligned}$$

考察 $S' = \sum\limits_{i=1}^{t}\left|A_i\right|^2$, 对 $1 \leq k \leq n$, 使 $\left|A_i\right| = k$ 的子集 A_i 有 C_n^k 个, 于是

$$S' = \sum_{i=1}^{n}\left(k^2 C_n^k\right) = \left(n^2+n\right)2^{n-2},$$

所以, $2S \leq 2S' - t = \left(n^2+n\right)2^{n-1} - 2^n$, 得 $S \leq \left(n^2+n-2\right)2^{n-2}$.

等号在 A_i 与 A_{i+1} $(1 \leq i \leq t)$ 都恰好相差一个元素时成立, 这是可能的 (一个早期的构造问题, 不赘述), 故 S 的最大值为 $\left(n^2+n-2\right)2^{n-2}$. □

第 6 题. 设 $A_1, A_2, \cdots, A_{13}$ 是太空中的 13 颗新星, 对任意 i, j $(1 \leq i < j \leq 13)$, 从新星 A_i 通行至 A_j, 或从新星 A_j 通行至 A_i, 需花费 $f(i, j)$ 个太空币. 问是否可将各 $f(i, j)$ $(1 \leq i < j \leq 13)$ 的值设定为两两不同的正整数, 使得从 A_1

出发, 以无论何种次序经过 $A_2, A_3, \cdots, A_{13}$ 各一次, 再回到 A_1, 总是花费恰好 2017 个太空币?

【题感】此题有明显的图论色彩 (当然无需用到图论知识, 只是用图描述更直观而已), 如果用 n 个点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 代表 n 颗新星 $(n=13)$, 则题中的路径恰好是一个“哈氏”圈. 再注意到条件“ A_i, A_j 之间的通行花费 $f(i,j)$ 个太空币”, 这可用对边 A_iA_j 赋值 $f(i,j)$ 来表示, 称为该边的“权”. 那么, 解题的目标是, 恰当对各边都赋一个“权”, 使 n 阶完全图中每个“哈氏”圈各边的“权和”都为 2017.

【逐步逼近】这属于一个“赋值型”的构造问题 (构造一种赋值方式), 其赋值的条件很强, 我们将其分解为 3 个部分来逐步实现:

(1) n 阶完全图中每个“哈氏”圈各边的“权和”都相等;

(2) 上述相等的“权和”为 2017;

(3) 各边的“权”互异.

【构造拟对象】先构造满足条件 (1) 的拟赋值方案. 要使每个“哈氏”圈各边的“权和”都相等, 自然想到利用“哈氏”圈的共同特征: 通过“各顶点” A_i 各一次.

由此想到将边 A_iA_j 的“权”分解为顶点 A_i、A_j 的“权”, 即定义 $f(i,j)=g(a_i,a_j)$, 其中 a_i 是顶点 A_i 的“权”, 则“哈氏”圈各边的“权和”变成“哈氏”圈各顶点的“权和”: $G(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

相对于每个“哈氏”圈, $G(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 为常数的一个充分条件是, $G(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是关于 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的对称式. 这又只需前面的“分解函数” $g(a_i,a_j)$ 关于 a_i,a_j 对称, 最简单的形式是 $g(a_i,a_j)=a_i+a_j$.

此时, 每个“哈氏”圈的权和: $G(a_1,a_2,\cdots,a_n)=2(a_1+a_2+\cdots+a_n)$.

现在来改进“拟对象”, 使其满足 (2). 由于 $2(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ 为偶数, 而 2017 为奇数, 两者不可能相等, 需要修改“分解函数” $g(a_i,a_j)$ 的定义, 但保持其仍然关于 a_i,a_j 对称.

【修正参数】这有两个常见方案, 一是引入“平移型”修正参数; 二是引入“伸缩型”修正参数.

如果引入“伸缩型”修正参数, 定义 $g(a_i,a_j)=k(a_i+a_j)$, 则

$$G(a_1,a_2,\cdots,a_n)=2k(a_1+a_2+\cdots+a_n).$$

为了使上述值不是偶数, 取 $2k=1$, 此时,

$$g\left(a_i,a_j\right)=\frac{\left(a_i+a_j\right)}{2},\quad G\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)=a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

现在, 要使 (2) 成立, 只需 $a_1+a_2+\cdots+a_n=2017$. 但注意到 $\frac{(a_i+a_j)}{2}\in N$, 所以 a_i,a_j 同奇偶, 又 $a_1+a_2+\cdots+a_n=2017$ 为奇数, 所以取所有 a_i 为奇数.

最后适当选取奇数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$, 使 $a_1+a_2+\cdots+a_n=2017$, 且各 a_i+a_j $(1\le i<j\le n)$互异.

【充分条件】注意到这样的事实: 对于 4 个互异的数: $a_p<a_q<a_s<a_t$, 如果其中两数的和与另两数的和相等, 则只能是 $a_p+a_t=a_q+a_s$. 要使此式不成立, 一个充分条件是, 最大的项 a_t 比其他任何两项的和都大.

于是, 设选取的奇数为 $1=a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n$, 则其中每两个数的和互异的一个充分条件是, 对任何 $i<j<k$, 有

$$a_k\ge a_i+a_j. \tag{$*$}$$

实际上, 假设有某两个数的和与另两数的和相等. 设 4 个数为 $a_p<a_q<a_s<a_t$, 则只能是 $a_p+a_t=a_q+a_s$. 但由 $a_q<a_s<a_t$, 知 $q<s<t$, 于是由 $(*)$, 有 $a_t\ge a_q+a_s$, 所以 $a_t+a_p>a_q+a_s$, 矛盾.

下面依据 $(*)$ 来构造奇数 $1=a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n$, 使 $a_1+a_2+\cdots+a_n=2017$.

显然, 为保证最后的 $2017-(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})=a_n\ge a_{n-1}+a_{n-2}$, 应使前面的数尽可能小, 即 $a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}$ 尽可能小.

此外, 为了使 a_i 为奇数, 不能取 $a_i=a_{i-1}+a_{i-2}$, 于是前面的数都取 $a_i=a_{i-1}+a_{i-2}+1\ (2\le i\le n-1)$, 这样, 前面 $n-1=12$ 个数依次为

$$1,\ 3,\ 5,\ 9,\ 15,\ 25,\ 41,\ 67,\ 109,\ 177,\ 287,\ 465,$$

这 12 个数的和 1204, 最后取 $a_{13}=2017-1204=813$, 则 $813>287+465$ 合乎 $(*)$ 的要求.

综上所述, 将上述 13 个数标在新星上, 然后令 $f(i,j)$ 为 A_i、A_j 上标数的算术平均值, 则各 $f(i,j)$ $(1\le i<j\le 13)$ 的值设定为两两不同的正整数.

如果引入“平移型”修正参数, 则定义 $g(a_i,a_j)=a_i+a_j+d$, 其中 d 为奇数. 为了“权和”不超过 2017, 可取 $d<0$, 但为了使 a_i+a_j+d 为正整数, 想到取 $d=1$. 以下仿上面 $(*)$ 的分析, 不难知道 $(a_1,a_2,\cdots,a_{13})=(1,2,3,,8,13,21,34,55,89,144,233,407)$ 合乎要求, 这正是原解答的构造. □