数学新星问题征解

第二十期（2017.03）

主持: 牟晓生

第一题. 对每个非负整数 k, 令 $N(k)$ 为满足 $2017^k \mid\mid n!$ 的正整数 n 的个数. 求 $N(k)$ 的所有可能值.

(广西南宁二中学生 陈宝麟 供题)

第二题. 设 M 是一个 $m \times n$ 的整数数表, 其中 $1 \leq m \leq n$. 允许对 M 进行如下操作: 任取一行或一列, 将其中的数同时加上某个整数 a. 假设 M 中恰有 r 个数为 1, 其余的数都为 -1, 而 $1 \leq r < m$. 证明: 无法通过有限次操作使得 M 中所有数都相等.

(深圳高级中学 冯跃峰 供题)

第三题. 在三角形 ABC 中, O 是外心, M 是 BC 的中点. P 在三角形形内, 满足 A, O, P, M 共圆. J 是 AB 上的点, 使得 $\angle JMC \angle APC$. 同样地, K 是 AC 上的点, 使得 $\angle KMB = \angle APB$. 证明: B, J, K, C 共圆.

(浙江省象山县第三中学学生 黄子宸 供题)

第四题. 给定正整数 n 以及非负实数 l_{ij} $(1 \leq i < j \leq n)$. 是否一定存在非负实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$, 满足 $|a_i - a_j| \geq l_{ij}$ $(\forall i < j)$, 并且 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \leq \sum\limits_{i<j} l_{ij}$?

(哈佛大学 牟晓生 供题)

第五题*. 山西大学附中王永喜老师针对十九期征解的第三题提出了下面的猜想:

考虑数列 $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 1 + \frac{n}{x_n}$, $\forall n \geq 1$, 猜想:

$$\lfloor x_n^2 \rfloor = n + \lfloor \sqrt{n-1} \rfloor, \forall n > 10.$$